慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	強制振動系によるカオス
Sub Title	Chaos by forced oscillations system
Author	小田原, 宏行(Odawara, Hiroyuki)
Publisher	共立薬科大学
Publication year	1992
Jtitle	共立薬科大学研究年報 (The annual report of the Kyoritsu College of Pharmacy). No.37 (1992.) ,p.37- 47
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	原報
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00062898-00000037-0037

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

共立薬科大学
Ann, Rept. Kyoritsu
Coll. Phrm.

強制振動系によるカオス

小田原宏行

Chaos by Forced Oscillations System

Hiroyuki ODAWARA

Typical systems of nonlinear ordinary differential equations possess general time dependent solutions that are not expressible in terms of familiar functions. So when difference equations are solved numerically as approximatins to ordinary differential equations, chaotic behavior sometimes occurs.

Systems exhibiting computational chaos can serve as illustrative example in more studies of noninvertible mappings.

In this paper, a simple pendulum system driven by a periodic force and a simple harmonic motion subject to a periodic impuls are considered, for differential equations of these motions are important and applicable for various dynamical systems.

Results are interpreted by the existence of a single homoclinic (heteroclinic) point. That is, such homoclinic point forces the existence of an infinity of such points. Moreover, it also gives rise to a homoclinic (heteroclinic) tangle. This tangle is the geometric source of chaotic motions.

A condition of emergence of a chaos is also derived by Mel'nikov's method. And the results are compared with a bifurcation diagram.

1. はじめに

2階の非線型微分方程式から発生するカオスについては，Duffing 方程式や van der Pol の方程式がよく調べられているが，この小論では，強制的な外力の作用を受けた単振り子系，そして，調和振動子の系にパルス型外力を与えた場合を取り上げる。その大きな理由としては，これらの微分方程式が，振り子系にとどまらず，電気回路系，電磁気的学に現われる系で同じタイプの方程式で記述されるものが少くないからである。

減衰を伴う単振り子の系に外力 f（θ, t）を作用させた場合，運動方程式は

$$ML\frac{d^2\theta}{dt^2}+\beta\frac{d\theta}{dt}+Mg\sin\theta=f(\theta,t)$$

で与えられる。M（振り子の質量），L（糸の長さ），g（重力加速度）を適当に選べば，上式は

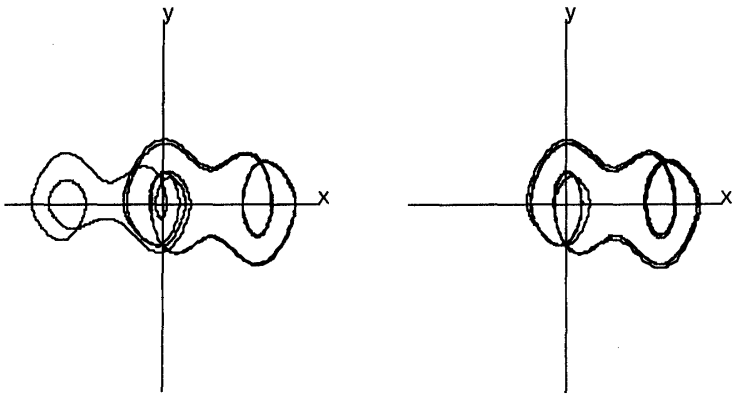
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\gamma\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta=F(\theta,t)\cdots\cdots\cdots(1)$$

と書ける。ここで

$$\theta=x,\ \frac{d\theta}{dt}=y$$

と置くことにより式(1)は

$$\frac{dx}{dt}=y$$
$$\frac{dy}{dt}=-\gamma y-\sin x+A\cos\omega t\cdots\cdots\cdots(2)$$



(x,y) = (0.916, 0.750)　　(x,y) = (0.999, 0.900)

Fig.1

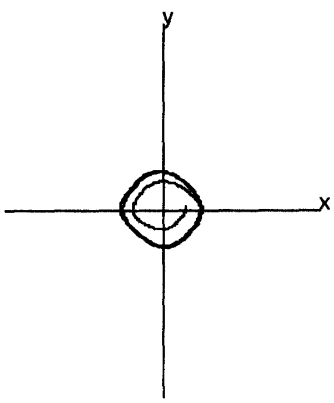
のように連立の1階の微分方程式に帰着させることができる。ここでは F (x, t) = A cos ωt の場合を考える。A は時間 t に依存しない定数である。

2. A依存性と系のふるまい

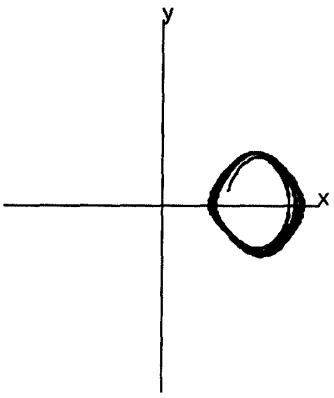
Fig 1 は，$\gamma = 0.5$, $\omega = 0.667$ として，初期条件を少しずらせた場合による位相図である。初期条件の小さい違いが，軌道の大きなズレとなっていることがわかる。A の値を変えていったときの位相図が fig 2 に示されている。近以は Runge-kutta 法による。A の値が 1 より小さいところから，1.5 近くに選んだ理由はこうである。例えば，次の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dx} = -\gamma y - \sin x + A$$

