

Title	正多面体図法を用いた歪みの少ない長方形世界地図図法の提案
Sub Title	An original two dimensional map projection and its applications in geopolitical themes
Author	鳴川, 肇(Narukawa, Hajime)
Publisher	慶應義塾大学湘南藤沢学会
Publication year	2017
Jtitle	Keio SFC journal Vol.17, No.1 (2017.) ,p.208- 232
JaLC DOI	10.14991/003.00170001-0208
Abstract	球面世界の地理情報の視覚化のためには、平面上の長方形に収める世界地図図法が有用である。従来の図法では、面積の歪みが発生することや、任意の地域を地図の中心に再設定することが難しいなどの問題があった。本論文では、これらの問題を改善した、筆者が考案した世界地図図法について述べる。まず、正四面体を用いた多面体図法の操作によって、全方向に連結できる平面充填地図の作成が可能であることを示す。次に従来の地図図法との比較によって、この図法が長方形化の種類、面積と図郭線の比率、分割領域間の面積比の誤差、地図の中心の移動可能な方向数において優れていることを示す。次いで、この図法の特性を活かした用法として、歴史上の各時代の帝国の領土面積を一望できる地図を製作する。
Notes	特集 DesignX * XDesign : 未知の分野における新たなデザインの理論・方法の提案とその実践 研究論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=0402-1701-0208

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

[研究論文]

正多面体図法を用いた歪みの少ない 長方形世界地図図法の提案

An Original Two Dimensional Map Projection and Its Applications in Geopolitical Themes

鳴川 肇

慶應義塾大学大学院政策・メディア研究科准教授

Hajime Narukawa

Associate Professor, Graduate School of Media and Governance, Keio University

Abstract: 球面世界の地理情報の視覚化のためには、平面上の長方形に収める世界地図図法が有用である。従来の図法では、面積の歪みが発生することや、任意の地域を地図の中心に再設定することが難しいなどの問題があった。本論文では、これらの問題を改善した、筆者が考案した世界地図図法について述べる。まず、正四面体を用いた多面体図法の操作によって、全方向に連結できる平面充填地図の作成が可能であることを示す。次に従来の地図図法との比較によって、この図法が長方形化の種類、面積と図郭線の比率、分割領域間の面積比の誤差、地図の中心の移動可能な方向数において優れていることを示す。次いで、この図法の特徴を活かした用法として、歴史上の各時代の帝国の領土面積を一望できる地図を製作する。

A world map projection that keeps following features benefits in visualizing the state of present world. The features are a map fits in a rectangle, a map preserving size and a map able to relocate its center. The author assumes that the combination of following methods can be a solution for it. The methods are an existing tetrahedral projection, an original solid-angle-mapping method, an original multi-layered-mapping method and an existing tessellation method. The paper introduces an original projection by the combination method. The paper examines it by comparison with existing cylindrical projection, Dymaxion map and other prior arts, and concludes the map obtains the above-mentioned merits. Thus the paper concludes the map benefits in visualizing the state of present world.

Keywords: 図法、多面体、球面幾何学、地図表現
notation, polyhedra, spherical geometry, thematic mapping

1 序論

地球上の地理情報を一望するために、様々な世界地図図法が提案されてきた。世界地図を用いて地球全域に分布する世界情勢データを視覚化する際は、メルカトル図法（メルカトル，1569）^[1]を含む円筒図法を用いられることが一般的である。約 247 テラバイトの地図情報を広く一般に提供（2008 年調査）するグーグルマップ（松村，2008）^[2]は、メルカトル図法を採用した一例である。しかしメルカトル図法にも課題がある。極地周辺の面積が実際よりも大きく表記される点である。これは地球の赤道部分に外接する円筒に投影する手法に起因する。

この課題についてこれまで、複数の地図図法が提案された。しかし、図郭を長方形化すると面積の歪みの偏りが発生する。歪みを低減させようとする断裂法のように、連続する部分の地図投影の歪みは少なくなるが、断裂部分で図形が途切れ、つながりがわかりにくくなるのが欠点である（日本国際地図学会，1998）^[3]。

さらに、地図の中心を再設定して世界地図を再表示する際、円筒図法では赤道に沿って（東西方向）中心が移動可能である。一方、南北方向への中心移動は球面から再投影を行う必要があった。

以上を踏まえ本論文では、下記の特徴を同時に満たす世界地図図法によってこれまで世界地図図法が抱えてきた課題を解決できると仮説を立て、世界地図図法の考案、及び既存の世界地図図法との比較検証を行う。

- (1) 図郭が長方形である世界地図図法を考案する。
- (2) 面積の歪みの偏りを減らす。
- (3) 平面化された世界地図の一部を移動する編集操作で、円筒図法より多くの地域を地図の中心に設定して再表示可能な世界地図図法を考案する。

なお地図図法を論じるにあたり、地球を回転楕円体または 299/300 の扁平率を簡略化し球体と設定する場合がある。本論文では球体と設定し論じる。

2 従来の世界地図図法

本論文で取り上げる仮説に関連する従来の世界地図図法を説明する。まず円筒図法の中から正角図法と正積図法の事例を説明する。次に正多面体図法の中から面数の最も多い正二十面体と面数の最も少ない正四面体の事例を説明する。さらに本論文と関連のある整合図法による事例を説明する。

2.1 円筒図法

2.1.1 メルカトル図法

メルカトル図法は、赤道に接する円筒に地理情報を投影した世界地図である（図1）。このとき円筒には底面と上面がないものとする。地球を円筒に投影し、その円筒を平面に展開することで長方形の世界地図ができる。この世界地図図法では航程線が直線になる。また正角図法である。



図1 メルカトル図法

2.1.2 ランベルト正積円筒図法

ランベルト正積図法（ランベルト、1772）^[4]は、メルカトル図法と同じ円筒図法である正積図法である。図2の中央部分に示す長方形の世界地図がランベルト正積図法である。面積の歪みを修正するために南北方向に地図を圧縮し面積の歪みをなくした。この修正の結果、高緯度地域においてメルカトル図法と比較して形がさらに扁平になる。

