Title	東京2020オリンピック· パラリンピックエンブレムの背後に隠された幾何学的な理
Sub Title	The geometric theorem behind the Tokyo 2020 Olympic and Paralympic emblem
Author	松川, 昌平(Matsukawa, Shōhei)
Publisher	慶應SFC学会
Publication year	2020
Jtitle	Keio SFC journal Vol.20, No.1 (2020.) ,p.108- 135
JaLC DOI	10.14991/003.00200001-0108
Abstract	本論考では、筆者が作成したREG (Random Emblem Generator) というシステムの開発を通して、野老朝雄がデザインした東京2020オリンピック· パラリンピック· エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を明らかにすることを試みる。
Notes	特集 オリパラ サイコウ 招待論文 : 研究論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=0402-2001-0108

［招待論文：研究論文］

東京 2020 オリンピック・パラリンピック エンブレムの背後に隠された幾何学的な理
The Geometric Theorem behind the Tokyo 2020 Olympic and Paralympic Emblem

松川 昌平

慶應義塾大学環境情報学部准教授

Shohei Matsukawa
Associate Professor, Faculty of Environment and Information Studies, Keio University

Abstract:　本論考では、筆者が作成した REG（Random Emblem Generator）というシステムの開発を通して、野老朝雄がデザインした東京 2020 オリンピック・パラリンピック・エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を明らかにすることを試みる。

In this paper, I try to reveal the geometric theorem behind the Tokyo 2020 Olympic and Paralympic emblem designed by Asao Tokoro, through the development of the system called REG (Random Emblem Generator) which I created.

Keywords: 東京 2020 オリンピック・パラリンピックエンブレム、菱形平面充填、双対図形
Tokyo 2020 Olympic and Paralympic emblem, rhombus tessellation, dual diagram

1　はじめに

1.1　シンプルなエンブレム

2016 年 4 月 25 日、東京 2020 オリンピック（以下オリ）・パラリンピック（以下パラ）のエンブレムが発表された（図 1）。発表されたエンブレムは、オリパラともに、長方形だけで構成され、色は藍色一色であることから、多くの方はそのシンプルさに驚いたのではないだろうか。中にはシンプルすぎて物足りないと感じた方もいたかもしれない。過去 5 回のオリンピック・エンブレムと比較してみると、今大会のエンブレムのシンプルさが際立っていることがわかるだろう（図 2）。

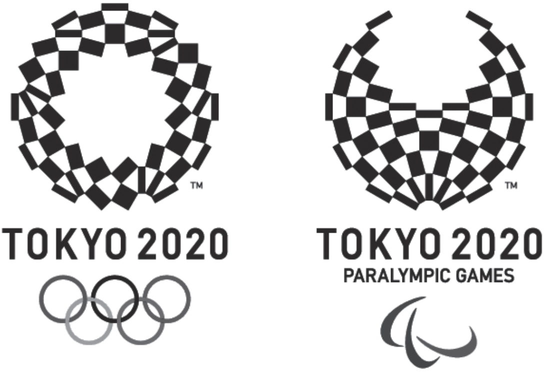


図１　東京 2020 オリンピック・パラリンピック競技大会のエンブレム
「組市松紋（くみいちまつもん）」
出典：https://tokyo2020.org/ja/games/emblem/（2020 年 05 月 01 日アクセス）

図２　過去５回のオリンピック・エンブレムとの比較
出典：https://www.olympic.org/olympic-games（2020 年 05 月 01 日アクセス）

東京 2020 の公式ホームページをみると、エンブレムには「組市松紋（くみいちまつもん）」というタイトルが付けられていて、コンセプトは「歴史的に世界中で愛され、日本では江戸時代に「市松模様（いちまつもよう）」として広まったチェッカーデザインを、日本の伝統色である藍色で、粋な日本らしさを描いた」と書かれている[1)]。なるほど、市松模様だから長方形なのであり、日本の伝統色だから藍色なのだ。非常にシンプルでわかりやすい。コンセプ

トには続けて「形の異なる 3 種類の四角形を組み合わせ、国や文化・思想などの違いを示す」とある。確かにエンブレムをよく見ると、全部同じ長方形ではなく、また、全部違う長方形でもなく、オリパラともに 3 種類の長方形だけで構成されていることがわかる。さらにコンセプトの最後には、「違いはあってもそれらを超えてつながり合うデザインに、「多様性と調和」のメッセージを込め、オリンピック・パラリンピックが多様性を認め合い、つながる世界を目指す場であることを表した」とある。長方形が 3 種類なのは多様性を表現するためであり、長方形の角と角が繋がりあっているのはその多様性の調和を表現しているのだ。たとえ角が立つような多様性だとしても、必ず角と角が繋がり合うところに調和への強い意志を感じることができる。さすが 1 万 4599 件の一般公募の中から選出されたエンブレムだけあって、シンプルな形ながらも、その形の意味する価値が明快に表現されている素晴らしいデザインである。

1.2　シンプルさを成立させている何かへの違和感

しかしながら、何か違和感を感じるのだ。デザインそのものやコンセプトに対する違和感ではない。エンブレムのシンプルさを成立させている何かへの違和感である。

自分が同じようなエンブレムをデザインすることを想像してみよう。もしそれぞれの長方形の縦横比や辺の長さを自由に決めることができるのならば、似たようなエンブレムを作ることはできそうである。しかし、3 種類の長方形だけを並べていくことで、それぞれの長方形の角と角が必ず繋がり、さらに全体として円環状に閉じることができるだろうか。適当にやっていてはそうはならない。重なったり、隙間ができたり、繋がらなかったりするほうが普通である。それができているこのエンブレムのほうが特殊なのだ。エンブレムは一見シンプルで簡単に見えるけれど、その背後には何か幾何学的な理（ことわり）が隠されているに違いない。

以上が、筆者がエンブレムを見たときのファースト・インプレッションであった。

1.3　SNS で盛り上がる謎解き

エンブレムの発表と同時に、その制作者が野老朝雄 (ところ あさお) であることも合わせて発表された。野老朝雄は、イギリスの私立建築学校 AA School で建築を学んだ後、2001 年頃から「トコロ紋」と呼ばれる幾何学的な紋様を展開するアーティストとして知る人ぞ知る存在である。筆者のように以前から野老を知っている人はもちろんだが、仮に知らなかった人であっても、先述したような気づき、すなわち「このエンブレムの背後には何か幾何学的な理が隠されているに違いない」と感じた人は少なからずいたのではないだろうか。実際、エンブレムが公表された直後から、SNS を中心として謎解き祭りがにわかに盛り上がりを見せ始めた。WEB 上に当時の履歴が残されているので、興味ある方は是非一度覗いてみてほしい [2)]。集合知によって、エンブレムの背後に隠された幾何学的な理が少しずつ解き明かされていくという知的興奮を追体験することができるだろう。

1.4　ランダム・エンブレム・ジェネレーター

SNS で盛り上がる謎解き祭りに居ても立っても居られず、ゴールデンウィークを返上し、筆者も謎解き祭りに参加することにした。そして約 1 週間の試行錯誤を繰り返したのち、自分なりに発見した幾何学的な理をもとにコンピュータ・プログラムを実装し、2020 年 5 月 4 日に SNS 上で「Random Emblem Generator (以下 REG)」を公開した (図 3)。