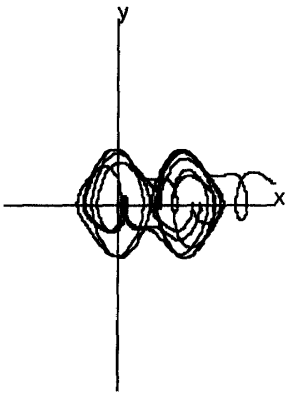
の平衡点は A = 1 で $(\frac{\pi}{2}, 0)$ となるからである。つまり，大きさ1の一定トルクが $\theta = \pi/2$ に保つのに十分だからである。(2)式で 0.9 から，1.6 まで，A を変えたときの特徴的な 7 つの A の値に対する位相図である。A が 0.9～1.06 あたりでは，(a) に代表されるものである。1.08～1.1 では (b) のようなカオス的状態が現われる。1.2～1.49 あたりでは，一定の周期性をもつものは，得られず，(c) のタイプに代表される。ある点で突然，それまでの軌道周辺からはずれるのである。1.497～1.55 では A = 1.5 あたりでは，特定の振動数をもつ解の重なりで運動は複雑であり，より精確に調べる必要がある。つまり A のわずかな変化によりカオス的なものと周期的なものが存在する．A = 1.53 で (f) のタイプが現われ，A > 1.58 あたりから周期的なものへ変わる (g)。ここで述べたことを概括すれば強制振動が小さい間は，強制振動の角振動数と同じ周期運動を行うが，A が大きくなるにつれて，長い周期をもつ運動が加わるため，与えられた ω とは異なる値の角振動数が現われる，これが分岐といわれるものである。ここでは，現象的にいくつかの特徴について触れたが，系のふるまいを示す分岐図と対比するとはっきりする。Fig 3 の分岐図は $x_{n+1} = Mx_n(1 - x_n)$ を M = 2.8 から 4 までとったものである。横軸が M，たて軸が x_n を与える。この写像はカオスが倍周期を経て生ずるという特徴をもつ。A (M ≅ 2.9) で 2 周期に分岐，B (M = 3.5) で 4 周期に，C (M = 3.74) で 5 周期，D (M ≅ 3.83) で 3 周期，E (M ≅ 4.0) では完全なカオス領域となる。Fig 3 (b) は M = 3.83 周辺を拡大したものであり，