またメルカトル図法にも言えることだが、東西に中心移動させて世界地図を再構成が可能であるが、南北方向の中心移動は不可能である。

2.2 正多面体図法

2.2.1 正二十面体図法

R. B. フラーはダイマキシオン・マップを考案した（フラー、1946）^[5]（図3）。

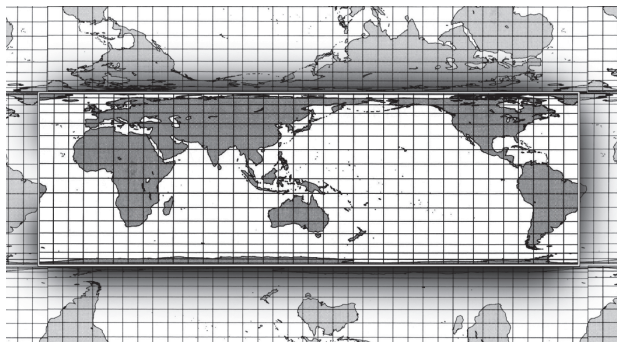


図2 ランベルト正積図法

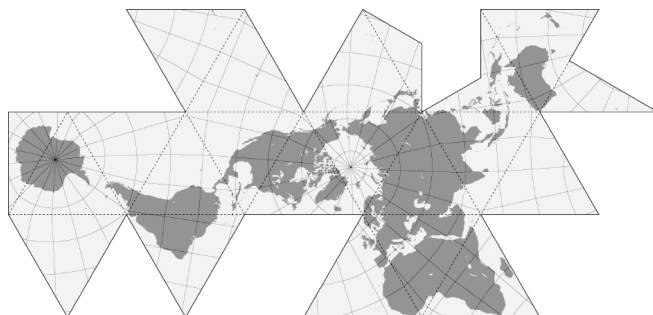


図3 ダイマキシオンマップ

この世界地図図法は、正二十面体を補助投影面に用い、正二十面体から作成される展開図を用いる。これは正多面体図法の一例である。展開図形状は複数ある。そのため主題図のテーマに沿って地図の中心を選び世界地図を再構成することが可能である。図3では、全ての陸地が分断されない展開図を採用している。

ダイマキシオンマップは球面上の地理情報、例えば陸の大きさと形を同時に極力正しく表示可能である。そのためメルカトル図法では表示が困難であった南極大陸の大きさと形状も好適に表示可能である。

2.2.2 正四面体図法

正多面体は5種類存在し(オイラー, 1750)^[6]、よって5つの正多面体図法

が知られている。ダイマキシオンマップはその一例である。正二十面体は正多面体の中で最も面数が多い。面数が多いものほど球形に近い。投影される多面体が球形に近いほど歪みが少ない(エドモンソンほか, 1987)^[7]。このことから、最も面数が少ない正四面体は、歪みが他の正多面体と比較して増大し、世界地図図法としては不利であると推測できる。以下は正四面体図法の事例である。

Map puzzle having periodic tessellated structure (アーセルストーン, 1986)^[8] (以下、Map Puzzle と呼ぶ) は正四面体を用いて、正三角形を元にしたピースを複数つなぎ合わせるパズルを提案している。隣接するピース同士は地理関係が繋がる。

また Lee's Projection (リー, 1965)^[9] は正四面体を用いた多面体図法を用いた正三角形の正角図法である(図4)。

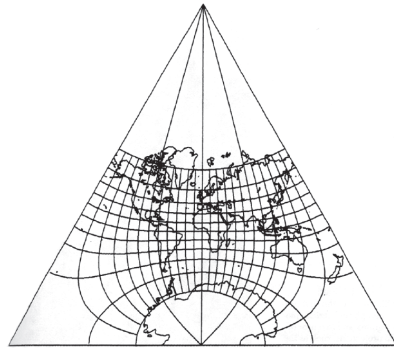


図4 Lee's Projection

2.3 その他の図法

2.3.1 Peirce's projection

Quincuncial Projection (ピアース, 1879)^[10] は正方形の正角図法である。シュナイダーはこの図法を、地球を北半球1つと南半球4つの領域に分け、これら5つの領域を一体化することで球面上の地理情報を正方形に写像する図法、と定義している(シュナイダー, 1997)^[11]。シュナイダーは、この世界地図図法は縦横斜めに平面充填が可能であると考えた。このとき、地図の境界線上において地理関係が連続性を保たれる。この世界地図図法は正角図法である。

2.4 これまでの世界地図図法の問題点

メルカトル図法について政春は、低緯度地方に対して高緯度地方の面積が大幅に拡大され、両極は表現不可能であるため世界全図には適さない、と説明している(政春, 2011)^[12]。また地図の緯線方向の縮尺が異なることも

課題である。この地図上での赤道における左右端の長さは地球上における40000kmを表す。一方、北緯85度上においての左右の長さは地図上では赤道と同じ長さに描かれるが、球面上では約3486kmである。

平面化された地図の一部を物理的に移動する編集によって世界地図の中心移動（以下、中心移動と呼ぶ）が東西方向において可能であり、南北方向においては不可能である。

現在、地図の中心移動はデジタル地図により全方向で可能である。コンピュータ画面上で所望する地域を中心に投影の再計算を繰り返すことが実行可能であるためだ。しかし地図上に表示する情報量が多い場合、中心を変えるごとに球体から平面への再計算を行い、表示する際には、コンピュータに相応の計算能力が必要になる。

ランベルト正積図法について政春は、赤道付近は歪みが少ないが高緯度に行くに伴って東西には拡大され南北には圧縮されるという形状の歪みが大きくなると指摘している。これは地球上では高緯度に向かうにつれて一定経度差の経度に挟まれた緯線の長さが小さくなるのに、この図法ではこの長さが一定であり、面積を正しく保つためにこれを補うように南北方向に圧縮するためである、と指摘している（政春, 2011）^[13]。

また世界地図の中心移動が東西方向において可能なものの南北方向には不可能である。

ダイマキシオンマップが用いる正二十面体の展開図はいずれも図郭線が20本以上の線分により構成される複雑な形状になる。ここに、世界地図の図郭の総延長の相対的な長さによって「複雑な形状」を比較検証する。図1に示すメルカトル図法において、世界地図全体の面積 S_m と図郭線の総延長 L_m の比率と図3に示すダイマキシオンマップにおいて、世界地図全体の面積 S_d と図郭線の総延長 L_d の比率を比較してみる（以下、面積/図郭線比率と呼ぶ）。

$$S_m : L_m = 1 : 4.10$$

$$S_d : L_d = 1 : 7.48$$

この比較結果よりダイマキシオンマップは同じサイズのメルカトル図法よ

りも図郭線が 1.82 倍長いことがわかる。この長い図郭線により図 3 に示すダイマキシオンマップでは、太平洋が 3 つの領域に分断されたと推測することが可能である。一方メルカトル図法のような長方形の世界地図図法では図郭線が短いため分断が少ない、と言える。