REG とは、エンブレムの背後に潜む幾何学的な理を用いることで、オリパラとは異なるパターンのエンブレムをランダムに生成するシステムのことである。REG を制作した動機は 4 つある。1 つ目は、先述したように、エンブレムの背後に潜む幾何学的な理を発見することである。その理を明らかにすることが本論の主な目的であるので、詳細は 2 章以降に論じていく。2 つ目は、全世界のすべての人に異なるパターンのエンブレムを配布することである。制作当時は、REG によっていったい何パターンのエンブレムを生成できるのか正確な数字は不明だったが (正確な数字は後述する)、全世界人口以上のパターン数は生成できるだろうと粗く見積もっていた。世界中のすべての人にエンブレムを配布することができれば、少しでもオリパラを身近に感じなが

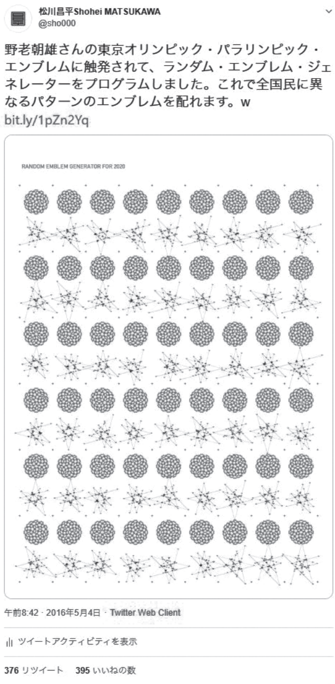


図３　ランダム・エンブレム・ジェネレーター
出典：https://twitter.com/sho000/status/727644546335526912
(2020 年 05 月 01 日アクセス)

ら応援する機運を醸成できるのではないかと考えたのだ。3 つ目は、エンブレムの著作権について一石を投じたかったからだ。2011 年に発表された MIT メディアラボの可変的なビジュアル・アイデンティティに代表されるように [3)]、ある仕組みから動的に生成されたデザインに対する著作権は、従来の静的なデザインを前提としていた著作権の枠組みでは捉えきれなくなってきている。それは 2015 年に佐野研二郎がデザインした東京 2020 公式エンブレムが使用中止になった問題とも無関係ではないだろう。REG を公開して間もなく、建築家の豊田啓介からお誘いを受け、弁護士の水野祐と野老朝雄と筆者で『幾何学は誰のもの？』という鼎談 [4)] を行えたことは、動的なデザインの著作権について少しでも考えるキッカケを作ることができたのではないだろうか。4

つ目は、筆者の専門であるアルゴリズミック・デザインの建築以外への応用可能性を示したかったからである。アルゴリズミックデザインに関しては、本ジャーナルの Vol.17 No.1 に拙論が掲載されているので、そちらをご参照いただきたい[5)]。

2　目的

本論の目的は、東京 2020 オリンピック・パラリンピック・エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を明らかにすることである。幾何学的な理を明らかにするといっても難しい数式などは一切出てこない。視覚的な理解を促すために図版は多少込み入るが、本論を理解するのに必要な数学的な知識は、中学 2 年生時に習うある幾何学的な定理だけである。そのような簡単な定理から生み出される豊穣なデザインに、少しでも知的興奮を覚えていただければ本論の目的は達成される。

本論の目的が達成されれば (かつ、コンピュータ・プログラミングを実装するスキルがあれば)、筆者以外の方でも、オリパラとは異なるパターンのエンブレムをランダムに生成するシステム (=REG) を構築することができる。1.4 節でも触れたように、このシステムを用いれば、世界中のすべての人に異なるパータンのエンブレムを配布することができる。少しでもオリパラを身近に感じながら応援する機運を醸成することができれば幸いである。

3　エンブレムの特徴

本章ではまず、筆者が REG を制作する前に明らかになっていたエンブレムの幾何学特徴についてまとめる。また、そのような幾何学的な特徴だけでは、オリパラとは異なるパターンのエンブレムを生成するようなコンピュータ・プログラムを作成することが困難である理由を示す。

3.1　オリパラともに長方形の数は 45 個

まずは長方形の数を調べよう。図 4 のように長方形に番号を振ると、オリパラともに長方形の数は 45 個であることがわかる。

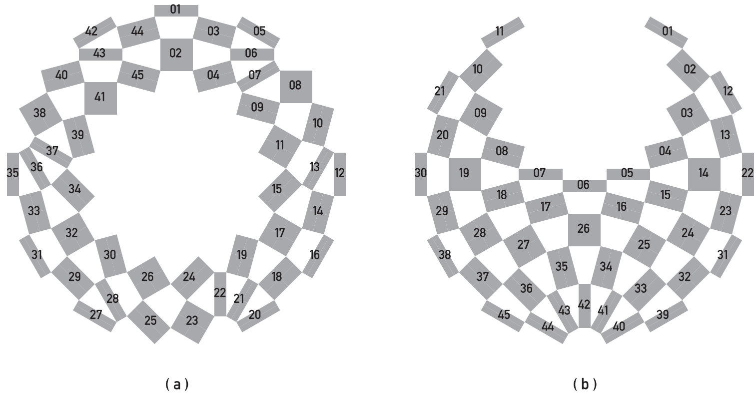


図４　(a) オリ (b) パラともに長方形の数は 45 個

3.2　オリパラともに長方形の種類は３種類

次に長方形の種類についてみたいのだが、コンセプトにも書かれていたように全部で３種類である。図５では、わかりやすいように、細めの長方形には「A」、太めの長方形には「B」、そして正方形には「C」という記号を振ってある。種類ごとの長方形の数はオリパラともに、A が 18 個、B が 18 個、C が９個である。

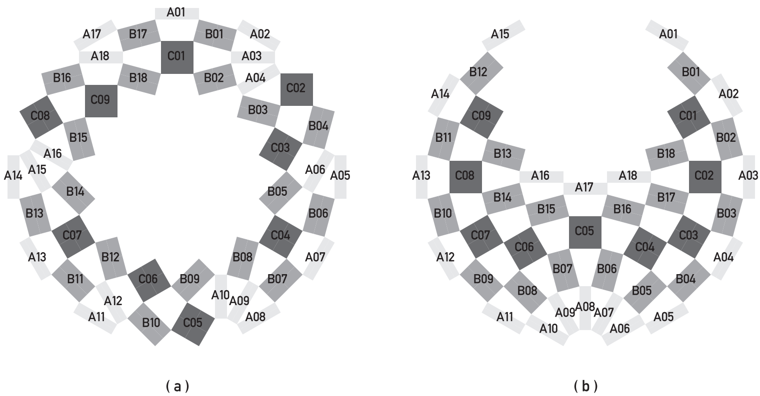


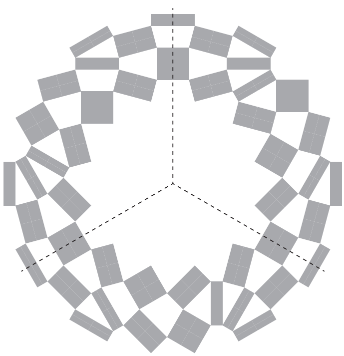
図５　(a) オリ (b) パラともに長方形の種類は３種類

ここまでの特徴だけを見ても、オリとパラは同じ仕組みから作られた異なる現れであることが推察される。

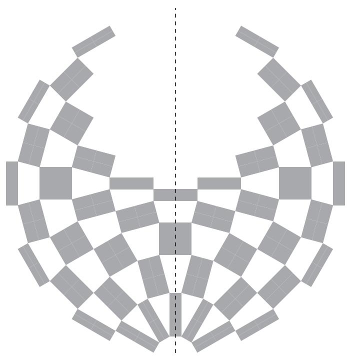
3.3　オリは回転対称、パラは線対称

ではオリとパラの違いは何か？　まず目につく違いは長方形が円形状に欠けている部分の位置である。オリはドーナッツ型に欠けていて、パラは三日月のように上部が欠けている。この欠けている部分が何を意味するのかは 3.5 節で触れる。