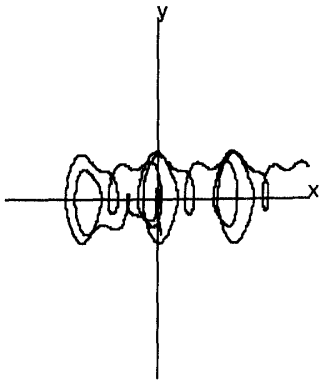
(a) A = 0.91



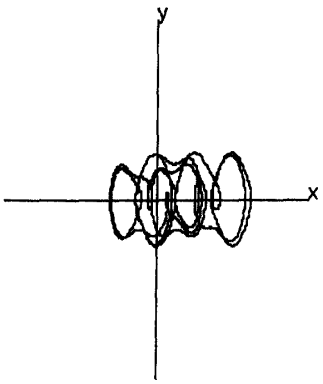
(b) A = 1.08



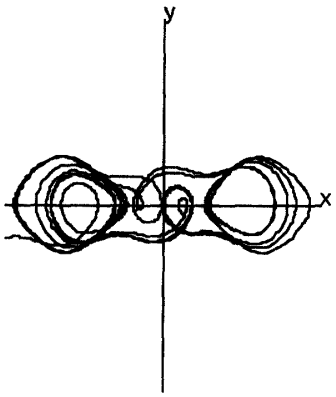
(c) A = 1.2



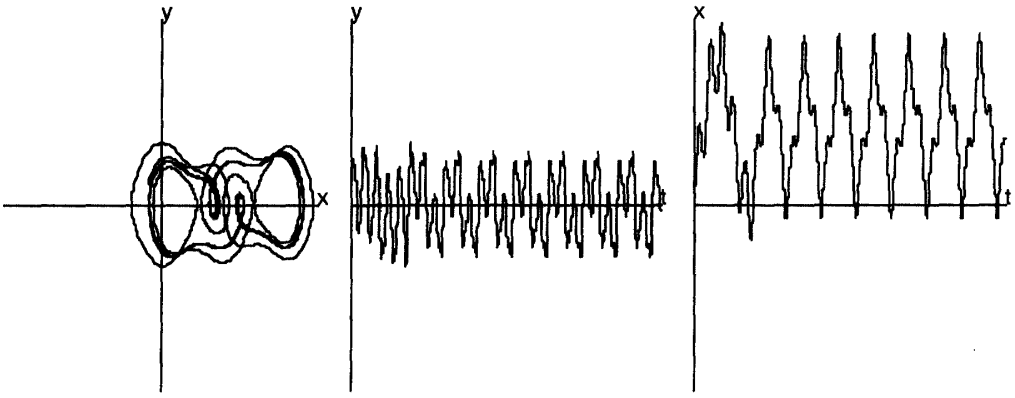
(d) A = 1.496



(e) A = 1.498

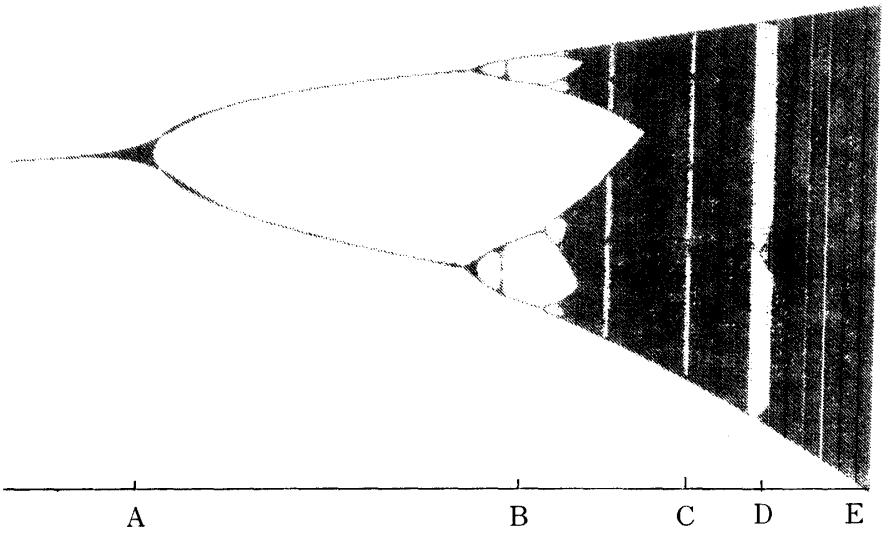


(f) A = 1.53

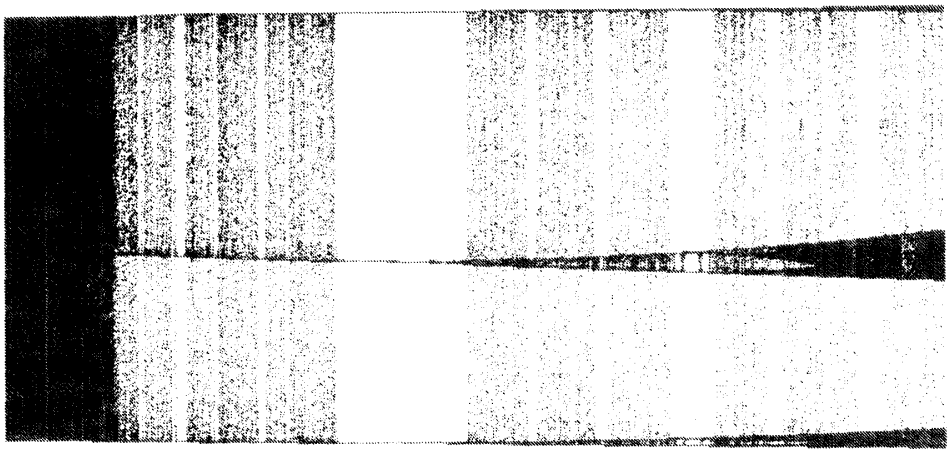


(g) A = 1.58

Fig. 2



(a)



(b)

