

Title	制限3体問題から生成されるカオスII
Sub Title	Chaos generated by restricted three-body problem
Author	小田原, 宏行(Odawara, Hiroyuki)
Publisher	共立薬科大学
Publication year	1999
Jtitle	共立薬科大学研究年報 (The annual report of the Kyoritsu College of Pharmacy). No.44 (1999. ) ,p.31- 39
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Technical Report
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00062898-00000044-0031">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00062898-00000044-0031</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 制限3体問題から生成されるカオスⅡ

小田原 宏行

### Chaos generated by restricted three-body problem

Hiroyuki Odawara

The planer three-body problem is the problem of describing the motion of three point masses in the plane under their mutual Newtonian gravitation. Experiments by a personal computer show that the long-term evolution of the three-body system is extremely sensitive to initial date.

Typically , neighbouring orbits deviate exponentially in time. So this means that systems like one are not predictable over a long time span like a prediction of the weather which E.Lorenz had discovered in 1960.

This article shows these features through the system of Pythagorean Three-body System. In this problem, it is found that the motion begins with a long interplay involving many close encounters of all three types, and that near the Pythagorean initial codition a periodic solution exists. This article also treats the a few of the behaviors of three bodies which are regular or irregular in the three-Dimensional Problem by a personal computer.

#### 1. はじめに

ポアンカレに始まる天体力学、現在言われているカオスの研究は太陽系が安定かどうか、というところからはじまった。惑星の運動は規則的なのですが、あるいは規則的と思われていますが、太陽系の惑星の運動はカオスなのです。ただし、非常に弱いカオスなので地球の軌道に突然の乱れは生じないのです。

太陽の周りを地球が回るように2つの天体だけが運動するとき、Newtonの運動方程式は厳密に解けます、その系に月が入っても、月の影響は小さいので3体の運動方程式そのものを解く必要はなく、太陽・地球の2体問題を解いてそれに月の影響を摂動として近似的に加えることで地球の運動を知ることができたのです。しかし、3体の問題は厳密に解くことができず近似的に解こうとしてもわずかな誤差がカオスを生じさせるのです。

したがって我々の3体問題で、どのようなカオスが生成されるかということです。(Fig.1)。

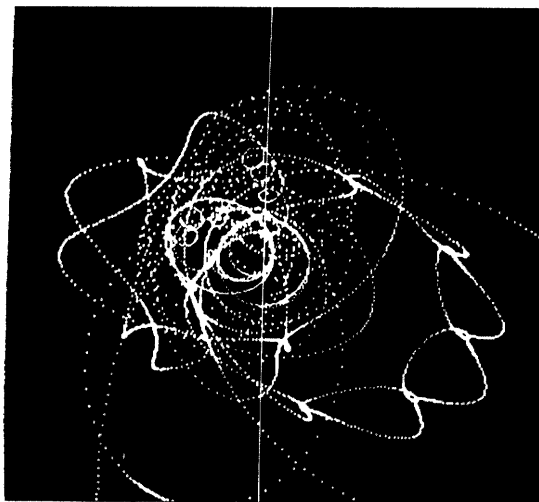


Fig.1

いわゆる 3 体問題とは

$$m_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial w_i} \quad (i = 1, 2, 3 \quad w = x, y, z)$$

$$U = \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \quad (G: \text{万有引力定数}) \dots\dots\dots(1)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

を論ずる。方程式 (1) は

$$\sum \frac{1}{2} m_i [(\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2] - U = \text{一定} \quad \text{という}$$

エネルギー積分と

$$\sum m_i \dot{w}_i = \text{一定} \quad (\text{運動量積分}) \text{ と } t \text{ で積分した}$$

$$\sum m_i w_i = (\sum m_i \dot{w}_i) t + \text{定数}$$

という、6 個の重心積分と

$$\sum m_i (u_i \dot{w}_i - w_i \dot{u}_i) = \text{一定} (u \neq w)$$

という 3 個の角運動量積分と、計 10 個の古典積分を持っている。 $n = 3$  の場合、一般解は解析的に求められず、いくつかの特殊解から得られるが、前稿 (文献 8) では、Euler の直線解と Lagrange の正三角形解の存在することを見た。