その他の違いとしては、もちろん各長方形の配置はオリとパラで異なるのだが、決してランダムに配置されているわけではなく、図 6 の中で示した点線に対して、(a) のオリは 120 度の回転対称、そして (b) のパラは左右対称のかたちをしていることがわかる。



(a)



(b)

図 6　(a) オリは回転対称、(b) パラは線対称

3.4　長方形ではなく菱形からできている

SNS 上の謎解き祭りの中で筆者が最も驚いたことは、長谷川能三による、長方形で構成されていると思われていたエンブレムが、実は、菱形を隙間なく敷き詰めて構成されているのではないかという洞察である (図 7)。すべての長方形の対角線の長さが同じ (対角線の長さを 1 とする) であることに気が

ついたのも素晴らしいが、長方形を対角線で切って三角形に分割し、元の長方形の辺を軸にそれぞれの三角形をミラー反転させてみようという発想がさらに素晴らしい。すると確かに、一辺の長さが 1 の菱形ができる。目に見えていた長方形は、実は、見えていなかった菱形の辺の中点を結んでできていたのである。

エンブレムが公表されてから 3 日目。エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を探求する上で、長谷川の洞察は大きなブレークスルーであったといえるだろう。

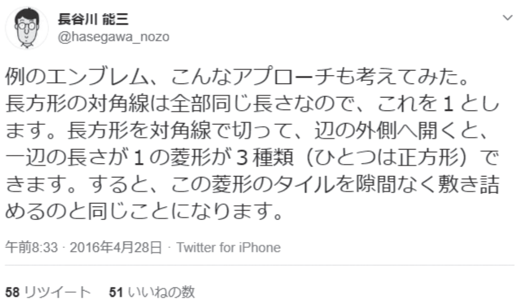


図 7　最初にエンブレムが菱形でできていることを指摘した tweet
出典：https://twitter.com/hasegawa_nozo/status/725467827394633728?s=20
(2020 年 05 月 01 日アクセス)

図 8 は、2020 年 1 月 7 日に発表された東京 2020 公式アートポスターにおいて、野老朝雄がデザインしたポスターである。野老はそのポスターの解説文の中で、「東京 2020 エンブレムの「組市松紋」は、オリンピック・パラリンピックともに菱形の中点を結び抽出された矩形を同数組み合わせて描いた藍色の円相です」と述べている[6)]。長谷川による素晴らしい洞察から約 4 年後、エンブレムの制作者の野老みずからエンブレムの背後に隠された幾何学的な理の一端を種明かししてみせたのである。

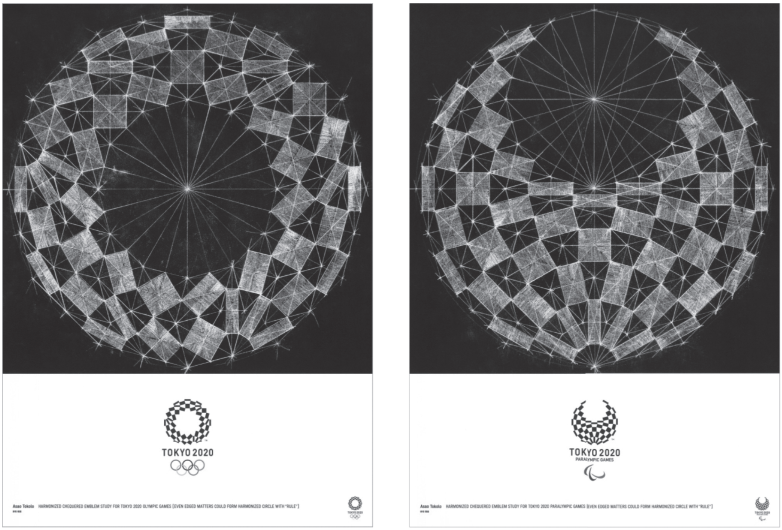


図 8　野老朝雄による東京 2020 公式アートポスター
出典：https://tokyo2020.org/ja/games/games-artposter/ (2020 年 05 月 01 日アクセス)

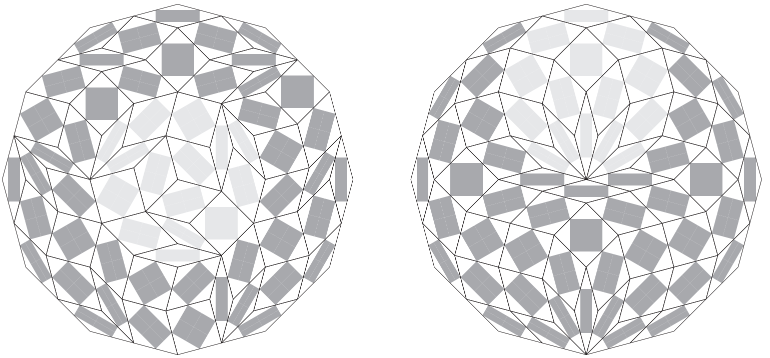
3.5　欠けた部分にも菱形を敷き詰めることができる

3.3 節でも触れたが、オリの中心とパラの上部が円形状に欠けている部分は、野老によるアートポスターでも欠けたままである。しかし、エンブレムは菱形を敷き詰めることによって作られているという洞察が得られた今、この欠けている部分にも菱形を敷き詰めることができるのではないかと考えるのは自然な流れであろう。実際に図 9 で示すように、欠けている部分にも菱形を敷き詰めることができる。

3.6　3 種類 60 個の菱形

長方形は菱形からできていて、欠けている部分も菱形で敷き詰めることができることがわかった。したがってここからは、欠けている部分にも菱形を敷き詰めた上で、それらの菱形がどのように敷き詰められているのかに着目して見ていこう。

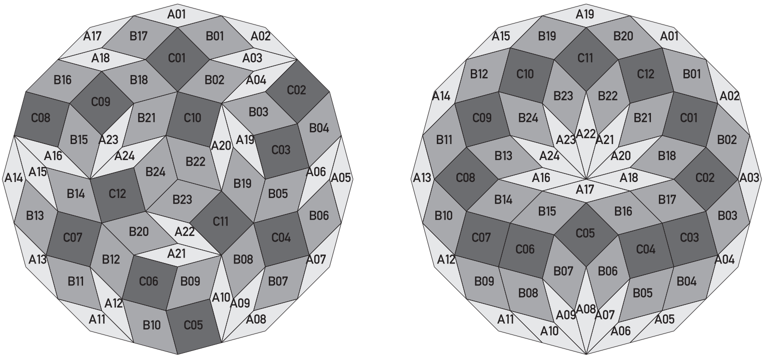
3.2 節で長方形が 3 種類あることはすでに述べたが、長方形は菱形の中点



(a)　　　　(b)

図９　欠けている部分にも菱形を敷き詰めることができる

を結んでできているので、菱形の種類も 3 種類である。実際に菱形の内角の角度を測ってみると、菱形の種類は (A) 30:150、(B) 60:120、(C) 90:90 の 3 種類であった (菱形の内角のうちで鋭角が α°、鈍角が β°のものを「α : β」と表記するものとする)。また、図 10 を見ると、種類ごとの菱形の数はオリパラともに、A が 24 個、B が 24 個、C が 12 個、合計 60 個であることがわかる。