Fig. 3

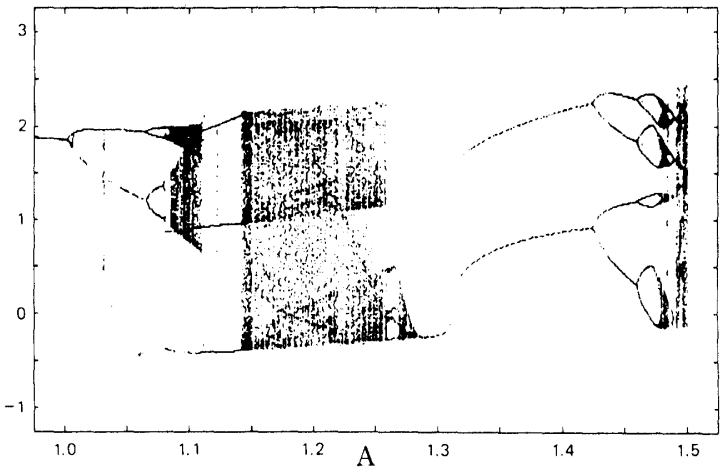


Fig. 4

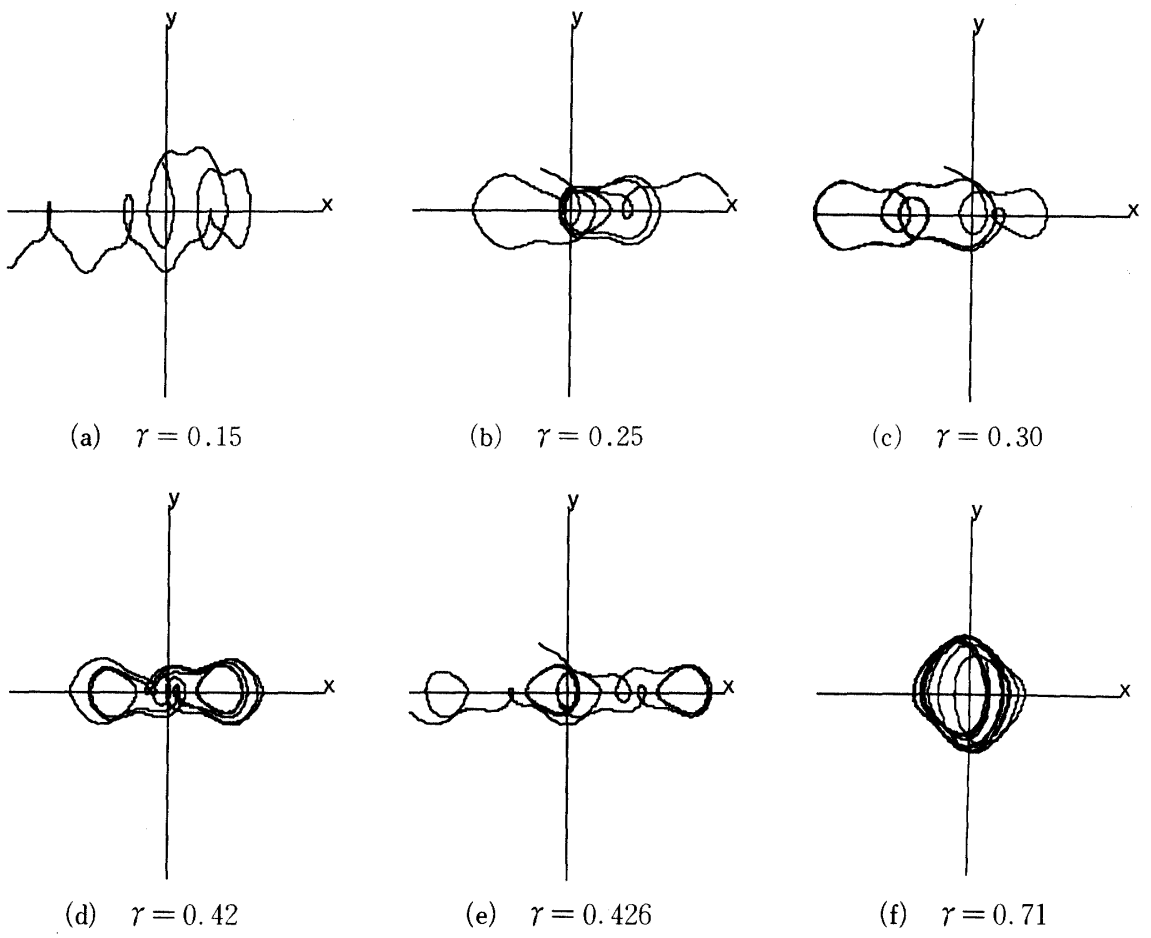


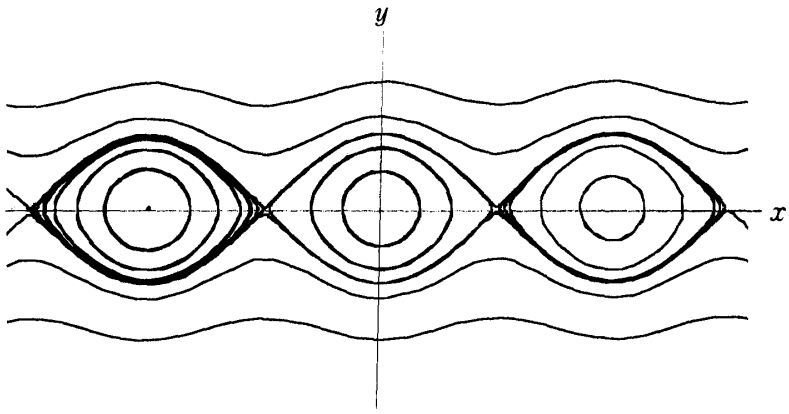
Fig. 5

M = 3.810 から 3.855までプロットしたものである。(a)と見比べて，何かフラクタル的要素がうかがえるであろう。

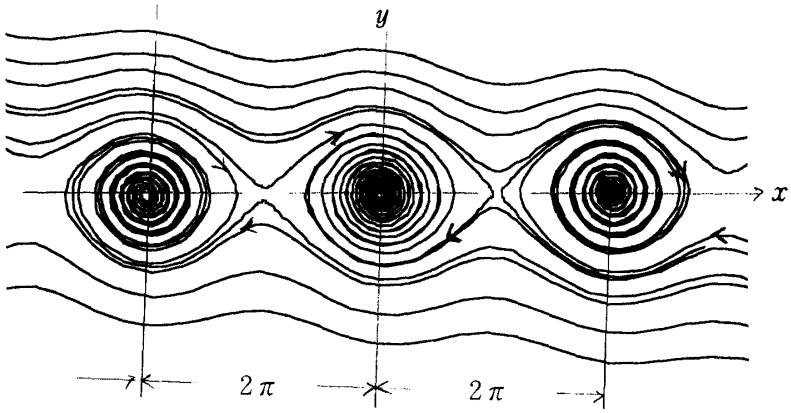
Fig 4 は Fig 2 で取り上げた系において，A を横軸に，たて軸に ω をとった分岐図である（文献 2)，Fig 4 を見ると A = 1.08〜1.28 の周辺でカオス領域を占め，A = 1.35あたりを中心に周期運動の領域が存在する。A = 1.48の近くでは y は 4 つのバンドとなり，運動はカオス的であり，ω は 4 つのバンド間を転移し，バンド内の異なる値をとることが予想される。1.5近くのカオス領域にはいる少し前に周期的領域があるが Fig 2(e) がその一例と思われる。Fig 5 は A = 1.5, ω = 0.667 を固定し，減衰の強さ γ を変えたときの図である。γ が大きくなり減衰項の寄与が大きくなり，A cos ωt と一定のバランスをもつところ $\gamma \cong 0.42$ があり，さらに γ が大きくなるとカオス的な attractor が消える。