力学的に言えば、3 質点間の相互の距離が変わらない剛体とみなして、その 3 角形が作る平面内で回転するような運動が有るか、という問題である。

重心が静止しているとして、これを原点にとり、3 質点の位置ベクトルを  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  とする。また、それぞれの質量を  $m_1, m_2, m_3$  とすれば、重心が固定する条件

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0 \quad \text{である。}$$

質点 1, 2 が第 3 の質点に作用する力の合力が重心の方に向いていなければならないから

$$\frac{G m_1 m_3 (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} + \frac{G m_2 m_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}$$

は  $\vec{r}_3$  に平行である。

すなわち、 $\vec{r}_3$  を含む部分を除いた、 $\frac{m_1 \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}$

は  $\vec{r}_3$  に平行である。

この条件と上で見た

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 (= -m_3 \vec{r}_3) \text{ が } \vec{r}_3 \text{ に平行であるという要請を合わせると}$$

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \text{ が互いに平行である} \dots\dots\dots \text{①}$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \dots\dots\dots \text{②}$$

でなければならない。①が直線解であり②が正三角形解である。

この小論では、正三角形解の例として太陽、木星、地球の間の運動の安定性の条件、直接制限 3 体問題ではないが、ピタゴラスの 3 平方の定理を満たす 3 整数の組から作られる 3 物体が描く軌道が示すカオスについて、最後に平面内の 3 体運動を空間内の 3 体問題に拡張する場合について検討する。

## 2. 正三角形解の安定性

等しい辺の長さを  $a$  , この三角形が重心の周りにまわる角速度を  $\beta$  とする。

第3の質点に働く万有引力と遠心力との平衡から

$$\frac{Gm_1m_3(\vec{r}_1-\vec{r}_3)}{a^3} + \frac{Gm_2m_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{a^3} + m_3\beta^2\vec{r}_3 = 0$$

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0 \text{ より、 } G(m_1+m_2+m_3) = a^3\beta^2 \dots\dots\dots (2)$$

問題を簡単にするため地球の質量  $\mu$  は太陽 (S) の質量  $M$ 、木星 (J) の質量  $m$  に比べて十分小さいから、S, J は地球の運動に関わりなく共通重心の周りを一定角速度  $\beta$  で回転している。

上の (2) 式は

$$G(M+m) = a^3\beta^2$$

地球 (P) の運動方程式を求めるため、Hamilton 関数を求めると (文献7)

$$H = \frac{(\vec{p})^2}{2\mu} + \beta\vec{p} \times \vec{r} - \frac{G\mu M}{|\vec{r}-\vec{r}_s|} - \frac{G\mu m}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$$

P, S, J が正3角形を作る座標は次のように書ける。

$$\vec{r}_0 = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} a, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\left( \frac{1}{2} a, \frac{\sqrt{3}}{2} a \right), \left( -\frac{1}{2} a, \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \text{ はそれぞれ } \vec{r}_0 \text{ から見た S, J を表す。}$$

平衡状態にある  $\vec{p}$  の値は静止系から見た運動量に等しいので、 $p$  は

$$\vec{p} = m\vec{\beta} \times \vec{r}_0 \text{ と書ける。}$$

文献7の方法を要約すると、地球 (P) の平衡点からの座標、運動量のずれを、それぞれ  $x, y, u, v$  また、それらが十分小さいとして、Hamilton関数を展開して、 $u, v$  について2次の項をとれば

$$H_{(2)} = \frac{\mu}{2}(u^2+v^2) + \mu\beta(yu-xv) + \frac{1}{2}\mu\beta^2(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2}\beta^2 \left\{ \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{M-m}{M+m}xy \right\}$$

$x, y, u, v$  が満たす運動方程式が線形であることに注意して

$x, y, u, v$  が  $\exp(i\omega t)$  に比例するものとして

$$\text{正準方程式 } \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

を使って、 $x, y, u, v$  に関する微分方程式を書くと ( $\mu = 1$  とする)

$$\frac{dx}{dt} = u + \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = v - \beta x$$

$$\frac{du}{dt} = \beta v - \beta^2 x + \frac{3}{4}\beta^2 x + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{M-m}{M+m} y$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta u - \beta^2 y + \frac{9}{4}\beta^2 y + \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{M-m}{M+m}$$