(a)　　　　(b)

図 10　オリパラともに３種類 60 個の菱形で構成されている

3.7　全体の外形と欠けた部分の外形はともに正 12 角形である

ここで敷き詰められている菱形の外枠の形に着目すると、オリパラともに全体の外形も欠けた部分の外形も正 12 角形であることがわかる (図 11)。菱形の辺の長さを L とすれば、全体の正 12 角形の辺の長さは 2L であり、欠けた部分のそれは L である。

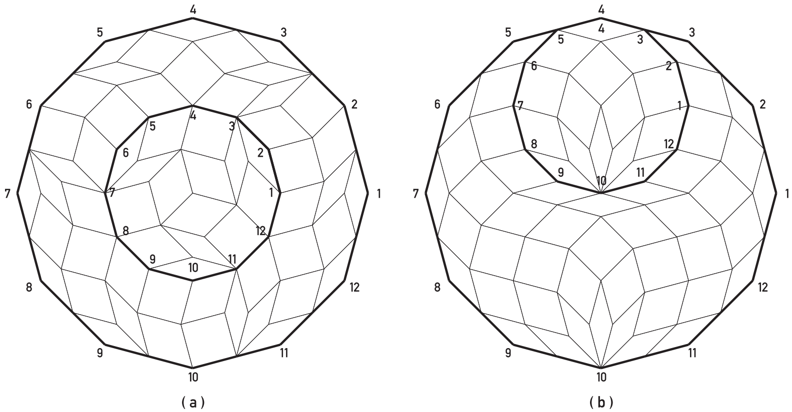


図 11　外形と欠けた部分はともに正 12 角形

3.8　頂点周りは 360 度

では、ここまで明らかになった幾何学的な特徴を用いて、オリパラとは異なるパターンのエンブレムを実際につくってみたい。

まずは、図 12 のように、(A) 30:150 を 24 個、(B) 60:120 を 24 個、(C) 90:90 を 12 個、合計 60 個の菱形を用意する。それら菱形の辺の長さはすべて L とする。また、辺の長さが 2L の正 12 角形の枠を用意する。準備ができたらジグソーパズルの要領で、60 個の菱形を順に正 12 角形の枠の中に敷き詰めてみる。図 12 は途中まで菱形を敷き詰めた状態を示している。

上手く菱形を敷き詰めることができれば、オリパラとは異なるパターンのエンブレムをつくることはできるだろう。しかしながら、図 12 (b) 中の e のように三角形の隙間ができてしまったり、あるいは菱形が重なってしまったりして、上手く敷き詰めることができない場合があり得る。人間ならばある

程度先読みしながら敷き詰めることができるかもしれないが、コンピュータ・プログラムはそんなに要領よく敷き詰めてはくれない。失敗したら最初からやり直すプログラムではあまりにも効率が悪すぎる。

それにしてもなぜ隙間や重なりができてしまうのだろうか？　ここで図 12 (b) 中の点 P と点 R に注目してほしい。点 P には 3 つの菱形が、点 R には 5 つの菱形が集まっており、点 P と点 R 周りには隙間も重なりもない。ということは、点 P と点 R に集まるそれぞれの菱形の内角を 1 つずつ足し合わせると点 P と点 R 周りで 360° になっているということである。逆にいえば、点 Q 周りはそれぞれの菱形の内角を足し合わせても 360° になっていないので隙間が空いているのである。

したがって、菱形を隙間も重複もなく敷き詰めるためには、菱形の頂点の中で外形上にないすべての頂点 (例えば点 P,R は含む、点 S,T は含まない) 周りにおいて、その頂点に集まる菱形の内角の和が常に 360° にならなくてはいけないということである。しかしながら、どのようにしてその制約を常に満たすのだろうか？

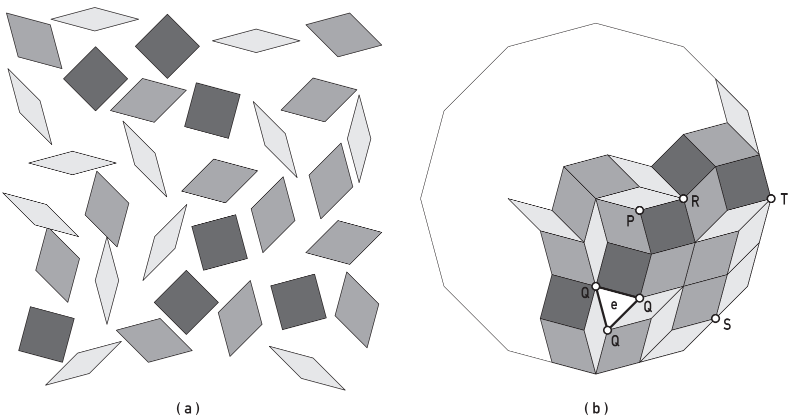


図 12　60 個の菱形を正 12 角形の枠の中に敷き詰めてみた途中経過の一例

4　双対図形の導出

第 3 章でみたように、筆者が REG を制作する前にわかっていた幾何学的特徴だけでは、オリパラとは異なるパターンのエンブレムを上手く生成することができなかった。したがってここからは筆者自身によって、他の幾何学的な特徴がないかをさらに探ってみることになる。結果的にみれば、その探求のプロセスはオリパラ・エンブレムの双対図形に迫るプロセスとなった。本章ではオリパラ・エンブレムからどのように双対図形を導出し、またその双対図形からどのようにオリパラとは異なるパターンのエンブレムを作成していったのか、REG 作成当時の試行錯誤を追体験していただけるように順を追って説明していきたい。

4.1　ゾーン

図 13 をみてほしい。まずは外形の正 12 角形に重なっている菱形の辺を 1 つ選ぼう。外形の正 12 角形の各辺は 2 つの菱形の辺によってできているので、選択肢は全部で 24 個ある。選ぶ菱形の辺はそのうちのどれを選んでもいい。例えば図 13 では、太線で示した辺 f を選択した。紙面上方向を 0 度として反時計回りを正の角度とすると、選択した辺 f は 15° に傾いた線分である。

次に、辺 f から出発して、辺 f に平行な線分、すなわち 15 度の線分を順に

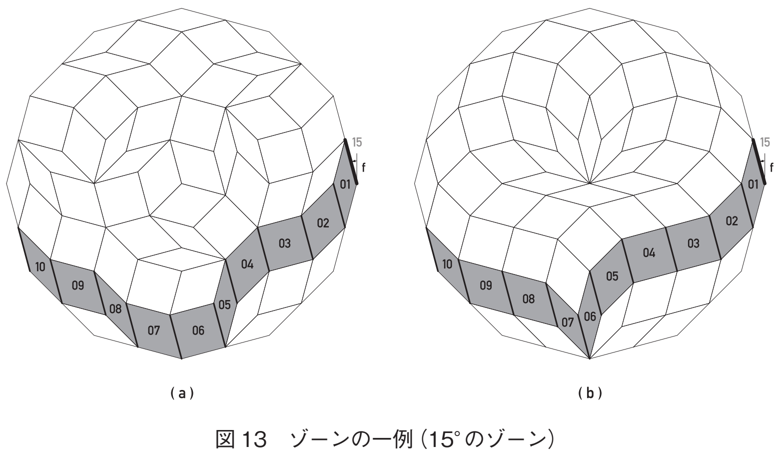


図 13　ゾーンの一例（15° のゾーン）

辿っていくことを考える。菱形は互いに平行な2種類の角度の線分で構成されているので、図13に示した01番の菱形から順に辺fに平行な線分を辿っていくと、隣り合った菱形が帯のように連なっていることがわかる。この帯状の菱形の連なりのことをここでは「ゾーン」と呼ぼう。図13に示したような辺fから始まるゾーンだけではなく、外形の正12角形に重なっている菱形の辺ならばどの辺から始めてもゾーンが存在することがわかるだろう。そして驚くべきことに、ゾーンを構成する菱形の数は、どの角度の線分を選択した場合でも常に10個なのである。

