

Title	制限3体問題から生成されるカオス
Sub Title	Chaos generated by restricted three-body problem
Author	小田原, 宏行(Odawara, Hiroyuki)
Publisher	共立薬科大学
Publication year	1998
Jtitle	共立薬科大学研究年報 (The annual report of the Kyoritsu College of Pharmacy). No.43 (1998.) ,p.37- 46
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00062898-00000043-0037

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

制限3体問題から生成されるカオス

小田原 宏行

Chaos generated by restricted three-body problem

Hiroyuki ODAWARA

Restricted three-body problem deals with three bodies P_1 , P_2 and Q with masses m_1 , m_2 , and m_3 respectively, under the action of the Newton Gravitational Law.

To make the problem more feasible, we consider the case when the mass of one particle is negligible with respect to the others. If $m_3=0$ then P_1 , P_2 are not influenced by Q and they move according to the solutions of a two-body problem. The so-called three-body problem has an 18-dimensional state space. Although there is no exact formula of this type, one can use computational methods to approximate the solution of the differential equations resulting from Newton's laws of motion. Our aim is study the motion of Q under the attraction of the two bodies. We can see several trajectories, regular and irregular types and chaos type.

1. はじめに

2体問題の相互作用ではうまくいくが、3体問題になると予想を越えて解けない。2物体の相互作用は、具体的には系は太陽と惑星だけで構成されているとみなして周期運動が導かれる。Fig. 1は、3体問題における第3の物体(その質量は第1, 第2のものに比べ無視しうるとする)が等しい質量をもつ2つの固定した惑星のまわりの軌道を回っているものであるが、その複雑さは見られるとうりである。ここでは、第3の物体は第1, 第2の物体に何等の影響を与えないが、それ自身は第1, 第2の物体によって運動が決定されるのである。この小論で扱ったのは2次元の運動であり、問題は衝突から生じる。

1767年, Euler が任意の質量をもつ3つの物体が直線上に並んだとき AB/BC の比がある一定の値をもてば,

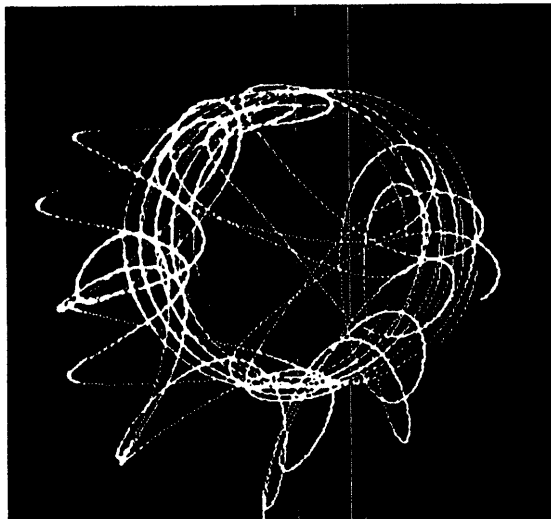


Fig 1

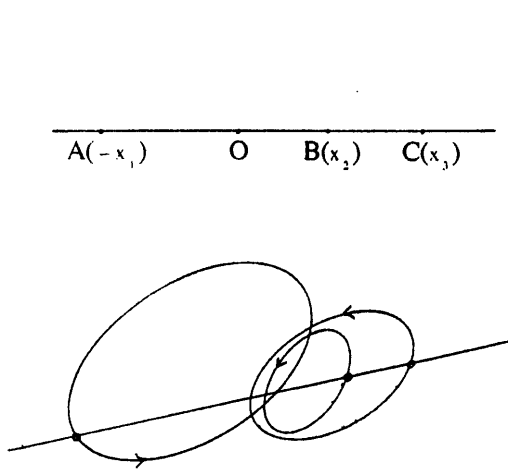


Fig. 2

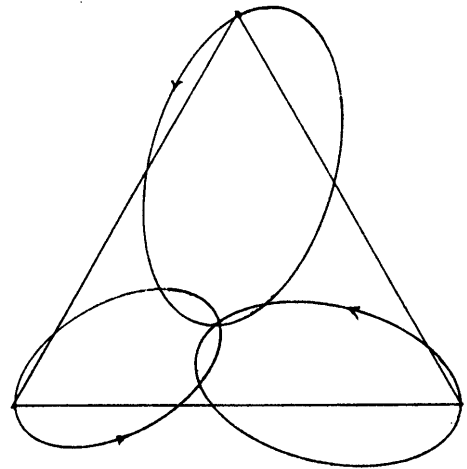


Fig. 3

適当な初期条件を与えることで周期運動を行うことを示した(Fig 2)。

1729年には、Lagrange が3体問題において、2つの重要な解を発見した。時刻 $t=0$ で、3つの物体が正3角形の頂点にあり、適当な初速度を与えると、これらの物体は周期的な楕円軌道を描くというものであり、時間の経過とともに、正3角形の大きさ、向きは変化するが、正3角形という性質は保存されるのである。これらについては2の項、3体問題で扱う。