3. カオスの発生と Mel'nikov による条件

Fig 6 (a) は減衰がないときの，(b) は減衰をともなう場合（外力の作用はない）の図である。横軸における区間幅 2π がそれぞれの attractor の領域である。つまり各領域内では，すべての軌道はその領域に含まれる焦点にらせんを描きながら収束する。Fig 6 に対応する方程式は



(a)



(b)

Fig.6

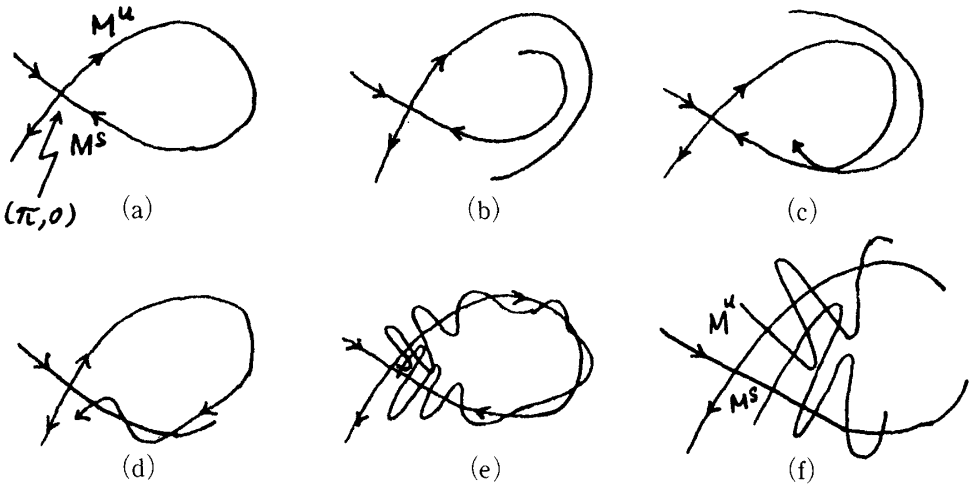


Fig.7

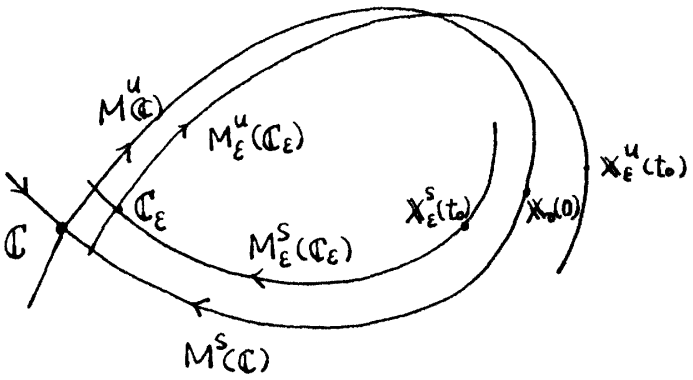


Fig. 8

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -\sin x\,(+0.3y)$$

$(+0.3y)$ が (b) の場合である。点 $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$ は鞍点で安定であるが，そこから離れていく軌道は不安定である。Fig 7 (a) は鞍点 $(\pi, 0)$ 付近の安定多様体 M^s，不安定多様体 M^u の様子を示したものである。振り子が外力によってゆさぶられることを通じて，M^s, M^u の軌道にブレが生ずることが予想される。この場合 (b) のようであれば，問題は生じない。しかし (c) のように M^s と M^u が接したり交わったりすることが起こりえる（文献 1)。同じ周期軌道から生ずる場合，hemoclinic 点といい，異なる軌道から生じた M^s, M^u の交点は heteroclinic 点という。しかも交わる場合は，一つの点から無限の交点を生じさせることが証明されている（文献 3)。その結果 (e) のような場合も起こる。はじめ互いに近くにあった 2 点は何回かの交差（写像）によって，離れた 2 点へ移される。そのことを通して 2π 幅の各 attractor の領域を隔てていた Separatrix がいわば溶け出していく，これがカオス的状態の始まりである。この hemoclinic (heteroclinic) の「もつれ」がカオス的運動の幾何学的に見た，原因である。