　このゾーンの存在に気がついたことが後に説明する双対図形への導出へとつながることになる。

4.2　ゾーンの交点に1対1対応する菱形

　次に、15°のゾーンの他に、もうひとつ105°のゾーンを選んでみよう。すると図14のように、2つのゾーンが重なる領域が1つできる。この領域は1つの菱形に対応している。先述したように、菱形は互いに平行な2種類の角度の線分で構成されているからである。

　本論では、γ°に傾いた菱形の辺の中点を順に結んだ折れ線を「γ°ゾーンライン」と呼び、太い折れ線で示す。さらに、γ°ゾーンラインとδ°ゾーンラ

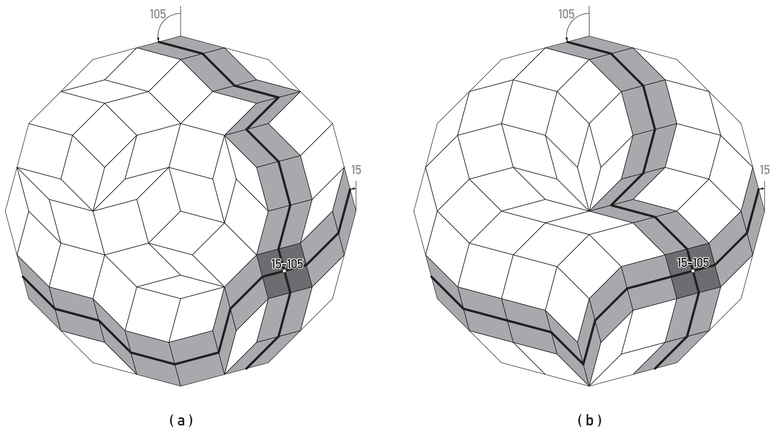


図14　15°ゾーンラインと105°ゾーンラインとの交点に対応する菱形は「15-105」

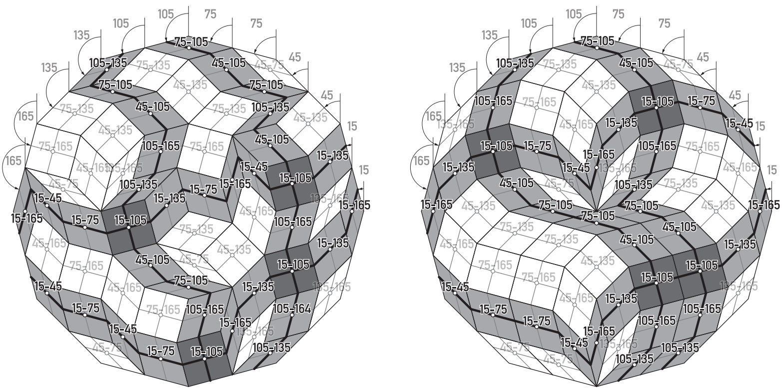
インの交点に対応する菱形に記号を割り振り、「γ - δ」と表記するものとする。したがって図 14 では、15° ゾーンラインと 105° ゾーンラインとの交点に対応する菱形は「15-105」と表記されている。

4.3　12 本のゾーンラインと 15 種類の菱形

図 15 はすべての角度のゾーンラインを描いた図である。外形の正 12 角形に重なっている菱形の辺の角度の種類は、(a) オリ (b) パラともに 15°、45°、75°、105°、135°、165° の 6 種類である。そして、それぞれの角度の辺が 2 本ずつある。したがって、ゾーンラインも 6 種類が 2 本ずつで合計 12 本あることがわかる。図 15 では、わかりやすいように、15° と 105° の 4 つのゾーンはグレーの面で、そして、15° と 105° の 4 つのゾーンラインは太線で強調してある。さらに 15° と 105° の 4 つのゾーンラインの交点に対応する菱形は濃いグレーの面で示している。

ここで、同じ角度のゾーンラインに着目すると、同じ角度のゾーンラインはお互いに交差しないことがわかる。また、2 つの γ° のゾーンラインは、それぞれ 2 つの δ° ゾーンラインと交差することから、同じ「γ - δ」という記号を持つ菱形は 4 つずつ存在することがわかる。

次に、同じ角度のゾーン内にある菱形の記号の種類とその順番に着目しよ



(a)　　(b)

図 15　12 本のゾーンラインと 15 種類の菱形

う。オリもパラも同じ角度のゾーン内にある10個の菱形の記号の種類は同じである。しかしながら、オリとパラではその記号の並ぶ順番が異なることがわかる。

4.4　ゾーンラインを角度と交点の順番を保ったまま直線に変形する

ここで少々飛躍したアイデアが頭に浮かぶ。折れ線状のゾーンラインを、まっすぐな直線に引き伸ばしてみてはどうかというアイデアである。なぜそのようなアイデアが思い浮かんだのかとは今となっては直感だったとしか言いようがないのだが、あえていえば、4.3節で見たように、同じ角度のゾーンラインは交差しないのであれば、互いに平行する直線なのではないかと推察したからである。

まずは、図15から12本のゾーンラインだけを抽出してみると図16のようになる。次に図17中で薄いグレーで示すように、原点Oを中心に円を描き、15°、45°、75°、105°、135°、165°という6種類の放射状の補助線を描いた。このとき、紙面右を0°とし、反時計回りを正とする。4.1節のように、なぜ紙面上を0°にしないのかは後述する。