Map puzzle 及び Lee's Projection は、いずれも正四面体の頂点付近の面積の歪みが集中する。

Quincuncial Projection は面積を正しく描くことが不可能であり、正方形地図の辺の中点付近での歪みが集中する (図 5)。

図 6 はこれら既存の世界地図図法を本論文で取り上げる 3 つの特徴に基づいて分類したものである。特徴 1：図郭が長方形である、特徴 2：高緯度地域に面積の歪みが偏らない、特徴 3：多方向に地図の中心を移動し所望する地域を中心にした世界地図を再配列可能である、の 3 つの特徴に基づいている。このときハッチ部分で図示した領域 C に該当する既存世界地図はないことがわかる。つまり 3 つの要件を同時に満たした世界地図は存在しない。

ここで取り上げた世界地図図法に限らず、全ての世界地図図法に関して、

課題 1：世界地図の図郭が長方形である

課題 2：面積の歪みを低減する

課題 3：平面化された世界地図の一部を物理的に移動する操作により多方向に中心を移動できる

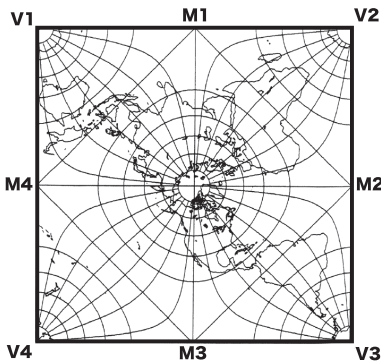


図 5 クインカンシャル図法

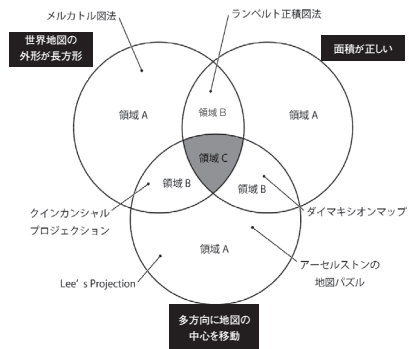


図 6 先行技術の比較

この3つの課題を同時に満たすことのできる世界地図はこれまでなかった。

3 提案手法：オーサグラフ図法

第2章で記載の目的は、メルカトル図法のように長方形に写像可能である、なおかつ面積の歪み、特に高緯度地域に面積の歪みが少ない、さらには平面化された世界地図の一部を物理的に移動する編集操作により多方向に中心を移動し世界地図を再配列可能である、という要件を同時に満たす世界地図を考案することで達成される。

図7は筆者が考案した世界地図図法である。この図法をオーサグラフ図法と命名する。正四面体を用いた正多面体図法を応用したものがオーサグラフ図法である。上記目的達成要件を満たした提案手法の手順について以下に説明する。



図7 本論文で取り上げる世界地図

3.1 正四面体を用いた正多面体図法の投影手順

筆者は目的達成要件の一つを解決するために、円筒以外の補助投影面を用いて長方形の世界地図を製作することが解決手法になりうると仮説を立て、手法を考案した。円筒図法では必ず円筒の上下端部、つまり極地部分に大きな歪みが発生する。これを回避する狙いがある。

具体的な手法とは正四面体を用いた多面体図法を活用した写像である。この手順を以下に記述する。

- 手順 1 : 球面を面積が等しい球面三角形領域に 96 分割する (図 8)。
- 手順 2 : 曲面で構成された正四面体を球体に内接させる (図 9)。曲面正四面体の幾何学定義は後述する。96 個の球面領域からこの曲面正四面体を 96 分割した領域に各々写像する。このとき全体に対する面積比を維持しながら各分割領域を写像する。この写像を立体角写像と命名する。
- 手順 3 : 曲面正四面体の複数の面を一つの平面に統合しつつ、96 の曲面領域から正四面体を 96 分割した領域に再び写像する (図 10)。この多階層な写像を“多階層写像”と命名する。
- 手順 4 : 正四面体 P3 を展開することで、長方形世界地図を作成する (図 11)。

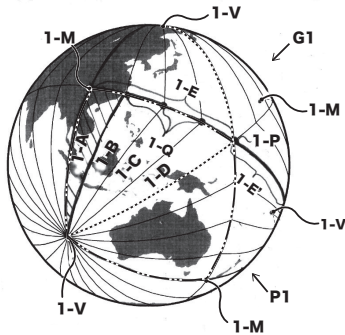


図 8 本論文で取り上げる写像手順 1

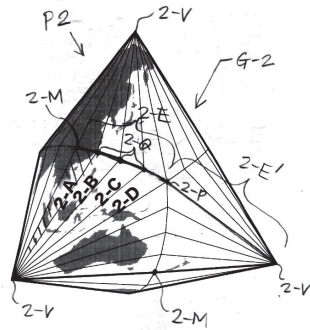


図 9 本論文で取り上げる写像手順 2

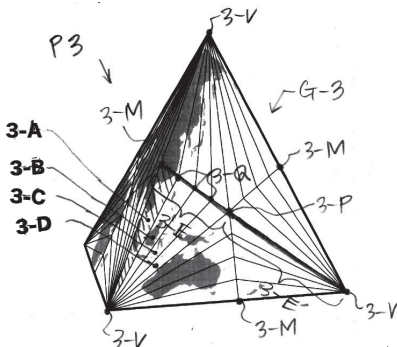


図 10 本論文で取り上げる写像手順 3

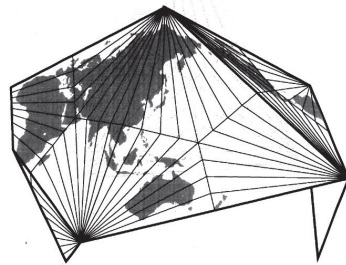


図 11 本論文で取り上げる写像手順 4

手順 5：正四面体の展開図は、正三角形及び平行四辺形状が一般的に知られている。図 12 に図示する長方形展開図は、正四面体の平行四辺形の展開図から一部を移動させることで出来上がる。具体的には図中の点線で囲まれた領域 AREA1、AREA2 を斜線領域 A1' および斜線領域 A2' に平行移動することで得られる。得られる長方形の縦横比は $\sqrt{3}:4$ である (図 12)。