$x, y, u, v$  の係数から作られる 4 行 4 列の行列式

$$\begin{vmatrix} i\omega & -\beta & -1 & 0 \\ \beta & i\omega & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4}\beta^2 & \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{M-m}{M+m}\beta^2 & -i\omega & \beta \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{M-m}{M+m}\beta^2 & \frac{5}{4}\beta^2 & -\beta & -i\omega \end{vmatrix} = 0$$

を計算すると、 $\omega^4 - \beta^2\omega^2 + \frac{27}{16}\left\{1 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right\}\beta^4 = 0$

整理すると、 $\omega^4 - \beta^2\omega^2 + \frac{27}{4}\frac{Mm}{(M+m)^2}\beta^4 = 0$

$\omega$  の 2 次方程式が実数解を持つ条件から (実数解をもてばともに解は正)

$$\beta^4 \left\{ 1 - 27 \left( \frac{Mm}{(M+m)^2} \right) \right\} > 0$$

$m$  が  $M$  に比べて十分小さければ、

$$\frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+m/M} \cong m$$

であるから、 $1 - 27m/(m+M) > 0$

すなわち  $M > 26m$

という条件が必要になる。

例えば、木星の質量は太陽の 1047 分の 1、地球は木星の質量の 300 分の 1 を想起すれば、太陽、木星、地球間の相互作用が安定であることが確認できる、また太陽、木星、トロヤ群間の 3 体問題の安定的振る舞いをも保障するものである。ここではふれないが、直線解は不安定であることが証明されている。

### 3. Pythagoras 数による 3 体問題

ピタゴラス数による 3 体問題は、1913 年に、C. Bureau によって考察されたものである。3 物体が平面上で運動する。そのとき、速度も 2 次元ベクトルとする。ピタゴラスの 3 平方の定理を満たす 3 整数、一番簡単なものは、3, 4, 5 の組み合わせであろう。Fig.2 のように 3 物体の位置がさだめられる。

$$P_2P_3 = 3, P_1P_3 = 4, P_2P_1 = 5$$

このとき辺  $P_2P_3$  に対する 3 角形の頂点  $P_1$  に質量 3 の物体を置き、 $P_2P_1$  に対する頂点  $P_3$  に質量 5 の物体を、同様に  $P_2$  には質量 4 の物体を置く。3 物体の初速度は 0 に選び運動させたものが、ピタゴラスの 3 体問題である。

現実の天文学で存在するモデルから出発したものではなく、物理的に見て意味があるかどうか、という点では不明であるが、以下述べるようにいくつかの興味ある特徴を見ることができる。

例として、3 辺が 5, 12, 13 の場合を取り上げる。Fig.3 はピタゴラス数が (3, 4, 5) の場合であり、Fig.4 は Fig.3 の 1 つの頂点 (-2, -1) を (-2, -1, 0, 0, 1) に変えたものである。Fig.5 と Fig.6 は同様にピタゴラス数 (5, 12, 13) の場合で、1 頂点の座標の値を 0, 0, 0, 1 変えたものである。

