

Title	Dirichlet-Lerch型L関数の解析的・漸近的挙動：解明と応用
Sub Title	Study of analytic and asymptotic aspects of Dirichlet-Lerch type L -functions
Author	桂田, 昌紀(Katsurada, Masanori)
Publisher	慶應義塾大学
Publication year	2022
Jtitle	学事振興資金研究成果実績報告書 (2021.)
JaLC DOI	
Abstract	<p>2021年度の研究では，研究計画調書に記した，古典的な Lerch ゼータ関数の定義級数に任意 modulus f の原始指標 (の変数を任意整数 c だけシフトして得られる関数 χ_c) を挿入して定義された Dirichlet-Lerch 型 L 関数 $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ について，以下の成果が得られた：</p> <p>i) Dirichlet-Lerch 型 L 関数の解析的挙動の解明：当該の L 関数について，その変数 s を $1-s$ に置き換えた際に成立する，ある種の「対称性」を有する「関数等式」の存在を証明した．この関数等式は，古典的な Lerch ゼータ関数が満たす関数等式の自然な一般化ともなっている．さらに，当該の L 関数の任意の非正整数点 $s=-k$ ($k=0, 1, \dots$) における特殊値が，古典的な Bernoulli 多項式の定義母関数に上記の (シフト指標) χ_c を適宜挿入して定義された母関数から定まる (指標付き) χ_c-Bernoulli 型多項式によって記述されることも明らかになった；</p> <p>ii) Dirichlet-Lerch 型 L 関数の漸近的挙動の解明：当該の L 関数の指標 χ に関する (離散的) 積平均について，$f \rightarrow \infty$ のときの f の減少オーダーの完全漸近展開を確立した．さらに，パラメタ α に関する (連続的) 積平均について，変数 (s_1, s_2) が $\lim_{s_1 \rightarrow -\infty} s_2 = -\lim_{s_1 \rightarrow -\infty} s_2$ を満たしつつ $f \rightarrow \infty$ となるときの f の減少オーダーの完全漸近展開を確立した；</p> <p>iii) Dirichlet-Lerch 型 Eisenstein 級数の解析的・漸近的挙動の解明：古典的な Eisenstein 級数の定義級数に，それぞれ任意 modulus (f, g) ((a, b) シフトした) 原始指標 (χ_a, ψ_b) を挿入して定義される Dirichlet-Lerch 型 Eisenstein 級数について，付随するパラメタ z が複素上半平面内を $z \rightarrow \infty$ となるときの完全漸近展開を確立した．この展開公式からは，Riemann ゼータ関数の奇数点での特殊値を Lambert 級数と結びつける，著名な Ramanujan 公式を指標を挿入した形の一般化も得られる．</p> <p>The investigation during the Japanese fiscal year of 2021 was on the classical Lerch zeta-function twisted with any primitive Dirichlet character χ_c (shifted with any integer c) modulo (any positive integer) f, which is to be written by $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator has obtained the following results i)-iii):</p> <p>i) Analytic aspects of $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator has established a functional equation for $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ when the variable s is replaced by $1-s$, which gives a natural generalization of that for the classical Lerch zeta-function. He also showed that the particular values of $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ at any non-positive integer point $s=-k$ ($k=0, 1, \dots$) can be described by generalized Bernoulli polynomials, which are defined by a certain generating function of Bernoulli polynomials appropriately twisted with a (shifted) primitive character χ_c;</p> <p>ii) Asymptotic aspects of $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator established complete asymptotic expansions in the descending order of f as $f \rightarrow \infty$ for the discrete mean values of the product of two Dirichlet-Lerch L-functions, averaged with any primitive Dirichlet character χ modulo f. He at the same time established complete asymptotic expansions in the descending order of t as $t \rightarrow \infty$, if the variables (s_1, s_2) satisfy $\lim_{s_1 \rightarrow -\infty} s_2 = -\lim_{s_1 \rightarrow -\infty} s_2$, for the continuous mean values of the product of two Dirichlet-Lerch L-functions, averaged in terms of the associated parameter α;</p> <p>iii) Asymptotic aspects of the Dirichlet-Lerch type Eisenstein series $F_{\chi_a, \psi_b}(s; \alpha, \beta; \mu, \nu; z)$ twisted with any primitive Dirichlet characters (χ_a, ψ_b) (sifted with any integers (a, b)): The head investigator has established a complete asymptotic expansion for the Dirichlet-Lerch Eisenstein series $F_{\chi_a, \psi_b}(s; \alpha, \beta; \mu, \nu; z)$ when the associated parameter $z \rightarrow \infty$ through the complex upper half-plane; this expansion further gives a natural generalization (twisted with (χ_a, ψ_b)) of a celebrated formula of Ramanujan for specific values at odd integer points of the Riemann zeta-function.</p>

Notes	
Genre	Research Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=202100003-20210200