この小論で使われる力学の用語について、若干説明しておこう。

ポテンシャルが与えられれば記述すべき系の各点に及ぼされる1組の力が計算できる。各点でのポテンシャルの空間座標 q による微分は、この点に及ぼす力を表わす。Newtonの運動法則は力ではなくポテンシャル関数を用いて定式化できる。この手法は19CにHamiltonian (ハミルトン関数) が導入されることで一般化されたが、この関数は系の位置エネルギーと運動エネルギーの和に他ならない。通常、座標と運動量、 q_i, p_i 、いわゆる正準変数で記述され、

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

を正準方程式という。 H がHamiltonianである。

2. 2体問題

Newtonの方法は、太陽に比べて、惑星の質量が小さく、惑星同士の間に関与する力は惑星と太陽の間の引力に比べてきわめて小さいことに注目し、惑星と太陽だけからなる系を考え、それ以外の相互作用を無視することであった。簡単に2体問題の処理をまとめておこう。

太陽を T 、惑星を W で表すことにし、質量を M, m 、座標を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ とし、万有引力定数を k とすれば、運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= \frac{kMm(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} & m\ddot{x}_2 &= \frac{kMm(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} \\ M\ddot{y}_1 &= \frac{kMm(y_2 - y_1)}{r_{12}^3} & m\ddot{y}_2 &= \frac{kMm(y_1 - y_2)}{r_{12}^3} \\ M\ddot{z}_1 &= \frac{kMm(z_2 - z_1)}{r_{12}^3} & m\ddot{z}_2 &= \frac{kMm(z_1 - z_2)}{r_{12}^3} \end{aligned}$$

ここで、 $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ である。

T と W の重心座標を (x_g, y_g, z_g) とすれば、 $\ddot{x}_g = \ddot{y}_g = \ddot{z}_g = 0$ だから、 T と W の重心が等速直線運動している。重心と一緒に等速直線運動している座標系で考えることにし、 T, W のそれぞれの座標を $(X, Y, Z), (x,$

y, z) とすれば

$$(X, Y, Z) = (x_1 - x_g, y_1 - y_g, z_1 - z_g)$$

$$(x, y, z) = (x_2 - x_g, y_2 - y_g, z_2 - z_g)$$

であり, 簡単な計算によって

$$m\ddot{x} = -\frac{kM^3m}{(M+m)^2} \frac{x}{r^3}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{kM^3m}{(M+m)^2} \frac{y}{r^3}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{kM^3m}{(M+m)^2} \frac{z}{r^3}$$

$$\frac{km^3}{(M+m)^2} = \alpha \quad \text{とおけば,}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\alpha y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\alpha z}{r^3} \quad \text{を得るから,}$$

W に働く力は重心からの中心力と同じであることがわかる。この場合, 運動は平面上で起きるから, xy 平面上で運動が生じるように座標を選べば, $z = 0$ と置いてよい。

すなわち,

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\alpha y}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

これは, 質量 1 の質点に, ポテンシャル $-\alpha/r$ の保存力が作用している場合の運動方程式と同じだから, 系の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{\alpha}{r} \quad \text{で, 極座標による正準変換を行うと}$$

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \frac{\alpha}{r}$$

を得るが, θ は循環座標であり, 積分できるから

$$p_\theta = h$$

とおける。正準変換より微分方程式 $r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r$, $p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2}$ を得る。

積分曲面 $H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{h^2}{r^2}) - \frac{\alpha}{r} = E$ を考え, $\frac{1}{r} = u$ を用いて, この式を次のように変形する。

$$(hu - \frac{\alpha}{h})^2 + p_r^2 = 2E + \frac{\alpha^2}{h^2}$$

さらに, パラメーター φ を用いて

$$hu - \frac{\alpha}{h} = \sqrt{2E + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cos \varphi, \quad p_r = \sqrt{2E + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cos \varphi$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{h^2} + \frac{1}{h} \sqrt{2E + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cos \varphi \quad \text{を } t \text{ で微分したものから}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad \text{を得る。} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad \text{であったから, } \varphi = \theta \quad \text{と置いても一般性を失わない。従って}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{h^2} + \frac{1}{h} \sqrt{2E + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cdot \cos \theta}$$