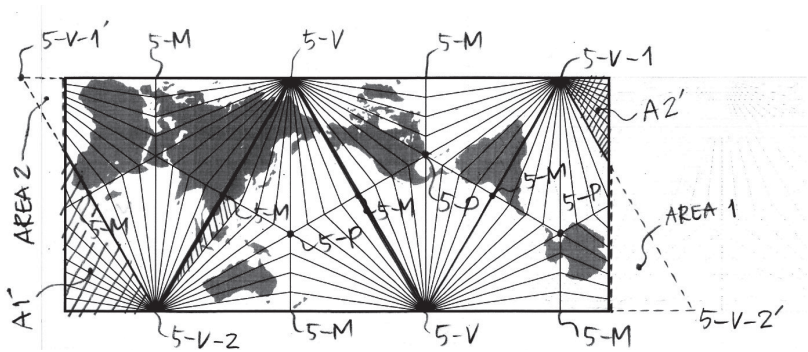


図 12 本論文で取り上げる写像手順 5

図 14 に図示の長方形世界地図は上記手順とは異なる手順で得られる。正四面体 P3 の中点 3-M から上方の頂点 3-V と左右の頂点 3-V を結ぶ線分に沿って切り開く。その結果、頂点 3-V は長方形の 4 頂点になる。この 4 頂点は展開手順を示す図 13 及び取得される世界地図 SC2 を示す図 14 において、点 3-M1、点 3-M2、点 3-M3、点 3-M4 となる。このとき世界地図 SC2 の縦横比は、 $1:\sqrt{3}$ となる。

3.2 提案する写像の方針

従来の正四面体図法 (図 4) は面積の歪みが大きく、面数の多い正二十面体 (図 3) は面積の歪みが少ないことから、筆者は面の数を多くすることで正四面体図法は改善されると考えた。そこで筆者は目的達成要件の一つを解決するために、写像前の球面と写像後の正多面体の面、その双方を正多面体の対称性に基づいて複数の三角形領域に均等に分割する。そして球面の分割領域

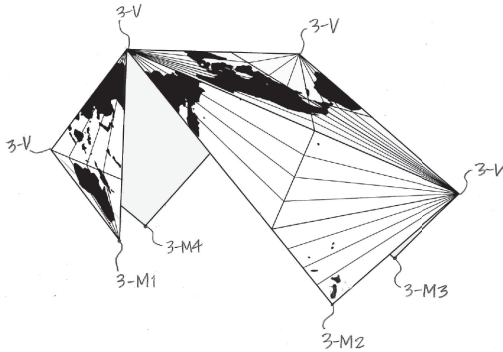


図 13 長方形展開方法の別例

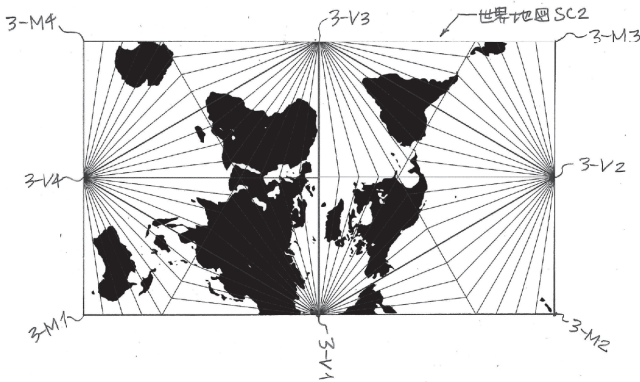


図 14 長方形展開図の別例

を正多面体の分割領域にそれぞれ写像してゆく。以上の手法が解決になりうると仮説を立てた。さらに球体と正多面体の間に、写像を経由させる第3の補助投影面を用意する。こうして写像を多階層化させることが解決になりうると仮説を立て、それぞれ立体角写像、多階層写像を考案した。

具体的には、正四面体の稜線による分割に加えて立方体の稜線と準正多面体である菱形12面体の稜線による分割を組み合わせるまず球面を24等分する。これにより正多面体でもっとも面数の多い正二十面体の面数を上回る面分割を行うことができる。さらにこの24等分領域を4等分すると球面を96等分することができる。

本研究では目的を達成するために、複数の多面体の組み合わせ、かつ写像の組み合わせをできる限り多く検証する。その中で最適解を発見する方針をとる。そのため各試験において効率よく様々な写像を検証する為に分割数を96に限定している。

3.3 立体角写像

立体角について図15を用いて説明する。球の全面積に対する特定領域の面積比を立体角と言う。立体角とは被写体2を球 S_1 の中心 O_1 から見る広がりを表す数で、通常ステラジアン(sr)で表す。その大きさは O_1 から被写体2に向けて結ぶ半直線の集合で出来る錐を O_1 を中心とする半径1の単位球面 S_1 で切る際、球面上部分の面積3で

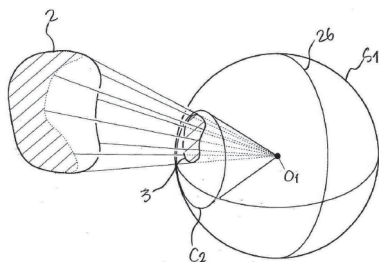


図15 立体角の考えを示す図

表す。特に O_1 から見た全空間の立体角は $4\pi sr$ 、半球の立体角は $2\pi sr$ である。つまり世界地図で言えば大陸等の面積に相当する。

次に本論文で提案する立体角グリッドについて説明する。写像の手順に関する記述において記載した手順1において図8に記載の球状正四面体は、符号1-Vを頂点とする球面に描かれた正四面体である。この球状正四面体の稜線は該球面上の大円弧で表される。1-Mは該球状正四面体の稜線の中点である。頂点1-Vとその対辺(稜線)の中点1-Mを大円弧で結ぶ。こうして描かれた3つの大円弧の交点が1-Pである。なお点1-Pと点1-Mを結ぶ大円弧は球状菱形12面体の稜線(2点鎖線)を形成している。また点1-Pと点1-Vを結ぶ大円弧は球状立方体の稜線(破線)を形成している。

交点1-Pと中点1-Mを結ぶ大円弧1-Eを4分割した点が1-Qである。次に大円弧1-E上に並んだ、点である点1-Q、中点1-M、および交点1-Pを頂点1-Vと結ぶ。こうしてできた面分割領域1-A、1-B、1-C、1-Dの面積は等しく、全球面を96分割している。この分割領域を生成しているグリッドを第1グリッドG1と命名する。