その補助線をガイドとして、図16のゾーンラインの各交点を手動で少しずつ移動させ、すべてのゾーンラインを直線状にしたものが図17である。ただ

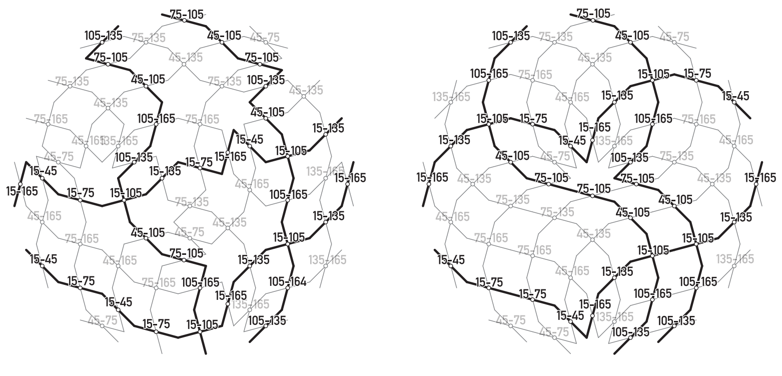


図16　(a) オリと(b) パラのゾーンライン

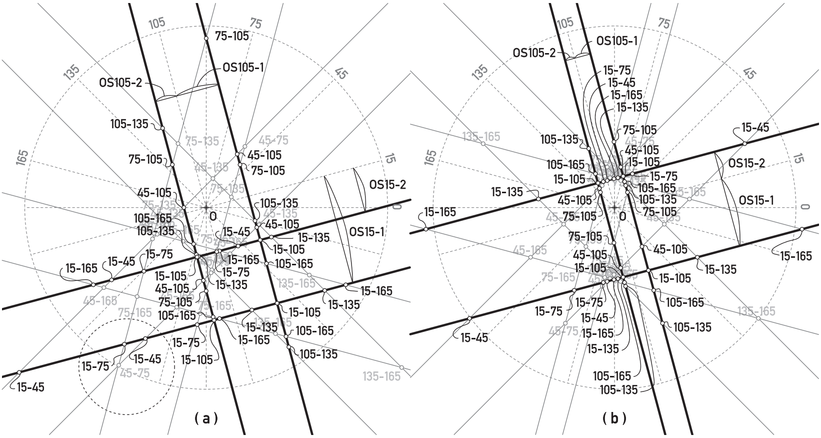


図 17　(a) オリと (b) パラのゾーンストレートライン

しその変形の際、(1) ゾーンライン上の交点の順番を変えないことと、(2) ゾーンラインの角度を保つことを制約とした。直線状にしたゾーンラインを折れ線状のそれと区別して、本論では「ゾーンストレートライン」を呼ぶことにする。

4.5　ゾーンストレートラインを平行移動する

図 17 (a) の左下の円で囲まれた範囲に注目してほしい。15° ゾーンストレートライン上には、左から「15-75 → 15-45」の順で交点が並んでいる。各ゾーンストレートラインと原点 O との距離を「オフセット距離」と呼び、γゾーンストレートラインが 2 本ある中で一方のオフセット距離を「OS γ -1」、他方を「OS γ -2」と表記すると、注目している円の中の 15° ゾーンストレートラインと原点 O とのオフセット距離は図 17 (a) 中に示した「OS15-1」である。このオフセット距離を少しずつ大きくしていく、つまり、15° ゾーンストレートラインを紙面下側に平行移動させていくようなアニメーションをイメージしてほしい。すると、あるオフセット距離になったときに、15° ゾーンストレートラインは交点「45-75」を超えることになる。このとき、15° ゾーンストレートライン上の交点の順番が入れ替わり、左から「15-45 → 15-75」の順で交点が並ぶことになる。

このように、図 17 の各ゾーンストレートラインをみると、(a) オリと (b) パラの違いは、原点 O からのオフセット距離の違いとして現れていることがわかる。オフセット距離を変化させることでゾーンストレートラインが平行移動し、その平行移動によってゾーンストレートライン上の交点の順番が変化しているのである。4.2 節でみたように、このゾーンストレートライン上の交点は同じ記号を持つ菱形に対応しているので、ゾーンストレートライン上の交点の順番が (a) オリと (b) パラの菱形の敷き詰め方の違いであると推察される。

だとすれば、ゾーンストレートラインをランダムに平行移動させ、各ゾーンストレートライン上の交点の順番を変えることで、オリパラとは異なるパタ

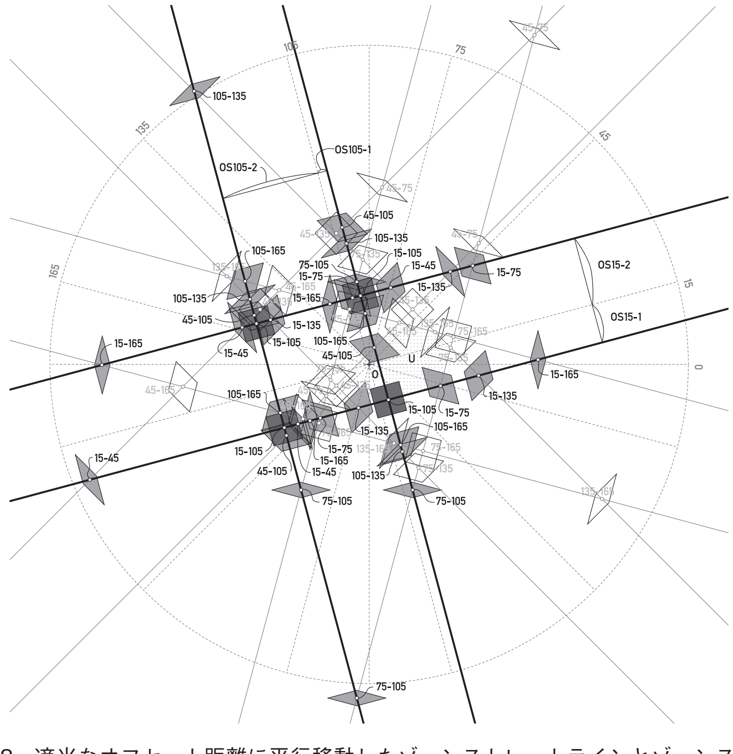


図 18　適当なオフセット距離に平行移動したゾーンストレートラインとゾーンストレートラインの交点に対応する菱形の配置

ーンのエンブレムを生成させることができるかもしれない。実際に、各ゾーンストレートラインをランダムに平行移動させたものが図 18 である。ただし、同じ点に複数の交点が重なってしまうと、その交点に対応する菱形が 1 つに定まらなくなってしまうので、同じ点で 3 つ以上のゾーンストレートラインが交差しないように注意して平行移動しなければならない。

次に、図 18 のゾーンストレートラインの交点に対応する菱形を描くことを考える。$\gamma°$と$\delta°$のゾーンストレートラインの交点に対応する菱形は、それぞれのゾーンストレートラインに直交する線分を用いて描くことができる (線分の長さは L とする)。4.4 節と同様にゾーンストレートラインの角度は紙面右方向を 0 度にしているので、それらの線分の角度はそれぞれ (γ＋ 90)°と (δ＋ 90)°である。しかしながらそれでは、菱形の記号が「(γ＋ 90) - (δ＋ 90)」となり、ゾーンストレートラインの交点の記号「γ - δ」と食い違ってしまう。そこで、ゾーンストレートラインの交点と菱形の記号を対応させるために、4.1 節で菱形の辺の角度を測るときは紙面上方向を 0 度としたのである。以上のようにして描いた菱形の中心をゾーンストレートラインの交点に配置する。

4.6　交点の順番を保ったまま菱形を繋げる

図 19 をみてほしい。図 18 の各ゾーンストレートライン上に配置された菱形の順番を変えずに、隣り合った菱形の辺と辺を繋げていくと、驚くべきことに、図 19 のような、オリパラとは異なるエンブレムを生成することができた。

オリパラや図 19 のような菱形で構成されたエンブレムは、図 17 や図 18 のようなゾーンストレートラインに変換可能であり、その逆も然りである。つまり、ゾーンストレートラインは菱形を敷き詰めた図形の「双対図形」になっているのである。

この時点では、菱形の頂点の中で外形上にないすべての頂点周りにおいて、その頂点に集まる菱形の内角の和がなぜ常に 360°となるのかその理由はよくわかっていなかった。しかしながら、菱形を隙間も重なりもなく敷き詰めるための手順 (アルゴリズム) が先にわかってしまったのである。