ここで, $l = \frac{h^2}{\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\alpha^2}}$ と置けば,

$$r = \frac{l}{1 \pm e \cos \theta}$$

これは、原点に焦点をもつ円錐曲線の方程式で、 $e < 1$ なら楕円、 $e = 1$ なら放物線 $e > 1$ なら双曲線を表す。

3. 3 体問題

3つの質点 P_1, P_2, P_3 が互いに万有引力で引き合っているとしよう。 P_k ($k = 1, 2, 3$) の質量を m_k 、その座標を (x_k, y_k, z_k) とすれば 2 体問題の場合と同様、次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \frac{km_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{km_1 m_3 (x_3 - x_1)}{r_{13}^3} \\ m_1 \ddot{y}_1 &= \frac{km_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r_{12}^3} + \frac{km_1 m_3 (y_3 - y_1)}{r_{13}^3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= \frac{km_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r_{12}^3} + \frac{km_1 m_3 (z_3 - z_1)}{r_{13}^3} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= \frac{km_2 m_1 (x_2 - w_1)}{r_{12}^3} + \frac{km_2 m_3 (x_3 - z_2)}{r_{23}^3} \quad (m_2 \ddot{y}_2, m_2 \ddot{z}_2 \text{ についても同様}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = \frac{km_3 m_1 (x_1 - w_3)}{r_{13}^3} + \frac{km_3 m_2 (x_2 - z_3)}{r_{23}^3} \quad (m_3 \ddot{y}_3, m_3 \ddot{z}_3 \text{ についても同様}) \quad (3)$$

ここで、 $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$

$$U = -\frac{km_1 m_2}{r_{12}} - \frac{km_2 m_3}{r_{23}} - \frac{km_1 m_3}{r_{13}}$$

とおけば、外力はポテンシャル U の保存力である。

通常、制限 3 体問題において、 P_1, P_2, P_3 は太陽、惑星、人工衛星(小惑星)を考える。 m_3 は m_1, m_2 に比べて十分小さいので近似として、

$$m_3 = 0$$

と選ぶ。方程式(1)、(2)は P_1, P_2 に関する 2 体問題となるから x_1, x_2, y_1, y_2 などは、 t の関数として決まる。

(3) 式を m_3 で割ると

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{km(x_1 - x_3)}{r_{12}^3} + \frac{km_2(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} \\ y_3 &= \frac{km(y_1 - y_3)}{r_{12}^3} + \frac{km_2(y_2 - y_3)}{r_{23}^3} \\ z_3 &= \frac{km(z_1 - z_3)}{r_{12}^3} + \frac{km_2(z_2 - z_3)}{r_{23}^3} \end{aligned} \quad (3)'$$

を得るが、右辺に現れる $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ は 2 体問題の処理から得られる t の関数であり、これらを(3)'の右辺に代入して x_3, y_3, z_3 を解くのである。

$m_2 = m, m_1 = 1 - m$ ($m_1 + m_2 = 1$) のように選び P_1 の座標を $(-m, 0)$ 、 P_2 の座標を $(1 - m, 0)$ 、また第 3 の質点の座標を (x, y) とする (Fig 4)。

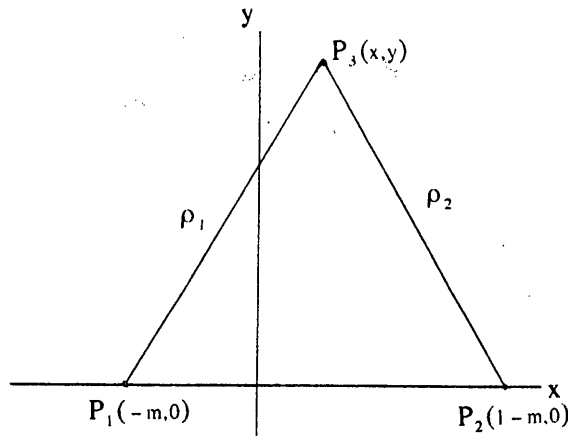


Fig 4

$$\rho_1 = P_1 P_3 = \sqrt{(x+m)^2 + y^2}$$

$$\rho_2 = P_2 P_3 = \sqrt{(x+m-1)^2 + y^2}$$

ポテンシャル $U(x, y)$ を

$$U(x, y) = \frac{1-m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

微分方程式(4)の平衡点(特異点)を求めるには $\dot{x} = \dot{y} = 0$ において

$$-x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad -y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