次に手順2において図9に記載の曲面正四面体は、符号2-Vを頂点とする曲面に描かれた正四面体である。2-Mは該曲面正四面体の稜線の中点である。中点2-Mに内接する球面の大円弧が2-Eである。頂点2-Vとその対辺(稜線)の中点2-Mを測地線で結んだ際、3つの測地線の交点が2-Pである。交点2-Pと中点2-Mを結ぶ測地線2-Eを4分割した点が2-Qである。このとき大円弧2-E上に並んだ点である、点2-Q、中点2-M、および交点2-Pを頂点2-Vと結ぶ。こうしてできた面分割領域2-A、2-B、2-C、2-Dの面積は等しく、曲面正四面体の全表面積を96分割している。この分割領域を生成しているグリッドを第2グリッドG2と命名する。

次に手順3において図10に記載の正四面体は符号3-Vを頂点とする該正四面体である。3-Mは該正四面体の稜線の中点である。頂点3-Vとその対辺(稜線)の中点3-Mを直線で結んだ際、3つの直線の交点が3-Pである。交点3-Pと中点3-Mを結ぶ直線3-Eを4分割した点が3-Qである。このとき点3-Qと中点3-M、および交点3-Pを頂点3-Vと結ぶ。こうしてできた面分割領域3-A、3-B、3-C、3-Dの面積は等しく、正四面体の全表面積を96分割している。この分割領域を生成しているグリッドを第3グリッドG3と命名する。

この写像に関与する3つの立体、球状正四面体、曲面正四面体、正四面体は頂点で接している。さらに写像に関与する3つの立体における点1-P、点2-P、点3-Pは同一直線上にある。その上で共通の分割手順を行うことで、各立体上の分割領域1-A、1-B、1-C、1-Dと2-A、2-B、2-C、2-Dと3-A、3-B、3-C、3-Dの相対的位置関係が対応している。これらの設定条件に従うことで、例えば第1グリッド上の分割領域面積1-Aの第1表面全面積S1に対する面積比と、これに対応する第2グリッド上の各分割領域面積2-Aの第2表面全面積S2に対する面積比が等しくなるよう設定されている。つまり、

$$(1-A)/S1=(2-A)/S2$$

という関係式が成り立っている。

こうして96分割された球面分割領域は96分割された曲面正四面体上の面

分割領域に各々写像される。例えば、球面分割領域 1-A は曲面分割領域 2-A に写像される。

この写像手順を繰り返す。96 分割された曲面正四面体上の面分割領域は 96 分割された正四面体上の面分割領域に各々写像される。こうして全体に対する面積比を維持しながら各分割領域を写像することができる。このような写像が立体角写像である。

3.4 多階層写像

オーサグラフ図法は写像に複数の補助投影面を用いる。これらは互いに多階層に重層している。重層している複数の補助投影面に対し多階層に写像を行う。さらにこれらの写像において、異なる投影方法を組み合わせる。以上が多階層写像の特徴である。

図 16 は多階層写像を説明する断面図である。これは図 8、図 9、図 10 で示す球状正四面体 P1、曲面正四面体 P2、正四面体 P3 の立体的な位置関係を図示する。球状正四面体の稜線の中点 1-M と、点 1-P とを結ぶ大円弧 1-E、および頂点 1-V と 1-P を結ぶ大円弧 1-E' と球の中心 O を含む面で切

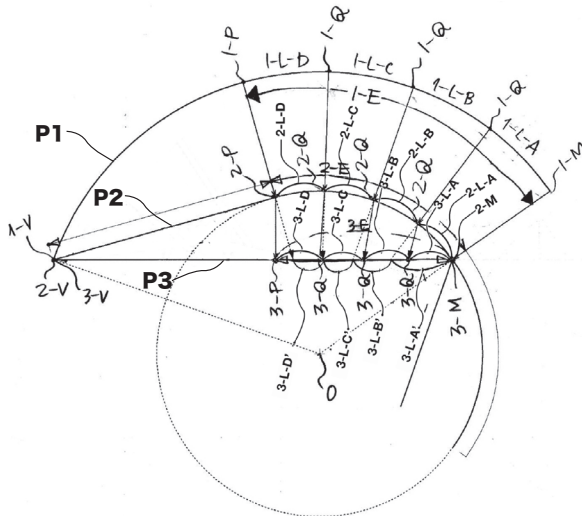


図 16 本論文で取り上げる写像の断面図

断した断面図である。

ここに P1 は写像前の球状正四面体である。P3 は写像後の正四面体、P2 は双方の立体の間に位置して写像を経由する曲面正四面体である。曲面正四面体 P2 の円弧 2-E は中点 2-M を通り、球体 P1 と中心 O を共有する円弧である。3 つの立体は頂点 1-V、2-V、3-V を共有しつつ、接している。この断面上に大円弧 1-E と 1-E'、円弧 2-E と線分 2-E' および線分 1-E と 1-E' が配される。

ここからは多階層写像の過程を説明する。

過程 1：まず球状正四面体 P1 から曲面正四面体 P2 に写像を行う。これは球体の中心 O に向けて光学的な心射投影に後述の微調整を加えたものである。

過程 2：ここに、球上の大円弧 1-E を 4 分割する点、1-P、1-Q、1-M は夫々、曲面上の点 2-P、2-Q、2-M に写像される。

過程 3：次に曲面正四面体 P2 から正四面体 P3 に第 2 の写像を行う。これは正射投影に、面積比を担保する目的で以下のような微調整を行うものである。

正四面体上の線分の長さは $3-L-A = 3-L-B = 3-L-C = 3-L-D$ である。球面上の大円弧の長さの比を $1-L-A : 1-L-B : 1-L-C : 1-L-D = 0.939 : 0.9593 : 1.000 : 1.064$ となるよう設定する。

このような設定に従い、球面状の分割領域が全て同じ面積を持ち、全球面の 96 分の 1 とする目的である。

次に曲面正四面体上の円弧の長さの比を $2-L-A : 2-L-B : 2-L-C : 2-L-D = 0.916 : 0.953 : 1.000 : 1.065$ となるよう、心射投影を微調整する。このような設定に従い、曲面正四面体の分割領域が全て同じ面積を持ち、全表面積の 96 分の 1 とする。