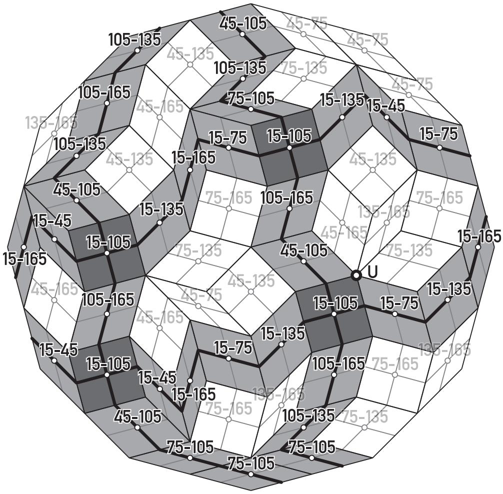


図 19　オリパラとは異なるパターンのエンブレム

4.7　REG を生成する手順

オリパラとは異なるパターンのエンブレムを作成するためのシステム (=REG：Random Emblem Generator) の制作手順を下記にまとめる。

STEP1：15°、45°、75°、105°、135°、165°の 6 種類のゾーンストレートラインをそれぞれ 2 本ずつ合計 12 本描く。

STEP2：同じ点で 3 つ以上のゾーンストレートラインが交差しないようにゾーンストレートラインを平行移動する。

STEP3：γ°と δ°のゾーンストレートラインの交点を「γ - δ」と表記し、それぞれのゾーンストレートラインに直交する線分を用いて菱形を描き（線分の長さは L とする)、その菱形の中心をゾーンストレートライン の交点上に配置する。その際、ゾーンストレートラインと菱形の辺が直交するような角度で菱形を配置する。

STEP4：ゾーンストレートライン上に配置された菱形の順番を変えずに、隣り合った菱形の辺と辺を繋げていくと、オリパラとは異なるエンブレムを生成することができる。

5　考察

3.8 節でみたように、オリパラで使用している 60 個の菱形を一旦ばらばらにしてジグソーパズルのように敷き詰めていっても、隙間や重なりができて上手く敷き詰めることができなかった。しかし、第 4 章でみたように、双対図形であるゾーンストレートラインを描いてから、その交点に対応する菱形を順番通りに並べていくと上手く敷き詰めることができた。ということは、菱形の頂点の中で外形上にないすべての頂点周りにおいて、その頂点に集まる菱形の内角の和が常に 360° にならなくてはいけないという制約を知らず知らずの内に満たしていたということである。本章ではその幾何学的な理について考察していきたい。

5.1　なぜ頂点周りに集まる菱形の内角の和は常に 360° になるのか？

図 18 の網掛けをしてある領域 U を拡大したものが図 20 である。領域 U は各ゾーンストレートラインの 6 つの交点によってできた閉じた多角形である。ゾーンストレートラインと菱形の辺が直交するようにゾーンストレートラインの交点に菱形の中心を配置したとき、多角形 U の内側を向く菱形の内角は、多角形 U の各頂点の外角に等しい。

ここまでくると、中学 2 年生のときに習うある多角形の定理を思い出された方もいるのでないだろうか。その定理とは、多角形の外角の和は常に 360° になるという幾何学的な理である。

多角形Uの内側を向く菱形の内角は多角形Uの各頂点の外角に等しいので、多角形の外角の和が常に 360° になるということは、多角形 U の内側を向いている菱形の内角をひとつひとつ集めると常に 360° になるということである。この幾何学的な理によって多角形 U の頂点に対応する 6 つの菱形は、図 19 の点 U 周りにおいて、隙間も重なりもなく敷き詰めることができるのである。

こうみると、図 18 の多角形 U と図 19 の点 U は 1 対 1 対応していることがわかる。この対応関係は領域 U に限らず 12 本のゾーンストレートラインによって作られた閉じた多角形すべてに当てはまる。それらの多角形の外角の和が常に 360° になるという幾何学的な理によって、菱形の頂点の中で外形上にないすべての頂点周りにおいて、その頂点に集まる菱形の内角の和が常に

360°となるのである。

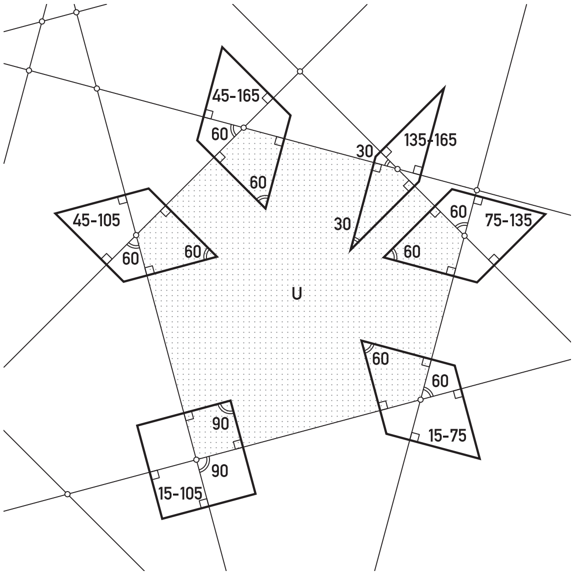


図 20　図 18 の領域 U の各頂点に配置された菱形

5.2　菱形の数に関する考察

表 1 は、15°、45°、75°、105°、135°、165° の 6 種類のゾーンストレートラインをそれぞれ 2 本ずつ合計 12 本を縦軸と横軸にとり、各ゾーンストレートラインのすべての交点を表したマトリクスである。縦軸が自分のゾーンストレートライン、横軸が相手のゾーンストレートラインだとすると、各セルはゾーンストレートラインの交点である。

表１　12 本のゾーンストレートラインとその交点

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		15	15	45	45	75	75	105	105	135	135	165	165
1	15	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90	120:60	120:60	150:30	150:30
2	15	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90	120:60	120:60	150:30	150:30
3	45	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90	120:60	120:60
4	45	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90	120:60	120:60
5	75	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90
6	75	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120	90:90	90:90
7	105	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120
8	105	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150	60:120	60:120
9	135	120:60	120:60	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150
10	135	120:60	120:60	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-	30:150	30:150
11	165	150:30	150:30	120:60	120:60	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-
12	165	150:30	150:30	120:60	120:60	90:90	90:90	60:120	60:120	30:150	30:150	-	-

相手のゾーンストレートラインのうち、自分自身、および、自分と同じ角度のゾーンストレートラインとは交わることはできないので、表 1 の該当するセルには「-」を表記している。12 本の相手のゾーンストレートラインからその 2 本を引くと、自分のゾーンストレートラインが交わることができるのは 10 本のゾーンストレートラインである。つまり、それぞれのゾーンストレートライン上に 10 個の交点があるので、4.1 節でみたように、ゾーンを構成する菱形の数は 9 個でも 11 個でもなく、常に 10 個なのである。

自分のゾーンストレートラインは全部で 12 本で、それぞれの交点の数は 10 個だから、交点の数は全部で 120 個あるように思えるが、自分からみた相手と相手からみた自分の交点をダブルカウントしているので、実際の交点の数は全部で 60 個である。交点の数と菱形の数は対応しているので、オリパラだけではなく、オリパラとは異なるパターンのエンブレムに関しても、菱形の数は常に 60 個となるのである。

表 1 の各セルには、15°、45°、75°、105°、135°、165° の 6 種類のゾーン

ストレートラインを用いて作成できる菱形の内角の組み合わせを示している。菱形の内角の種類は、(A) 30:150、(B) 60:120、(C) 90:90 の 3 種類であることがわかる。さらに、各菱形の種類は表 1 のマトリクスで色分けしてみると、その種類の数はそれぞれ A が 24 個、B が 24 個、C が 12 個であることがわかる。