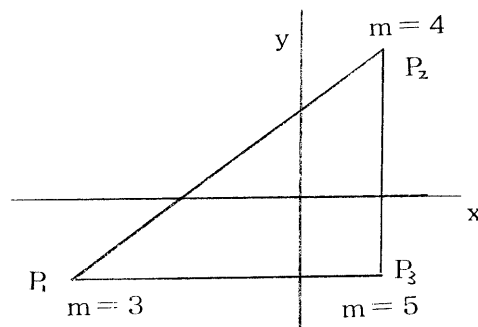


Fig.2

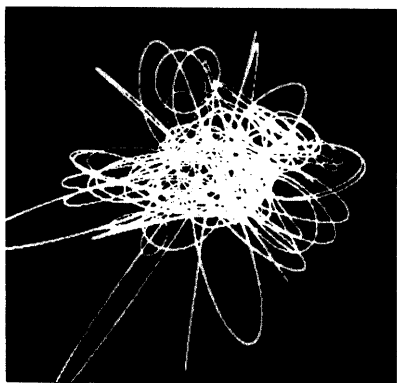


Fig.3

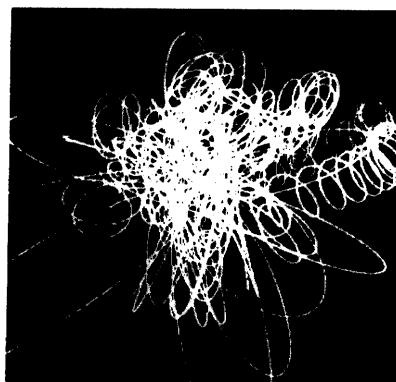


Fig.4

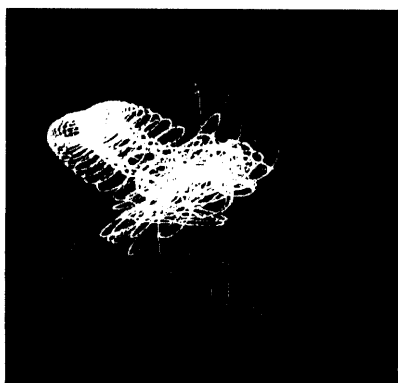


Fig.5

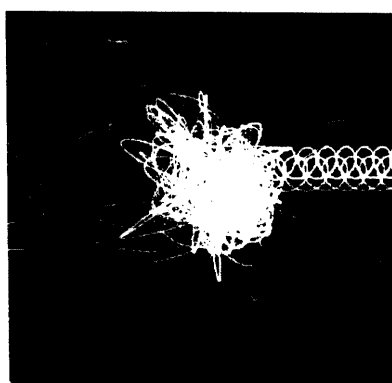


Fig.6

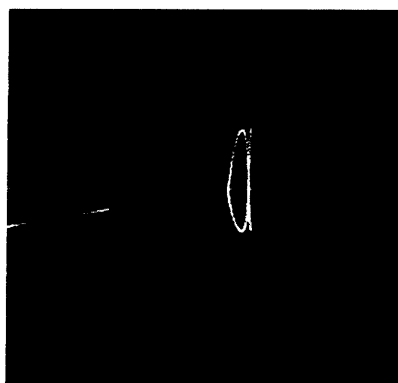


Fig.7

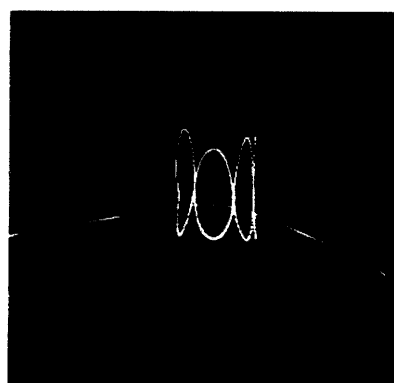


Fig.8

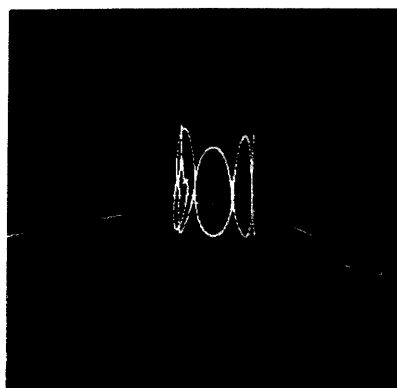


Fig.9

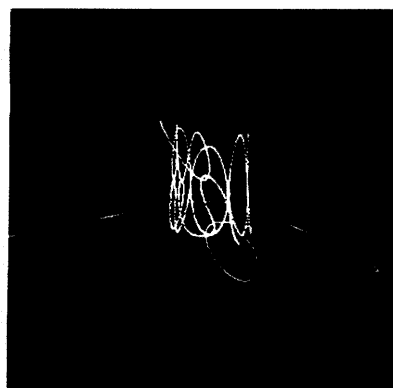


Fig.10

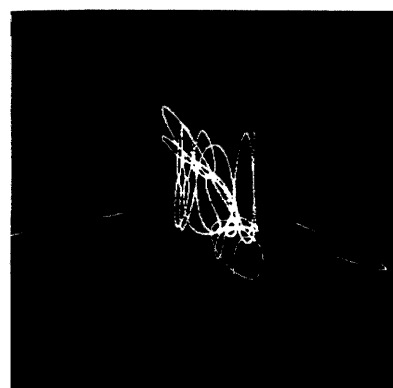


Fig.11

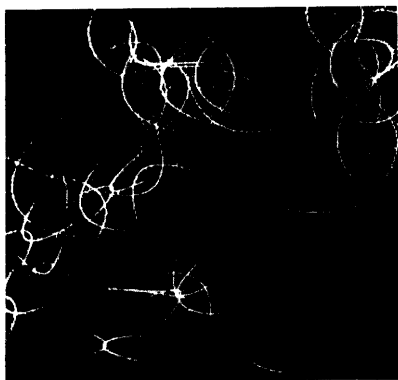


Fig.12

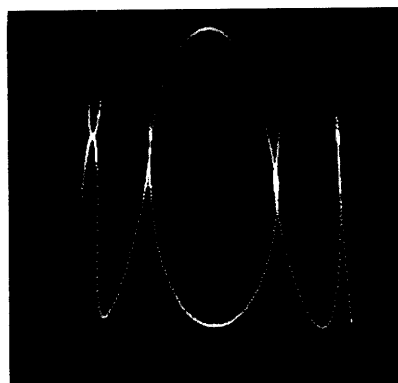


Fig.13

Fig.7 から Fig.11 まではピタゴラス数が (5, 12, 13) の時間の経過とともに 3 体の運動がどう変わったかを示すものである、Fig.12, Fig.13 は一部の拡大図である。

Fig.7 の図にある右の一本の線からその左の閉曲線が形成されるまで 81 sec がかかったが 2 物体の引力と第 3 物体との引力の作用がきいてくるまでにさほどの時間がかかったということであろう。Fig.12, Fig.13 は一部を拡大したものである。白くなっている部分は速度が落ちて、エネルギー的に不安定でいわば微妙な状態を反映している。Fig.14 をみるとかなり周期的運動が存在することがわかる。