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究代表者	所属	経済学部	職名	教授	補助額	300 (A) 千円
	氏名	桂田 昌紀	氏名 (英語)	KATSURADA, Masanori		
研究課題 (日本語)						
Dirichlet-Lerch 型 L 関数の解析的・漸近的挙動—解明と応用—						
研究課題 (英訳)						
Study of analytic and asymptotic aspects of Dirichlet-Lerch type L -functions						
1. 研究成果実績の概要						
<p>2021年度の研究では、研究計画調書に記した、古典的な Lerch ゼータ関数の定義級数に任意 modulus f の原始指標 (の変数を任意整数 c だけシフトして得られる関数 χ_c) を挿入して定義された Dirichlet-Lerch 型 L 関数 $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ について、以下の成果が得られた:</p> <p>i) Dirichlet-Lerch 型 L 関数の解析的挙動の解明: 当該の L 関数について、その変数 s を $1-s$ に置き換えた際に成立する、ある種の「対称性」を有する「関数等式」の存在を証明した。この関数等式は、古典的な Lerch ゼータ関数が満たす関数等式の自然な一般化ともなっている。さらに、当該の L 関数の任意の非正整数点 $s = -k$ ($k=0, 1, \dots$) における特殊値が、古典的な Bernoulli 多項式の定義母関数に上記の (シフト指標) χ_c を適宜挿入して定義された母関数から定まる (指標付き) χ_c-Bernoulli 型多項式によって記述されることも明らかになった;</p> <p>ii) Dirichlet-Lerch 型 L 関数の漸近的挙動の解明: 当該の L 関数の指標 χ に関する (離散的) 積平均について、$f \rightarrow \infty$ のときの f の減少オーダーの完全漸近展開を確立した。さらに、パラメタ α に関する (連続的) 積平均について、変数 (s_1, s_2) が $\Im s_1 = t = -\Im s_2$ を満たしつつ $t \rightarrow \pm \infty$ となるときの t の減少オーダーの完全漸近展開を確立した;</p> <p>iii) Dirichlet-Lerch 型 Eisenstein 級数の解析的・漸近的挙動の解明: 古典的な Eisenstein 級数の定義級数に、それぞれ任意 modulus (f, g) ((a, b) シフトした) 原始指標 (χ_a, ψ_b) を挿入して定義される Dirichlet-Lerch 型 Eisenstein 級数について、付随するパラメタ z が複素上半平面内を $z \rightarrow \infty$ となるときの完全漸近展開を確立した。この展開公式からは、Riemann ゼータ関数の奇数点での特殊値を Lambert 級数と結びつける、著名な Ramanujan 公式を指標を挿入した形の一般化も得られる。</p>						
2. 研究成果実績の概要 (英訳)						
<p>The investigation during the Japanese fiscal year of 2021 was on the classical Lerch zeta-function twisted with any primitive Dirichlet character χ_c (shifted with any integer c) modulo (any positive integer) f, which is to be written by $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator has obtained the following results i)–iii):</p> <p>i) Analytic aspects of $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator has established a functional equation for $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ when the variable s is replaced by $1-s$, which gives a natural generalization of that for the classical Lerch zeta-function. He also showed that the particular values of can be $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$ at any non-positive integer point $s = -k$ ($k=0, 1, \dots$) can be described by generalized Bernoulli polynomials, which are defined by a certain generating function of Bernoulli polynomials appropriately twisted with a (shifted) primitive character χ_c;</p> <p>ii) Asymptotic aspects of $L_{\chi_c}(s, \alpha, \lambda)$. The head investigator established complete asymptotic expansions in the descending order of f as $f \rightarrow \infty$ for the discrete mean values of the product of two Dirichlet-Lerch L-functions, averaged with any primitive Dirichlet character χ modulo f. He at the same time established complete asymptotic expansions in the descending order of t as $t \rightarrow \pm \infty$, if the variables (s_1, s_2) satisfy $\Im s_1 = t = -\Im s_2$, for the continuous mean values of the product of two Dirichlet-Lerch L-functions, averaged in terms of the associated parameter α;</p> <p>iii) Asymptotic aspects of the Dirichlet-Lerch type Eisenstein series $F_{\chi_a, \psi_b}(s; \alpha, \beta; \mu, \nu; z)$ twisted with any primitive Dirichlet characters (χ_a, ψ_b) (sifted with any integers (a, b)): The head investigator has established a complete asymptotic expansion for the Dirichlet-Lerch Eisenstein series $F_{\chi_a, \psi_b}(s; \alpha, \beta; \mu, \nu; z)$ when the associated parameter $z \rightarrow \infty$ through the complex upper half-plane; this expansion further gives a natural generalization (twisted with (χ_a, ψ_b)) of a celebrated formula of Ramanujan for specific values at odd integer points of the Riemann zeta-function.</p>						
3. 本研究課題に関する発表						
発表者氏名 (著者・講演者)	発表課題名 (著書名・演題)	発表学術誌名 (著書発行所・講演学会)	学術誌発行年月 (著書発行年月・講演年月)			
Masanori KATSURADA and Takumi NODA	A class of holomorphic Dirichlet-Hurwitz-Lerch Eisenstein series and Ramanujan's formula for specific values of the Riemann zeta-function	in "R.I.M.S. Kokyuroku," No. 2222, pp. 25--39, 2022	June, 2022			
Masanori KATSURADA and Takumi NODA	Asymptotic expansions for a class of generalized holomorphic Eisenstein series, Ramanujan's formula for $\zeta(2k+1)$, Weierstrass' elliptic and allied functions	arXiv: 2201.10124v2 [math.NT]	January, 2022			

Masanori KATSURADA	Asymptotic expansions for the laplace-Mellin and Riemann-Liouville transforms of Lerch zeta-functions	arXiv: 2111.12898v2 [math.NT]	January, 2022
--------------------	---	-------------------------------	---------------