それぞれ右辺の微分を実行すると

$$\begin{aligned} -x &= -\frac{(x+m)}{\rho_1^3} - \frac{(1+m-1)}{\rho_2^3} \\ -y &= -\frac{y(1-m)}{\rho_1^3} - \frac{my}{\rho_2^3} \end{aligned} \quad (5)$$

(5)の2番目の式より

$$y = 0 \quad (6)$$

$$\text{or } y = a(1-m) + bm \quad \left(a = \frac{1}{\rho_1^3}, b = \frac{1}{\rho_2^3} \right) \quad (7)$$

(5)の x に関する方程式と(6)式 $y = 0$ より

(5)の右辺の x の関数を次の3つの範囲で考える。

$$x = \frac{(x+m)(1-m)}{|x-m|} + \frac{m(x+m-1)}{|x+m-1|}$$

$$x < -m \quad f_1(x) = -\frac{(1-m)}{(x+m)^2} - \frac{m}{(x+m-1)^2} \quad (9)$$

$$-m < x < 1-m \quad f_2(x) = 1 - m(x+m)^2 - \frac{m}{(x+m-1)^2} \quad (9)'$$

$$1-m < x \quad f_3(x) = \frac{1-m}{(x+m)^2} + \frac{m}{(x+m-1)^2} \quad (9)''$$

各3つの区間で $f_i(x) = x$ ($i = 1, 2, 3$) は一つの実数解をもつ。例えば

(9)の場合

$$x < -m \quad f_1(x) = -\frac{(1-m)}{(x+m)^2} - \frac{m}{(x+m-1)^2}$$

$$f_1'(x) = -\frac{2(1-m)}{(x+m)^3} - \frac{m}{(x+m-1)^3} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -m} f_1(x) = -\infty$$

これらの式の内容をグラフで示すと Fig 5 のようになる。

(9)', (9)'' の場合も同様である。ここから得られた3つの解が直線解である。

(5), (7)は a, b を用いると

$$x = a(x+m)(1-m) + bm(x+m-1)$$

$$1 = a(1-m) + bm$$

この2式より $a = b = 1$ すなわち

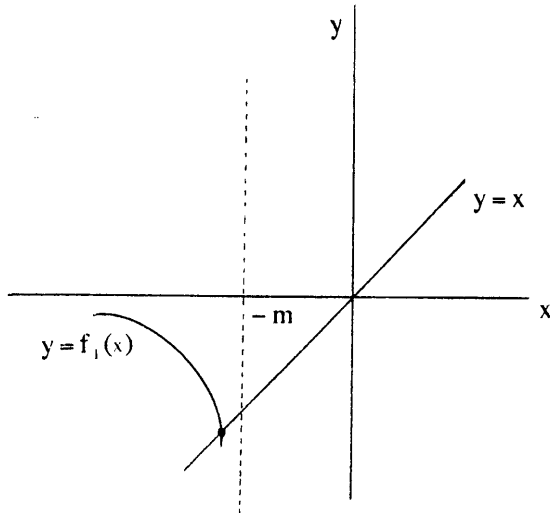


Fig. 5

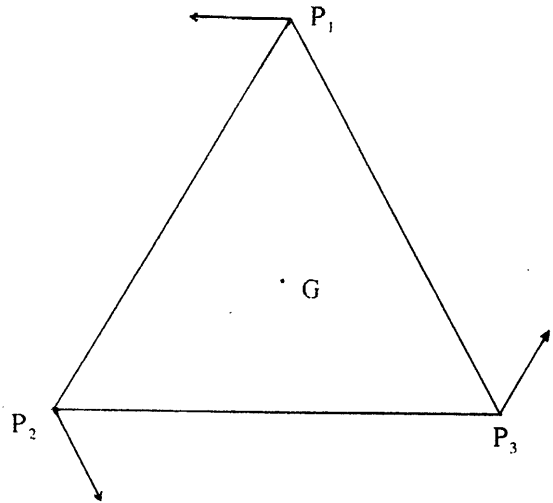


Fig. 6

P_3 の x 座標は $x = -m + 1/2$ であり P_3 は P_1, P_2 の垂直 2 等分線上にありであるから 3 角形 P_1, P_2, P_3 は正 3 角形である。これが制限 3 体問題の正 3 角形解である。