ここでは他のピタゴラス数のいくつかの場合の 3 体の運動の様子をしめしたものである。Fig.15 はピタゴラス数 (8, 9, 41)、Fig.16 は (8, 15, 17)、Fig.17 は (7, 24, 25) の場合である。

本題とはそれるが、ピタゴラス数を見いだすには次の要領で行う。3 辺の中の偶数を  $a$  とすれば  $b+c$ 、 $c-b$  も偶数であり  $a = 2\alpha$ 、 $c-b = 2\beta$ 、 $c+b = 2\gamma$  と書けるから ( $\beta$ 、 $\gamma$  は互いに素と選べる)、

$$a = \beta \gamma$$

$\beta$  自身がある数の平方数、 $\gamma$  自身がある数の平方数でなければならないことから

$$\beta = m^2, \quad \gamma = n^2$$

$$\text{よって、} \quad a = 2mn, \quad b = n^2 - m^2, \quad c = n^2 + m^2$$

と表せるから、 $m = 2$ 、 $n = 3$  とおけば  $a = 12$ 、 $b = 5$ 、 $c = 13$  と求められる。

先にふれた特徴について言えば、最大質量の物体から見た他の 2 物体へのベクトルを  $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$  とするなら、 $|\vec{r}_1|$ 、 $|\vec{r}_2|$  がほぼ周期的に変化し、その距離は一部を除けばほぼ一定であるということである。3 体のうちのいずれか 2 つが近距離まで接近し、離れる、の運動が繰り返されるのであるが、そのときその時間が一定であり、2 者間の距離に大きな変化が見られない。Fig.14, Fig.15 を見るとその辺の事情が想像されよう。