3.5 世界地図の中心移動

図 17 に示すように、得られた世界地図は隙間なく上下左右斜めに同じ世界

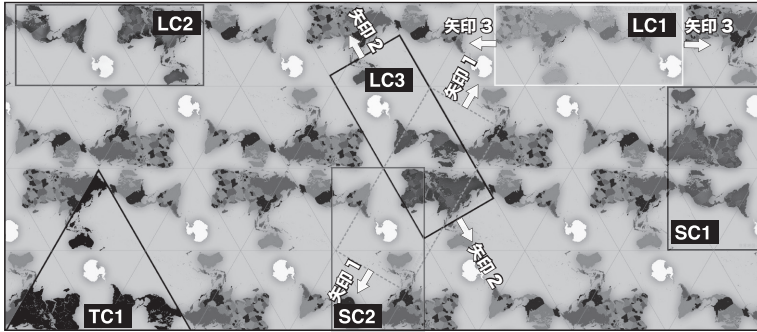


図 17 平面充填地図

地図を 8 方向に隣接させて並べる事ができる。このとき、地図の継目において地理関係がつながる。このような特徴は以下のような幾何学的特性から得られる。

任意の多面体の頂点に接する面の内角の和は 360 度以下になる（オイラー，1750）^[14]。図 10 に示す正四面体の頂点 3-V には 3 つの正三角形が接している。よって頂点に接する面の内角の和は 180 度となる。180 度は平角である一直線上になる。オーサグラフ図法はこの性質を利用している。図 12 において頂点 5-V を回転軸に、世界地図をつなぎ合わせると境界線付近の地理情報が 2 回回転対称でシームレスに繋がる。

図 17 から新たに世界地図 1 個分の長方形を、回転、連続移動、変形操作により抽出可能になる。四角い枠によって図示された LC1、2、3 は縦横比が $4 : \sqrt{3}$ の長方形世界地図、SC1、2 は縦横比が $1 : \sqrt{3}$ の長方形世界地図である。これらの世界地図は、すでに平面に展開された世界地図から新たに作成される世界地図である。つまり球面から長方形に再度写像を行う必要はない。

4 検証

4.1 既存の世界地図との図郭に関する比較

4.1.1 長方形の縦横比

球面の長方形化に関する検証をオーサグラフと既存の円筒図法の比較を通して行う。

ランベルト正積図法による世界地図の縦横比は約 1 : 3.12 である。図 1 に示すメルカトル図法の場合、縦横比は約 1:1.05 である。

オーサグラフにおいては、縦横比 $\sqrt{3} : 4$ (図 12) 及び縦横比 $1 : \sqrt{3}$ (図 14) の長方形世界地図が取得可能である。また図 14 において 4 点 3-V4、3-M1、3-M2、3-V2 によって規定される長方形領域を、3-V2 を回転軸に 180 度回転させることで、縦横比 $1:2\sqrt{3}$ の長方形世界地図も取得できる。もちろんこの特性はオーサグラフに限った特性でなく、正四面体を用いた正多面体図法、Map Puzzle と Lee's Projection においても、そのような提案はされていないものの、幾何学的な特質として可能である。

Quincuncial Projection は図 5 における正方形以外にも、正方形 M1M2M3M4 に直角三角形 V1M1M4、直角三角形 V2M1M2、直角三角形 V3M2M3、直角三角形 V4M3M4 を再配列させることで縦横比 1:2 の長方形世界地図を取得できる。この縦横比が 1:2 の世界地図は Guyou により提案された (Guyou, 1887) ^[15]。以下、Guyou's Projection と呼ぶ。また Peirce 及び Guyou らは提案していないが、長方形 V1V2M2M4 を中点 M2 を回転軸に 180 度回転させることで縦横比 1:4 の長方形世界地図も幾何学的な特質としては可能である。

表1 縦横比による長方形の種類

	縦横比による長方形の種類
円筒図法	1
Map Puzzle と Lee's Projection	3
Quincuncial Projection	3
オーサグラフ	3

4.1.2 面積 / 図郭線比率

面積 / 図郭線比率に関する検証をオーサグラフと正二十面体を用いた正多面体図法の比較を通して行う。図 12 及び図 14 に図示するオーサグラフの世界地図全体の面積 S と図郭線の総延長及び L の比率は夫々、表 2 の通りである。この表から縦横比が異なる 2 種類のオーサグラフ図法の面積 / 図郭線比率が既存の円筒図法とほぼ同じ値であることがわかる。一方、ダイマキシオ

表2 面積／図郭線比較

	S	L
メルカトル図法	1	4.1
ダイマキシオンマップ	1	7.48
オーサグラフ (図 12)	1	4.36
オーサグラフ (図 14)	1	4.15

ンマップは面積／図郭線比率が 7.48 であり、断裂法と同様に、世界地図に断裂部分のつながりが途切れる。

断裂部分におけるつながりは、達成要件 3「世界地図の中心移動」における平面充填と関連がある。地図の平面充填が、世界地図全体の図郭線上でもつながりを維持するかに関わりがあるからである。

4.2 既存の多面体投影との面積比の比較

立体角写像と多階層写像を評価する目的でオーサグラフと既存の正四面体を用いた正多面体図法を比較する。

断面図 16 において、実線の矢印は本論文で取り上げる多階層写像を表現している。これに対して中心 O に向かって内側に心射投影を行なった場合の軌跡を点線で表記している。

ここで球面上の大円弧 1-E は 4 分割されており、それぞれの大円弧の長さの比は、

$$1-L-A : 1-L-B : 1-L-C : 1-L-D = 0.939 : 0.9593 : 1.000 : 1.064$$

である。この比率により球状正四面体上を 96 分割する領域の面積 S が

$$S1-A=S1-B=S1-C=S1-D$$

となっている。

これらの分割領域を正四面体上の 96 分割された領域の面積 S に、

$$S3-A=S3-B=S3-C=S3-D$$

となるように曲面正四面体 $P2$ を介して写像する。

その一方で球状正四面体を中心 O に向かって正四面体上に心射投影する。その場合、4つの大円弧は投影後、夫々正四面体上において $3-L-A'$ 、 $3-L-B'$ 、 $3-L-C'$ 、 $3-L-D'$ となる。その長さの比率は、

$$3-L-A' : 3-L-B' : 3-L-C' : 3-L-D' = 1.87 : 1.15 : 0.91 : 0.90$$

となる。一方、心射投影を行なった際の球状正四面体 $P1$ と正四面体 $P3$ の立体的関係を斜視図にて描いたものが図 18 である。ここに $3-L-A'$ 、 $3-L-B'$ 、 $3-L-C'$ 、 $3-L-D'$ は頂点を共有する 4つの三角形領域 A' 、 B' 、 C' 、 D' の底辺である。よってこれら 4つの三角形領域の面積比も $S3-A' : S3-B' : S3-C' : S3-D' = 1.87 : 1.15 : 0.91 : 0.90$ となる。