Mel'nikov の方法（文献 4）によって，M^s と M^u が交差する条件が得られる。Fig 8 で X (0) は C を通る不安定多様体 $M^u(C)$ 上の点である。外力（摂動）のため，$M^u(C)$, $M^s(C)$ が $M^u_\varepsilon(C_\varepsilon)$, $M^s_\varepsilon(C_\varepsilon)$ に変わったとしよう。Mel'mikov の方法に従って，

$$\frac{dx}{dy} = y,\ \frac{dy}{dx} = -(x - \frac{x^2}{6}) + \varepsilon\,(A\cos\omega t - \gamma y)$$

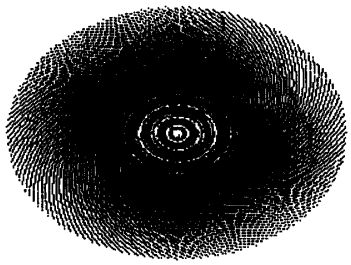
に対して（ここで $\mathrm{Sin}\,x = x - \frac{x^3}{6}$ で近似）

$F = (y,\ -x + \frac{x^3}{6})$, $f = (0,\ A\cos\omega t - \gamma y)$ とするとき，$X^s_\varepsilon(to,\ to)$ と $X^s_\varepsilon(to,\ to)$ 間の距離 d (to) は，

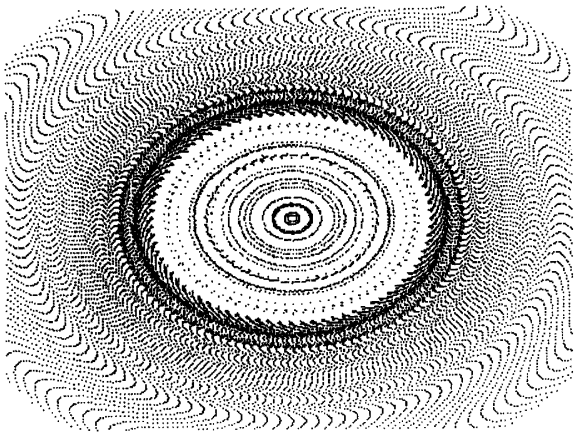
$$d\,(to) = \frac{\varepsilon\,F(Xo(0))\,\Lambda\,\{X^u_1(to,\ to) - X^s_1(to,\ to)\}}{F(Xo(0))} + O\,(\varepsilon^2)$$

で与えられる。ここで

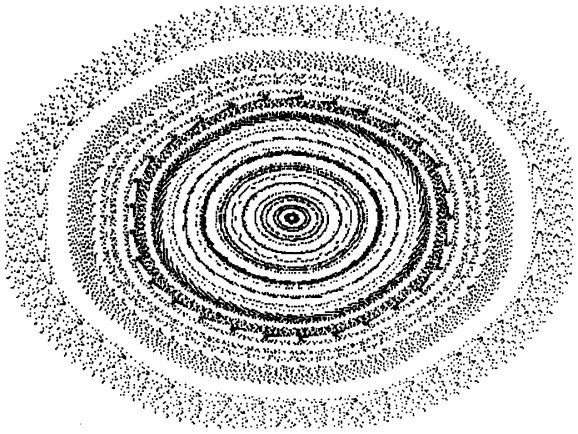
$$X^u_\varepsilon\,(to,\ to) = Xo(t - to) + \varepsilon\,X^u_1(t,\ to) + O(\varepsilon^2) \cdots t \leqq to$$
$$X^s_\varepsilon\,(to,\ to) = Xo(t - to) + \varepsilon\,X^s_1(t,\ to) + O(\varepsilon^2) \cdots t \geqq to$$