この実験では、初速度を 0 にしているが、初速度を変える、あるいは調節することで、一定の周期運動を可能にさせることが考えられる。

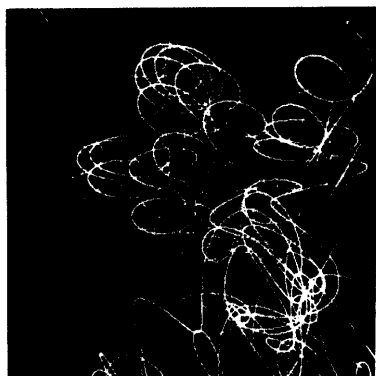


Fig.14

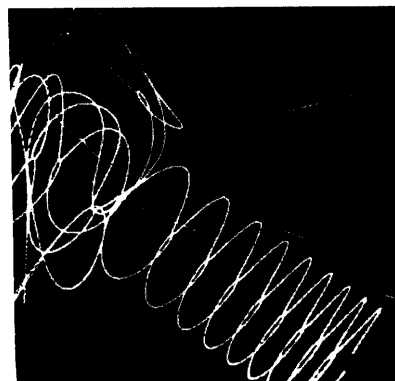


Fig.15

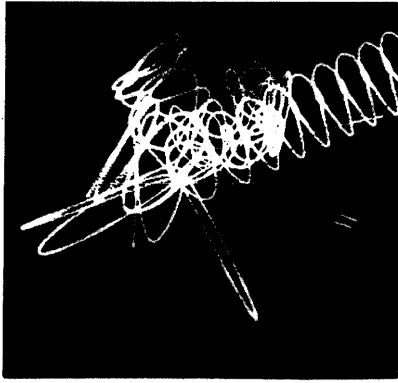


Fig.16

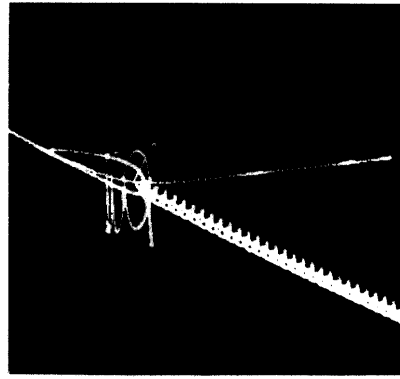


Fig.17

#### 4. 3次元空間における制限3体問題

前稿(文献8)をふくめ、ここまで扱ってきたのは平面内を運動する3体問題であった、この問題の拡張として、2体は平面上で運動し、第3の、質量が無視しうる(第1、第2の物体に比べ、質量が十分小さい)物体は他の2物体が運動する平面上にない場合である。

2次元の場合、potential  $U$  は次の微分方程式で与えられた。

$$\dot{x} - 2\dot{y} - x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \dot{y} + 2\dot{x} - y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (*)$$

$$\text{ここで } U(x, y) = \frac{1-m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}$$

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + U + \frac{m(1-m)}{2}$$

とおけば、方程式(\*)は

$$\dot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

3次元に拡張することで、 $\phi(x, y, z)$  は

$$\dot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (**)$$

$\phi(x)$  は2次元の場合と同じであるが、

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + U + \frac{m(1-m)}{2}$$

$$\text{ここで } U = \frac{1-m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}$$

$$\text{において、 } \rho_1 = \sqrt{(x+m)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x+m-1)^2 + y^2 + z^2}$$

一番単純な場合として、第3の物体がz軸に沿って運動するとき、

方程式(\*\*)は任意の時刻tに対し

$$x(t) = 0 \quad y(t) = 0$$

$$\frac{\partial \phi(0, 0, z)}{\partial x} = 0$$

$$\text{従って、} \frac{\partial \phi(0, 0, z)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \phi(0, 0, z)}{\partial z} = \ddot{z}$$