投影前に球面上において同じ面積であった分割領域は心射投影後に正四面体上において最大 2.077 倍の誤差となることがわかる。

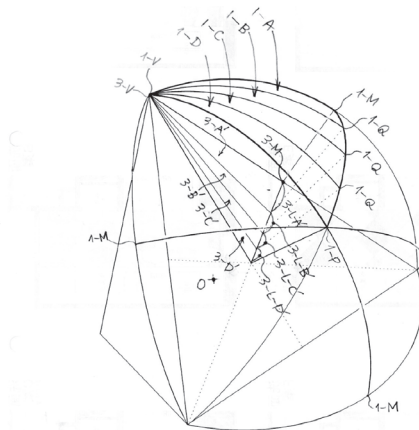


図 18 本論文で取り上げる写像の斜視図

表 3 96 分割面領域の面積比の誤差

	オーサグラフ	通常の心射投影
96 分割面領域の面積比の誤差 *	1.000	2.077

* 全面領域の中で最大の面領域 S_{max} と最小の面領域 S_{min} とした時の S_{max}/S_{min} の値。

4.3 既存の正積円筒図法との世界地図の中心移動に関する比較

オーサグラフ図法がどの程度自由に任意の地域を中心に据えて世界地図を新規に抽出可能かをランベルト正積図法と比較しながら検証する。

ランベルト正積図法は東西 1 方向に中心を移動して世界地図を新規に抽出可能である (図 2)。一方、オーサグラフは、平面充填された世界地図同士の地理関係に連続性が担保される。長方形の枠を矢印 1、2 及び 3 方向に移動させて、新たな世界地図を抽出可能である (図 17)。例えば、LC1 は日本が地図の中心、左にロシア、右にアメリカが配されるが、同じ平面充填地図から地球の真裏に位置しているブラジルを中心にした世界地図 LC3 も抽出可能である。メルカトル図法では中心することが困難な南極、ニュージーランド、南アフリカを中心にした世界地図の抽出も可能である。

表 4 中心移動方向の数

	オーサグラフ	ランベルト正積図法
中心移動可能な方向	3	1

5 活用例：各時代の帝国のサイズを比較できる世界地図

筆者らが製作した地図作品、世界史地図「クロノマップ 4700」はオーサグラフの活用例である (図 19)。面積が正確である特徴を活用している。その上で地理関係が繋がる特徴を時間的な変化に応用した試みでもある。世界史の専門家である関真興氏の協力監修をもとに製作した。

クロノマップ 4700 は 96 個のオーサグラフ世界地図により構成されている。古代エジプト時代から現在までを 50 年毎に区分し、区分した 50 年毎の時代を表す世界地図を 96 個製作した。時代が 50 年毎に異なる 96 個の世界地図

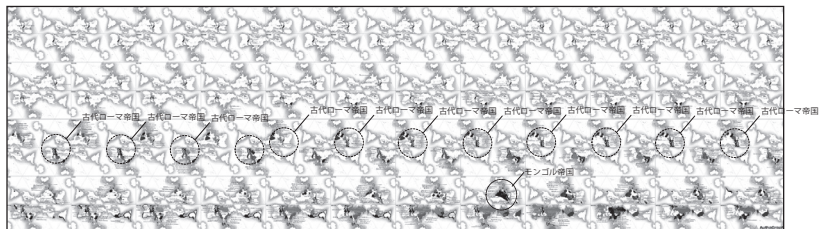


図 19 世界史地図 全体図

が時系列に隙間なく繋がり平面充填されている。左上が一番古い地図であり、B.C. 2750 から B.C. 2700 年の 50 年間を表した世界地図、その右隣に B.C. 2700 から B.C. 2650 年の世界地図が続く。クロノマップ 4700 は横 8 列、縦 12 列の行列状に各時代の世界地図が並んでいる。この構成により 4700 年間の世界史を一枚の長方形画面で同時に眺めることができる。その上で時代も地域も異なる帝国同士の面積を比較することができる。

クロノマップ 4700 の地図表現によって描かれた西暦 1250 年前後の世界地図複数枚の領域を拡大したものが図 20 である。このうち西暦 1250 年の世界地図上にはモンゴル帝国が表示されている。モンゴル帝国はその後 1270 年に版図が世界史上最大になる。一方でモンゴル帝国は短命だった。ゆえにこの

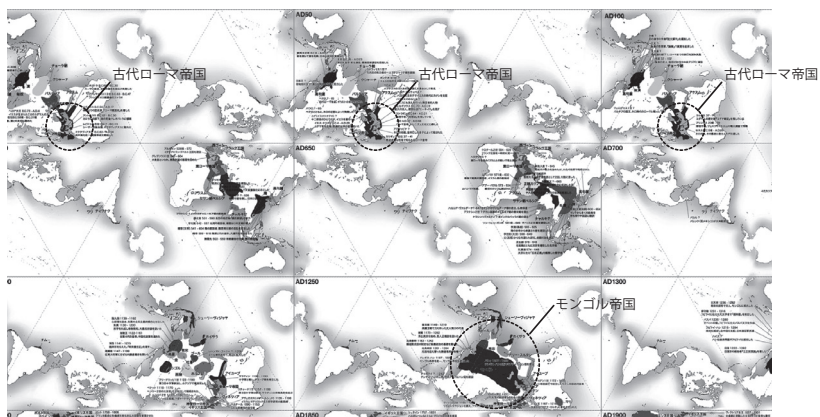


図 20 主題地図例 世界地図 AD1250 前後

作品でも一度しか地図に登場しないことがわかる。

モンゴル帝国と時代も地域も異なるローマ帝国を比較する。ローマ帝国はモンゴル帝国ほど大きくないが長期間存続したため繰り返し現れる。複数の時代においてローマ帝国が複数個見て取れることができる。図 19 を参照すると、それらの「複数の時代のローマ帝国」の面積を足し合わせると、1250 年の世界地図に描かれているモンゴル帝国の面積よりも大きくなることを視覚的に比較の上で理解することができる。

6 考察

本研究の結果から長方形世界地図である、かつ面積の歪み、特に高緯度地域における面積の歪みを低減し、中心移動を行い新たな世界地図を抽出可能である、以上の要点を 3 つ同時に満たす世界地図図法を提供する本研究の目的を達成したと結論づけられる。これは図 6 に図示する既存の世界地図図法との分類において、オーサグラフ図法が領域 C に位置すると言える。領域 C に位置する既存の世界地図図法は存在しなかった。表 5 の二重線で囲った部分は先行技術とともにオーサグラフを、目的達成のための 3 つの要点をもとに評価したものである。表から、個々の評価項目の中にはオーサグラフを上回るものがあるものの、3 つの要点を全て満たすものはオーサグラフ世界地図のみであると推測できる。