パソコンで 3 体軌道運動の様子を見てみよう。

[1] 正 3 角形解の場合 (Fig.6)

m_1 に対する運動方程式は、角速度を ω , 3 角形の一辺を a とすれば

$$m_1 \overline{P_1 G} \omega^2 = \frac{m_1 m_2}{a^2} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{m_1 m_3}{a^2} \cos \frac{\pi}{6}$$

G は重心だから、 $m_1 \overline{P_1 G} = m_2 a \cos \frac{\pi}{6} - \overline{P_1 G} + m_3 (a \cos \frac{\pi}{6} - \overline{P_1 G})$

この 2 式より

$$m_1 + m_2 + m_3 = a^3 \omega^2$$

Fig.7 は $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 1/2$ の場合である。時間の経過

とともに P_1, P_2, P_3 を結ぶと 3 角形は正 3 角形であることが見られるであろう。

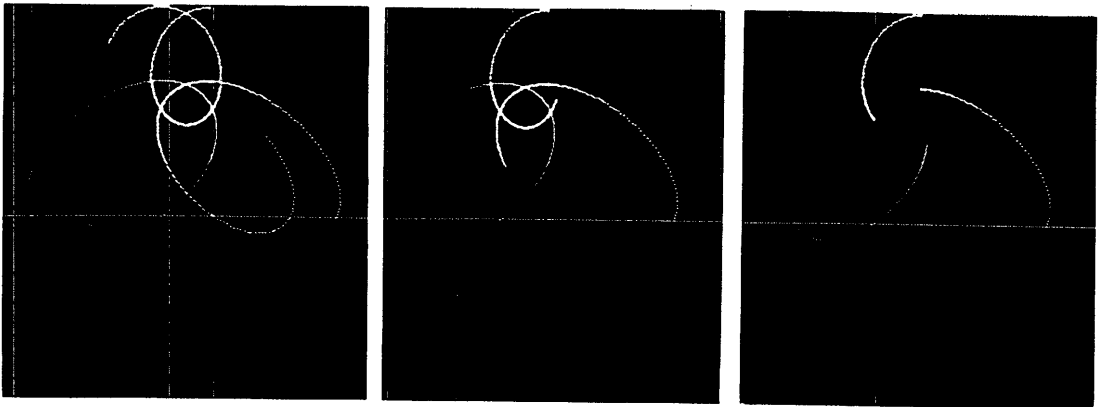


Fig. 7

[2] 直線解の場合 (Fig. 8), 重力定数 = 1 として

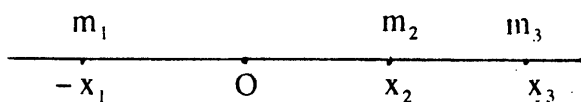


Fig. 8

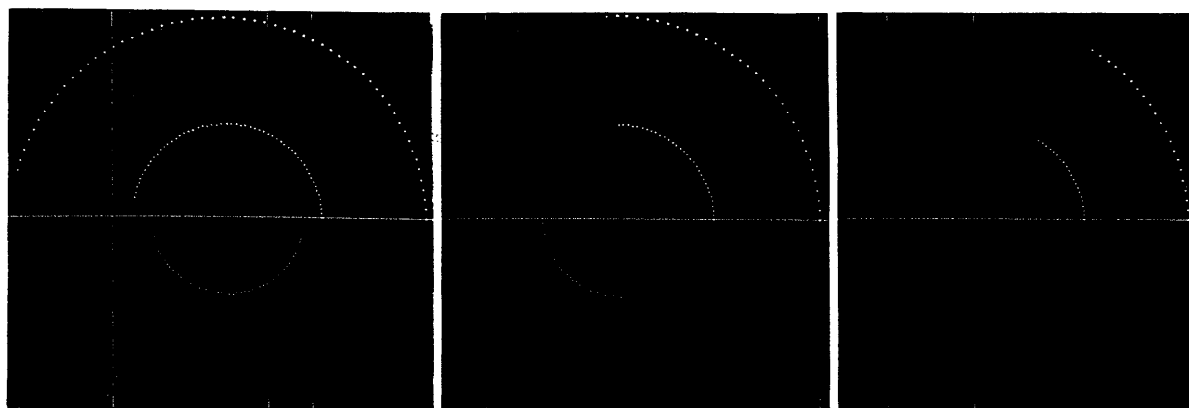


Fig. 9

$$m_1 \text{ に対する運動方程式は } m_1 x_1 \omega^2 = \frac{m_1 m_2}{(x_2 + x_1)^2} - \frac{m_1 m_3}{(x_3 + x_1)^2}$$

$$\text{に対する運動方程式は } m_2 x_2 \omega^2 = \frac{m_2 m_1}{(x_2 + x_1)^2} - \frac{m_2 m_3}{(x_3 + x_2)^2}$$