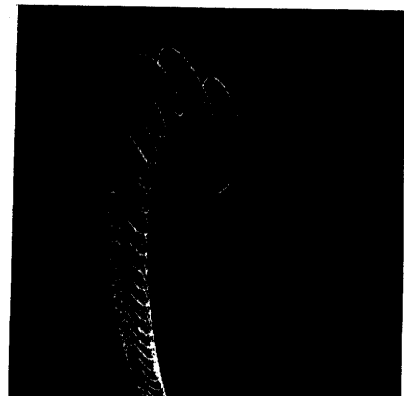
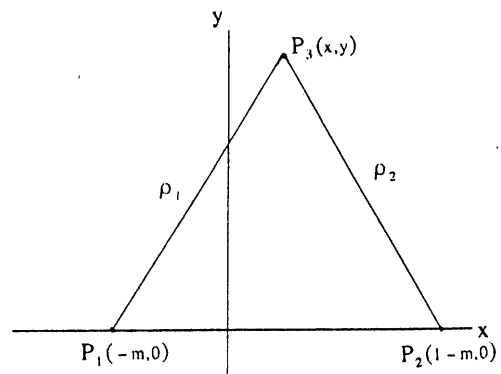


Fig.18





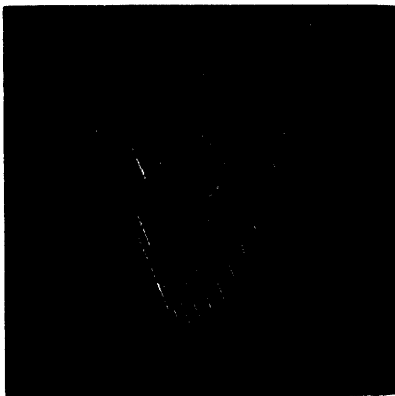


Fig.19

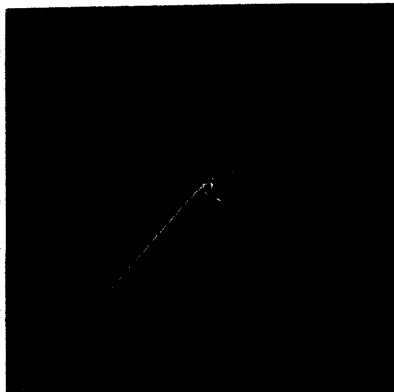


Fig.20

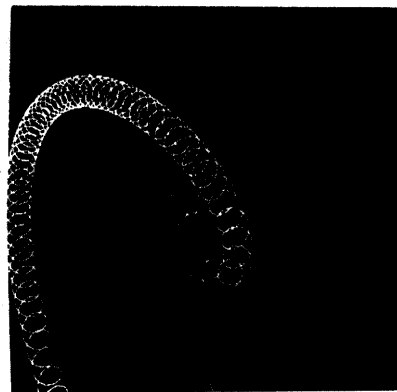


Fig.21

はじめの2式から、

$$\rho_1(0, 0, z) = \rho_2(0, 0, z) = 0$$

となるから、平面上を運動する2物体の質量は同じでなければならず、したがって重心座標は原点にくる。

この小論では、平面上を運動する2物体にy軸方向の初速度を与え、また質量は異なる場合を2, 3実験してみた。Fig.18はz軸上点(0, 0, 9)で運動させた場合、Fig.19は点(0, 0, 8)から得られた図である。平面上の2点は(-0.8, 0, 0)、(2.8, 0, 0)におかれ、初速(0, -0.38, 0)、(0, 0.405, 0)を与えた。当然第3の物体は質量=0である。このかなり単純な条件で運動させた場合から予測できることは質量が最大の物体を除いた2物体が相互作用を通して安定な2体運動を形成すると思われる。Fig.20、Fig.21は第3の物体に-0.4の速度を与え、それぞれ点(0, 0, 9)、(0, 0, 8)で運動させた場合である。