表 5 オーサグラフと既存の世界地図図法の比較

	長方形*1	中心移動*2	正積*3	正角	距離	方位
メルカトル図法	△	×	×	○	×	×
ダイマキシオン	×	○	○	×	×	×
ランベルト正積図法	○	×	◎	×	×	×
Lee's Projection	×	○	×	○	×	×
クインカンシャル	○	○	×	○	×	×

* 1：世界全体が余過分なく長方形である○、ない×、複数種の長方形が得られる◎とした。メルカトルは世界全図ではないため△とした。

* 2：一方向しか中心移動できない×、複数方向可能○とした。

* 3：正積図法は◎、実質的に面積比の歪まないものは○とした。

7 結論

上記の評価項目において、本研究の成果を活用することで地球全域に分布する世界情勢を表すデータ、またそれらの蓄積である世界史を世界地図上にわかり易く描く際に役立つと結論づけられる。

7.1 本研究のまとめ

本論文では正多面体図法と正四面体から長方形に展開図を取得可能であるという特徴を活用することで、円筒図法と同様に、長方形世界地図が製作可能になり、図郭が複雑なダイマキシオンマップが抱えていた課題を解消した。

また本論文では、立体角写像、多階層写像の考案によりダイマキシオンマップと同様に面積の歪み、特に高緯度地域に面積の歪みが少ない世界地図図法が製作可能になった。こうして高緯度地域が扁平になるランベルト正積図法の課題を解消した。

さらに本論文では縦横斜め方向において正四面体の展開図がシームレスにつながる平面充填地図を考案した。これによりダイマキシオンマップやQuincunx Projection同様に地図の中心移動が多方向において可能になった。こうして1方向しか中心移動ができなかったランベルト正積図法ほか円筒図法の抱えていた課題を改善できた。

以上、既存の世界地図図法が抱えている課題を改善することで球面世界の地理情報の視覚化において有用である世界地図図法を提案できたと結論づける。

さらに、オーサグラフの持つ、面積の歪みが少ない特性と、平面充填地図の効果、具体的な主題の製作を通して検証した。世界史を一望できるクロノマップ4700を用いることで異なる時代、異なる地域の帝国同士の版図の面積を比較することができた。またある帝国が世界史においてどれだけ広範囲に影響を与えたかを「版図の面積」X「時間」という図式で視覚化することができた。これを例えば、版図が史上最大だが存続時間が短かったモンゴル帝国との比較においては面積が小であるが、存続期間は長かったローマ帝国の対比において例証することができた。

7.2 今後の課題

オーサグラフは、以下のような課題が残されている。

本論文で取り上げる球面の分割数が 96 であり、面積歪みを低減する効果が限定的である。これは本研究が掲げてきた目的を達成するために、複数の多面体の組み合わせ、かつ写像の組み合わせをできる限り多く検証し、その中で最適解を発見する方針をとったことにある。そのため各試験において様々な写像を効率よく検証する為に分割数を限定した。一方で分割数を増やし精度を上げることは重要である。正積図法として必要な分割数の目安は 600 分割という意見がある。これが今後の研究の具体的な目標値である。

表 5 の右 3 列の評価軸は、本研究で取り上げなかった歪みの指標である。オーサグラフは立体角写像、多階層写像の組み合わせが多数ある。今後は正角、距離、方位の歪みに取り組むことも重要である。

オーサグラフは世界地図の中心移動を可能にしたが、現在の図法では、余分過分なく世界 1 個分を切り取ることができる移動方向は 60 度ごとの 3 方向、つまり正四面体の正三角形面によって構成される 3 方向グリッドに沿ってのみ可能であり、無作為に中心移動を行うと一つの長方形枠組みに重複して表示される地域が出てしまう。自由な世界地図の再配列を可能にするためには、この課題を解決する必要がある。

謝辞

以下の方々のお言は本論文作成に貢献している。本図法の概念構築の協力者である平井正司氏。本図法を実践するコンピュータプログラマである星鉄矢氏。また以下の方々はお論文が取り上げたクロノマップ 4700 の製作協力者である。監修: 関真興、制作協力: 東京都写真美術館、(株) 学研教育出版、製作協力: (学) 桑沢学園 SD 分野、堀川みどり、久保本進児 (TN コンテンツ工房)、インタラクティブコンテンツ設計製作: 石橋素 (株) ライゾマティクス。深く感謝いたします。

引用文献

- [1] 政春 尋志『地図投影法』(地図投影法各論) 朝倉書店、2011 年、p. 62。
- [2] 松村 寛一郎他「グローバルスケールの経済発展指標」『総合政策研究』29 号、2008 年、pp. 55-62。
- [3] 日本国際地図学会『地図学用語辞典』(『断裂法』) 技報堂出版、1998 年、pp. 205-206。

- [4] Johann Heinrich Lambert, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, part III, section 6: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, cylindrical equal-area projection, 1772.
- [5] R. Buckminster Fuller, *Dymaxion Map*, INVENTIONS, St. Martins' Press, 1983.
- [6] Leonhard Euler 「多面体定理」1750年。及び、デビッド・S・リッチェソン 『世界で二番目に美しい数式（上）—多面体公式の発見』岩波書店、2014年。
- [7] A. Edmondson, *A Fuller Explanation*, *Design Science Collection*, Harvard University, 1987.
- [8] S. Athelstan, *Map puzzle having periodic tessellated structure*, US.PAT. 4627622, 1986.
- [9] L. P. Lee, *Lee's Projection*, New Zealand Department of Lands and Survey, 1965.
- [10] C. S. Peirce, "A Quincuncial projection of the sphere" (the U.S. Coast and Geodetic Survey), *American Journal of Mathematics*, 2(4),1879, pp. 394-396.
- [11] John Parr Snyder, *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, Chicago, The University of Chicago Press, 1997.
- [12] 政春 尋志 『地図投影法』(地図投影法各論)、朝倉書店、2011年、p. 62。
- [13] 政春 尋志 『地図投影法』(円筒図法に属する各種投影法)、朝倉書店、2011年、p. 67。
- [14] Leonhard Euler 「多面体定理」1750年。
- [15] Émile Guyou, *Guyou's Conformal Projection*, Académie des sciences, bureau des longitudes, Société mathématique de France,1886-7.

{受付日 2017. 2. 27}
{採録日 2017. 8. 17}