さらに, $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$ が成り立つ。

$P_1 P_2 / P_2 P_3 = \beta$ とおいて x_1, x_2, x_3 を消去し, β, m_1, m_2, m_3 の関係を求めると

$$m_1 \{(\beta + 1)^3 - \beta^3\} + m_2 (\beta + 1)^2 (1 - \beta^3) + m_3 \{1 - (\beta + 1)^3\} = 0$$

Fig. 9 は $m_1 = \frac{5}{2}, m_2 = m_3 = \frac{1}{2}$ の場合である。時間が経過しても P_1, P_2, P_3 を結ぶと共線であることがうかがえるであろう。

4. 準周期的運動とカオス

パソコン上の 3 体問題の実験では, 第 1, 第 2 の物体は時刻 $t = 0$ で x 軸上に有るとし, 質量 m_1, m_2 に対し $t = 0$ での位置を $(-m_2, 0), (m_1, 0)$ とします。

Fig. 10 は地球と月の系にほぼ近い $m_1 = 1/82, m_2 = 81/82$ の場合で, 第 2 の物体はほとんど動かず, 第 1 の方は m_2 の回り, ほぼ半径 1 の円運動を行う。第 3 の物体が楕円軌道を描きながら, 図で軌道が上の方へずれていくのは, 第 1 の物体と接近するとき, 引力で軌道が乱され, 周期的運動がそこなわれるためである。類似しているが Fig. 11 は第 1 の質量が $3/100$, 第 2 の質量が $97/100$ の場合である。第 1 の物体は Fig. 10 の場合と同様半径が 1 に近い円運動を行うがその内側にやや強く白い線が現われているが, これも第 3 の物体が周期的に第 1 の物体に接近するとき一定の軌道修正をうけるためである。

Fig. 12 は $m_1 = m_2 = 0.5$ の場合であり, 第 1 の物体の最初の位置は $(-0.5, 0)$ であり, 第 2 のそれは $(0.5, 0)$ である。第 3 の物体は点 $(-1, 0)$ から初速度 $(0, 0.0505)$ で運動させたものである。第 1 の物体は初速度 $(0, -0.3)$, 第 2 の方は $(0, 0.3)$ である。質量ゼロの第 3 の物体の軌道は, 垂直上向きに動きだすが, すぐ第 1 の物体による引力で軌道は下向きに変わり, 第 4 象限に移り, その後, 再び第 1, あるいは第 2 の物体による引力で原点方向に引きもどされ, 第 1 象限に入り, また原点方向に向かい, 第 3 象限へ, そして元の位置に近い点にもどり同じ運動を繰り返す。完全な周期運動があるのか, あるいは完全に近いといえる運動があるかは不明で

ある。第3の物体の初速度をいろいろ変えて実験してみたが、良い結果はでなかった。Fig. 13は第3の初速度を小さくした場合のもであり、Fig. 14は m_1, m_2 の質量を1/100前後変えた場合である。