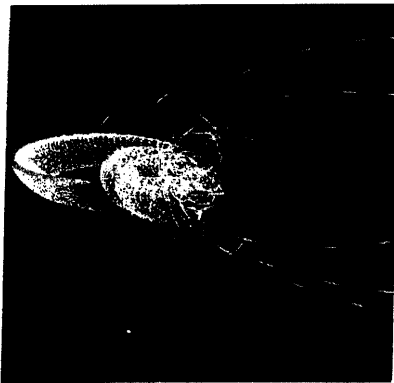


Fig.22

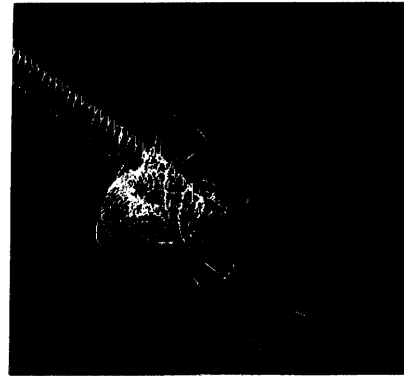


Fig.23

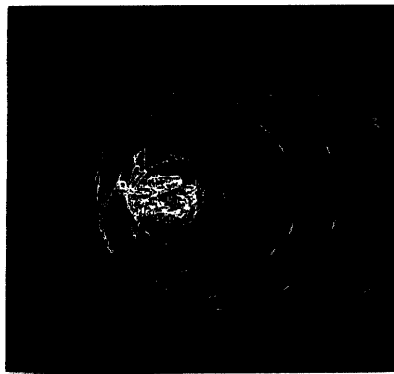


Fig.24

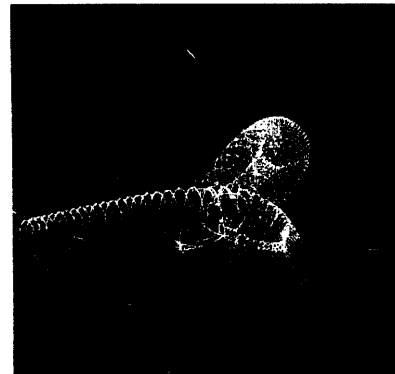


Fig.25

## 5、まとめと若干の補足

著者の関心は、3体問題において、カオスがどう生成されるか、初期条件（物体の位置、初速度、質量の微小変化等によってカオスが生ずるシステムにある。前稿で取り上げた例で初期条件の違いを見る。

**Fig.22** から **25** は、質量0の第3の物体の  $t=0$  の位置を  $(-0.1, 0.6, 0)$ ,  $(-0.1, 0.7, 0)$ ,  $(-0.1, 0.8, 0)$ ,  $(-0.1, 0.9, 0)$  の4つについてplotしたものである。こうした問題意識から、小論での課題は主に2つあり、1つはピタゴラス数による3体問題の衝突であり、そのとき、万有引力という長距離力を有する力学の問題がカオス派生とどうむすびつくかという問題である。最大質量の物体と相互作用する他の2物体の関係がさらに検討する必要があると思われる。パソコンで軌道を描かせる範囲で、実測できることは、2物体それぞれと最大質量の物体間の距離がほぼ一定で規則的に変化することで、正確にその辺の事情をみるためには、第1と最大質量間の、また第2の物体と最大質量との距離が時間的にどう変わるかを見るためのプログラムが必要であるが、今回は間に合わなかったので次回にゆずりたい。

第2の課題は平面内の3体運動を3次元の運動に拡張した場合にどのようなカオスが現れるかというものでしたが、3体が平面内を運動する場合よりはるかに初期条件を設定することが困難で、第4の項でふれた同質量の場合に、安定的な軌道を生む初期値を見いだせなかった。 $t=0$ での位置、速度、質量計9個のパラメーターを含む組み合わせで有り、容易ではないがその中で、安定的軌道と不安定的な軌道がどう作用しあっているのか、次回の検討課題としたい。

## 参 考 文 献

- 1) Marion Thornton : Classical dynamics and systems ('95)International Edition
- 2) T.Kibble and F.Birkshire:Classical mechanics ('96) Addison Wesley Longman
- 3) D.Boccaletti : Theory of Orbits ('96) Springer
- 4) J.H.Hubbard : Differential Equations :A dynamical System Approach ('95) Springer -Verlag
- 5) David Acheson : From Caluculus to Chaos ('97)Oxford Univ. Press
- 6) 解析力学講義：齊藤利弥 日本評論社
- 7) 古典力学：伏見康治 岩波書店
- 8) H.Odawara : Chaos generated by restricted three-body problem/The Annual Report of the Kyoritsu College of PharmacyNo.43