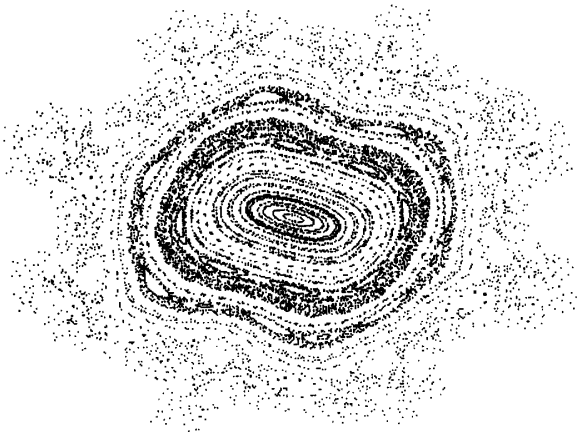
(a) c = 0



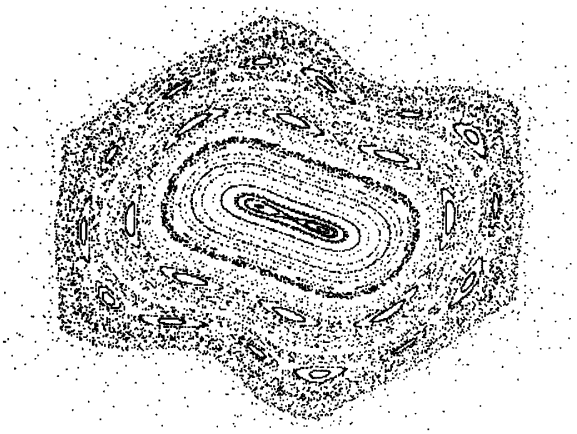
(b) c = 0.01



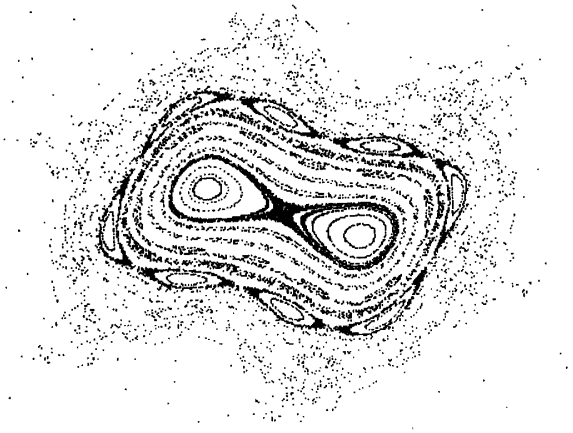
(c) c = 0.1



(d) c = 0.8



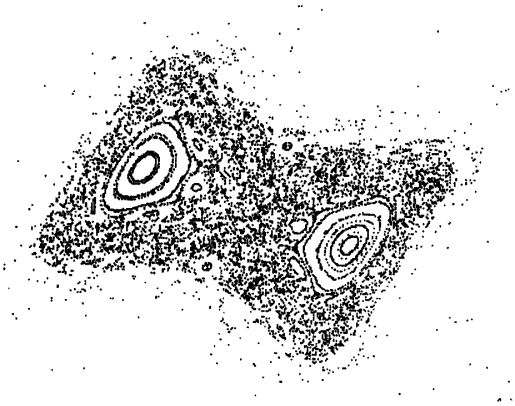
(e) c = 1.0



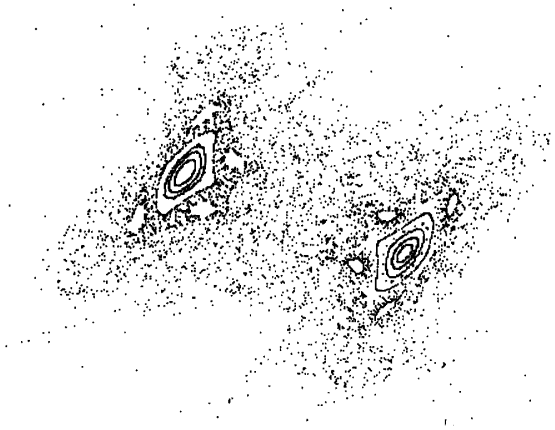
(f) c = 1.5

Fig. 9—1

(g) c = 2.0



(h) c = 2.5



(i) c = 3.0

Fig. 9—2

である。これは，ベクトル $X_1^u - X_1^s$ と Xo (0) に作用する外力との外積をとったものである。この d (to) を計算すると，

$$d(to) = \frac{\varepsilon M(to)}{|F(Xo(0))|} + O(\varepsilon^2)$$

を得るが，M(to) は次式で与えられる。

$$M(to) = \int_{-\infty}^{\infty} F(Xo(t-to)) \wedge f(Xo(t-to), t)\, dt$$

従って，M が 0 であれば d はある時刻 t で，0 となり，Xo (0) 付近で安定多様体 M_ε^u と不安定多様体 M^s は交わることになり，カオスが生ずる。

解 $Xo(t) = \pm(2\sqrt{3}\ \mathrm{sech}t,\ -2\sqrt{3}\ \mathrm{sech}t \cdot \mathrm{tan}t)$

となるから，M (to) を計算すると

$$M(to) = \sqrt{2}\,\pi A \omega \cdot \mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\pi\omega\right) \cdot \sin(\omega\, to) - \frac{4\sqrt{6}}{3}\gamma$$

を得る。これより $4\gamma\cosh\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) < \sqrt{3}\,\pi A \omega$ であれば M は値 0 を取り得る。逆に $4\gamma\cosh\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) > \sqrt{3}\,\pi A \omega$ であれば M (to) は常に負となり，カオスの発生はない。問題にした $\gamma = 0.5$, $A = 1.5$, $\omega = \frac{2}{3} \cong 0.667$ に対して上の条件を調べれば

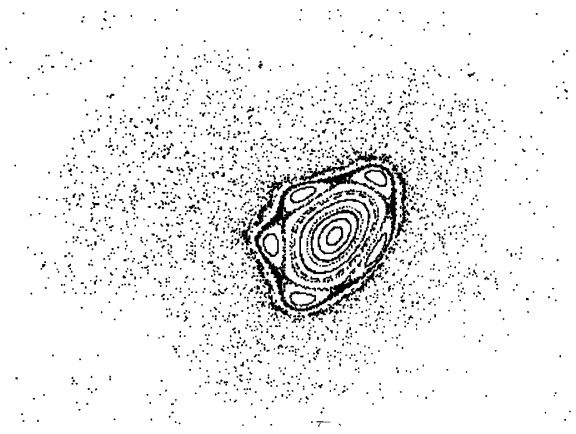


Fig. 10

$$4\ \gamma \cosh\left(\frac{\pi}{2}\ \omega\right) = 4 \times 1.5 \times \cosh\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3.2004$$

$$\sqrt{3}\ \pi A\ \omega = \sqrt{3} \times 3.1416 \times 1.5 \times \frac{2}{3} = 5.4415$$