最後に、非周期的な場合をみよう。

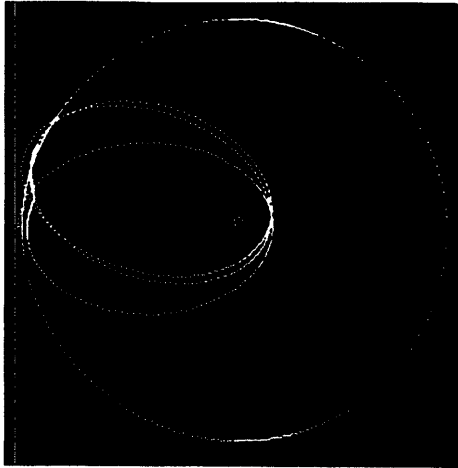


Fig.10

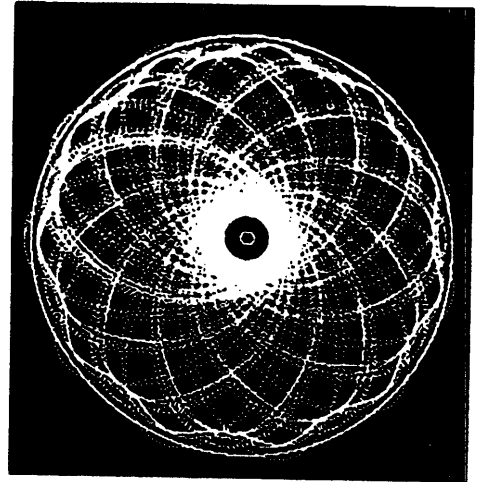


Fig.11

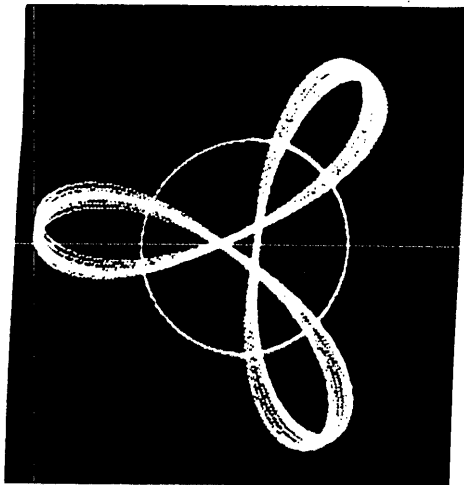


Fig. 12

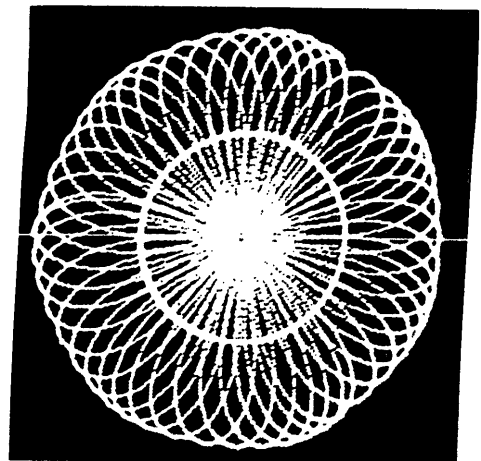


Fig. 13

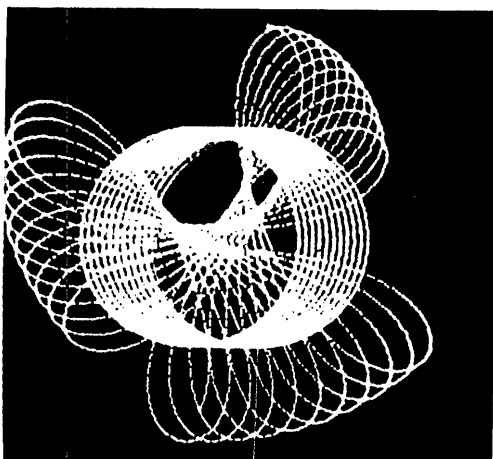


Fig. 14

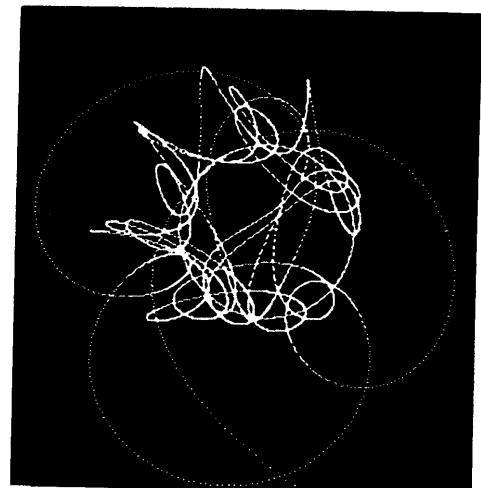


Fig. 15

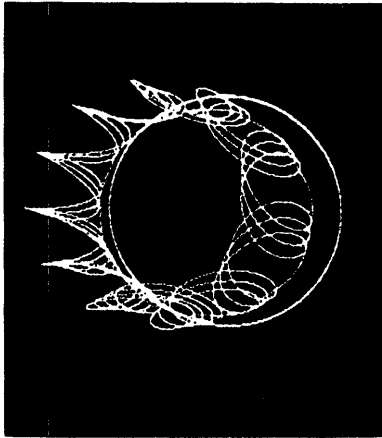


Fig. 16

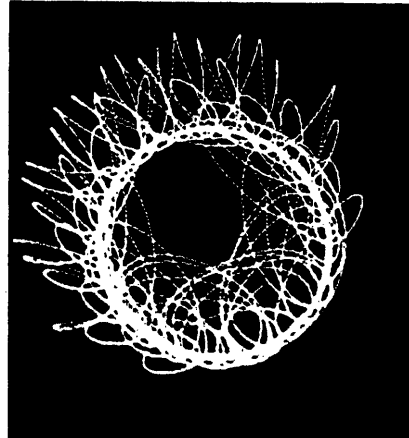


Fig. 17

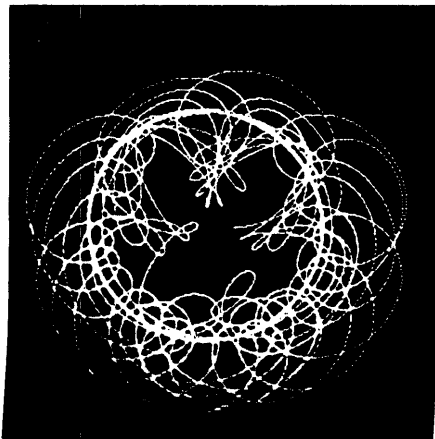


Fig. 18

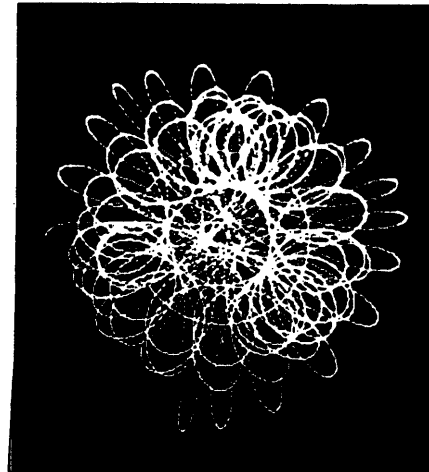


Fig. 19

物体 1, 2 は $(-0.5, 0)$, $(0.5, 0)$ から出発するものであるが (Fig. 15 ~ 18), 第 3 の物体の初速度の違いが図の違いとなっている。Fig. 15 は第 1 の物体によって、第 3 の物体がごく近くまで接近したため、エネルギーバランスを失い第 3 の物体が大きく散乱されて準周期的軌道からはずれたものである。Fig. 16 のように安定とはいえないが一定の周期性を保っているが、初期条件を少し変えることで、周期的傾向は大きく崩れる。不安定性は引力がバランスがとれているとき、小さな乱れに対して敏感になるということである。

Fig. 19, 20 は Fig. 16, 17 にあるような外側にとがった軌道をもたず、徐々に内側に入り込んでくる場合であるが、カオスの様相がでてきている。