以上のように、エンブレムだけをみていてはわからなかった問題に対して、その双対図形が幾何学的な解を与えてくれるのである。

5.3　N.G. de Bruijn によるペンローズ・タイリング

REG を SNS で公表した後、1.4 節で述べた『幾何学は誰のもの？』という鼎談にて、上記のようなエンブレムの背後に隠された幾何学的な理について説明した。その鼎談の後、会場にいたある数学者に声をかけられ、「N.G. de Bruijn という数学者が、ペンローズ・タイルの敷き詰めで同様の手法をすでに用いているよ」と教えてくれた。

ペンローズ・タイルとは、イギリスの物理学者ロジャー・ペンローズが考案した 2 種類の菱形を用いた平面充填パターンである。その 2 種類の菱形の内角の組み合わせは「72:108」と「36:144」である。オランダの数学者である N.G. de Bruijn は、0° 36°、72°、108°、144° という 5 本のゾーンストレートラインの交点からペンローズ・タイルを敷き詰めるという、本論と同様の手法を、1981 年に論文にまとめていたのである [7)]。

本論で述べてきた幾何学的な理の探求は、実は車輪の再発明であったというオチなのだが、不思議と落胆はなかった。それよりむしろ、本論のような 3 種類の菱形以外にペンローズ・タイルも同様の手法で敷き詰められるならば、他の内角の菱形にも一般化できるのではないかという示唆を得たことによって、その後実際に REG を他の内角の菱形にも一般化し、『RHOMBUSOME』というシステムへと拡張したのである (図 21)。

6　おわりに

本論考では、筆者が作成した REG (Random Emblem Generator) というシステムの開発を通して、野老朝雄がデザインした東京 2020 オリンピック・パ

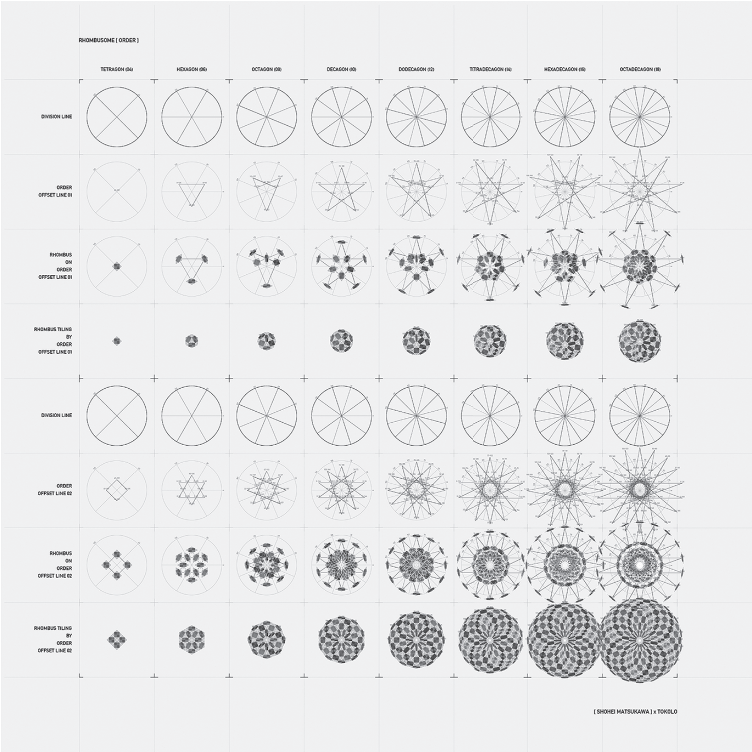


図 21　RHOMBUSOME

ラリンピック・エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を明らかにすることを試みた。

第 3 章では、一見すると長方形で作られているように見えるオリパラ・エンブレムが、実は菱形によって作られていること、その菱形の一辺の長さは L で、かつ、菱形の内角の組み合わせが 30 度 150 度である菱形が 24 個、60 度 120 度が 24 個、90 度 90 度が 15 個の 3 種類であること、そしてそのような 60 個の菱形が一辺の長さが 2L の正 12 角形の中に敷き詰められていることを示した。しかしながら、そのような幾何学的な特徴だけでは、オリパラとは異なるパターンのエンブレムを生成するようなコンピュータ・プログラムを作成することが困難であった。そこで第 4 章では、オリパラ・エンブレム

からその双対図形であるゾーンストレートラインを導出した。そのゾーンストレートラインを平行移動させることでゾーンストレートラインの交点の順番を変更し、その交点に対応する菱形を順に並べていくことでオリパラとは異なるパターンのエンブレムが生成できることを示した。第5章では、敷き詰められた菱形の頂点がゾーンストレートラインによって切り取られる多角形に対応することを示し、多角形の外角の和が常に360°になるという幾何学的な理によって、菱形の頂点の中で外形上にないすべての頂点周りにおいて、その頂点に集まる菱形の内角の和が常に360°となることを明らかにした。

以上より、東京2020オリンピック・パラリンピック・エンブレムの背後に隠された幾何学的な理を明らかにするという本論の目的は達成されたと考える。

最後にひとつだけまだ答えていない問題がある。1.4節でも触れたが、オリパラと同じ60個の菱形を正12角形の外形に敷き詰める場合、その敷き詰め模様の総数は何パターンになるかという問題である。白川俊博と荒木義明の計算によれば、対称なものを同一と捉えると、その数なんと237億7949万2214パターンあるそうである[8)]。

アルゼンチンの作家ホルヘ・ルイス・ボルヘスは『バベルの図書館』[9)]という短編小説の中で、一生かけても読むことができないほどの図書の中からお目当ての本を探す司書の姿を描いたが、野老朝雄は237億7949万2214パターンの中からオリンピック、パラリンピック、NIPPONフェスティバルの3つのエンブレムを探し当てたのである。そう考えれば、街中にあふれるエンブレムも何か特別なものに見えてこないだろうか。

注

1) 東京2020公式HP「東京2020エンブレム」https://tokyo2020.org/ja/games/emblem/（2020年5月1日アクセス）
2) togetter「野老朝雄さんの東京オリンピック・エンブレムについて考察したりジェネレーターを作ったりする人々」https://togetter.com/li/970716（2020年5月1日アクセス）
3) MIT Media Lab, Full of Squares, https://www.underconsideration.com/brandnew/archives/mit_media_lab_full_of_squares.php（2020年5月1日アクセス）
4) 野老朝雄、水野祐、松川昌平、豊田啓介『緊急鼎談：幾何学は誰のもの？』https://noizear.com/noiz-ear-recture-scrabmle-/（2020年5月1日アクセス）

5) 松川昌平 (2017)「「建築家なしの建築」の建築家になるためのアルゴリズミック・デザイン」『KEIO SFC JOURNAL』17 (1) https://gakkai.sfc.keio.ac.jp/journal_pdf/SFCJ17-1-05.pdf (2020 年 5 月 1 日アクセス)
6) 「東京 2020 公式アートポスター」https://tokyo2020.org/ja/games/games-artposter/ (2020 年 5 月 1 日アクセス)
7) N.G. de Bruijn (1981) "Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. Ⅱ", *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. 84(1), pp. 53-66.
8) 野老朝雄、荒木義明、山田久美 (2019)「東京五輪のエンブレムにかくされた幾何学」『科学雑誌 Newton』9, pp. 100-109.
9) ホルヘ・ルイス・ボルヘス (1993)『伝奇集』岩波書店 .

〔受付日　2020. 7. 8〕