であり，A = 1.5 に対しカオスが生ずることが確認できる。

4. パルス型の外力によるふるまい

外力も，減衰も伴なわない単振り子に対する微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 \sin x = 0$$

で表わされる。ここで sinx を x で近似し，外力としてパルス型のものを考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = Af(x) \sum_{k=1}^{\infty} \delta\ (t - kT)$$

$\delta(t)$ は δ 関数であり，$f(x)$ は時間 t に依存しない任意の関数である。$(k-1)T < t < kT$ では上式の右辺は 0 であり，解は

$$X(t) = C_k \cos \omega_o t + D_k \sin \omega_o t$$

で与えられるが，$t = kT$ で $X(t)$ の連続性，$\frac{dx}{dt}$ の不連続を考慮して，係数 C_k，D_k は次の漸化式で与えられる。

$$C_{k+1} = C_k - \frac{A}{\omega_o} f(x_k) \sin \omega_o T$$

$$D_{k+1} = D_k + \frac{A}{\omega_o} f(x_k) \cos \omega_o T$$

ここで $x_k = C_k \cos \omega_o kT + D_k \sin \omega_o kT$ である。これらの式から x_j，$\dot{x}_j = \frac{dx}{dt}$ の差分方程式が得られる。

$$x_{j+1} = \cos \omega_o T \cdot x_j + \frac{1}{\omega_o} \sin \omega_o T\ (x_j + Af(x_j))$$

$$\dot{x}_{j+1} = -\ \omega_o \sin \omega_o t \cdot x_j + \cos \omega_o T\ (x_j + Af(x_j))$$

f (x) として sin kx を選び，$kx = u$, $\frac{ky}{\omega_o} = v$ とおけば

$$u_{j+1} = \cos \omega_o T \cdot u_j + \sin \omega_o T \cdot (v_j + \frac{A_k}{\omega_o} \sin u_j)$$

$$v_{j+1} = - \sin \omega_o T \cdot u_j + \cos \omega_o T \cdot (v_j + \frac{A_k}{\omega_o} \sin u_j)$$

を得る。この差分方程式から (u_j, v_j) をプロットしたものが Fig. 9 である。ω_o, k を一定にし，($\cos \omega_o T = 0\ 65$, $\sin \omega_o T = 0.76$)，A を変えたものである。図中の $c = A_k/\omega_o$ である。Fig. 9 (a) に見られる楕円軌道がくずれていき，“島”のくさりができ始める (d)，その島の外側は厚くはないが，カオスの層が形成される (e-f)，(e) では，平衡点の近くで，2つの楕円型軌道への分離が起こる。これは $n\omega_o = k$ を満たす共鳴が原因と思われるが (e) − (f) の過程は，その結果，新たな separatrix の形成となる（文献 5)。(f) では島と島の間の部分でもカオス状態が成長してきている。(g) では外側の島は消失し，(h) では安定な平衡点のまわりにのみ周期的な島が生き残っている。言いかえると，homoclinic 点は周期軌道をなさないが，周期運動する軌道上の点から成り立ち，各 homoclinic なもつれは無限の homoclinic な点を含む。そして，これらの点の周辺には無限の周期軌道を構成する点が存在する。カオス状態の中でごくせまい範囲で周期性をもつ系が残るのである。

5. 結びに代えて

ここでは一部の図を紹介できたに過ぎないが，振り子系も複雑で変化に富んでいる。ここで使った $x + \omega_o^2 \sin x = Af(x)$，そして u_j, v_j についての差分方程式から，さらに sin kx とは異なるカオスのタイプを見ることが出来るであろう。例えば Fig 10 は f (x) = cos kx の場合である。

強制振動系を調べる場合も，logistic 写像 $x_{n+1} = M x_n (1 - x_n)$ の分岐図の理解が助けになるが，このことは必ずしも自明ではないと思われる。その点で Fig. 3 の各倍周期 (period doubling) の定性的性質から強制振動系を見直すことは意味があり，次の課題である，さらには δ を独立変数とした分岐図からの接近も考えられます。

非線形系の特徴の一つに，同一のパラメーター値に対し，attractor が複数共存する場合があります。従って，初期条件のとり方で，ある attractor に収束するもの，別の attractor に収束するもの，発散する場合がありえます。このそれぞれの引力圏の basin（盆地）については，ここでは考慮してませんが，カオス状態の進化を定性的に知る上でも必要であると思います。

参考文献

1. 全体としては J. Hale, H. Kocak：Dynamicsand Bifurcations, ('91) Springer Verlag.
   また E. N. Lorenz ('89) Physica D 35 299～317 camputational Chaos-A Prelude to computational Instalility
   M. Hénon ('76) Comm. Math. phys. **50**, 69～77, A two dimensional mapping with a strange attractor.
2. G. L. Baker, J. P. Gollub ('90) Chaotic Dynamics an Introduction Cambridge U. Press
3. S. Smale ('67) Differential dynamical systems. Bull. Am. Math. Soc. **73** 747～817
4. V. K. Mel'nikov ('63) In Differential and Combinatorial topology, Princeton Univ. Press.
5. KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) 定理から説明される。