1. 結びに代えて

ここで制限 3 体問題をとりあげたのは、万有引力がよく知られた力であるということ、解析的に解くことが困難な方程式を扱うよりパソコンで軌道を調べる方がやさしいというのが、その理由である。実際試すと圧倒的に第 3 の物体が不安定であり、いくつか示した図からも想像されるように、有限領域に軌道が収まることは決して多くはない。計算は Runge-Kutta 法によるが、時間の刻みからくるエラーによる軌道の発散もあると思われる。素材は力学であるが、この問題は系のある安定状態から、不安定状態への分岐の問題であり、最終的に微分方程式の問題に帰着される。

第 3 の物体からみると、外部が作る回転重力場の中に安定な周期運動が可能かということ、さらに、この議論をすすめるためには特異点の回りで解が安定かどうかのチェックが必要であり、安定軌道を見いだすために

No. 43 (1998)

は、打1, 第2の物体を固定し, 例えば m_1, m_2 の値を一定にした上で, 第3の物体の初速度, 初期位置, 質量を変えるなどの試みが必要であろう。

参 考 文 献

- 1) Marion Thornton :Classical dynamics of particles and systems ('95) International Edition
- 2) D.Boccaletti, G.Puccaco :Theory of Orbits ('96) Springer
- 3) 斉藤利弥 :解析力学('91) 日本評論社
- 4) J. H. Hubbard :Differential Equations:A dynamical System Approach ('95) Springer-Verlag
- 5) David Acheson : From Calculus to Chaos ('97) Oxford University Press