A Thesis for the Degree of Ph.D. in Science

Metric Theory of Diophantine Approximations over Imaginary Quadratic Fields

March 2016

Graduate School of Science and Technology

Keio University

Zhengyu Chen

主　　論　　文　　要　　旨

報告番号	甲　乙　第　　　　　号	氏　名	陳　征宇

主 論 文 題 目 :
Metric Theory of Diophantine Approximations over Imaginary Quadratic Fields
（虚二次体におけるディオファントス近似の測度論的研究）

（内容の要旨）

ディオファントス近似の測度論的研究とは、自然数 n に対して定義された非負実数値関数 $\phi(n)$が与えられたとき不等式$|\alpha - m/n| < \phi(n)/n$ を満たす有理数が無限個存在するような実数α全体の集合について、その大きさを測る研究である。ここで、通常は整数 m と n は互いに素である場合のみを考える。この研究は、Khintchine を始めとする多くの数学者により 20 世紀前半より行われている。その中で 1941 年、 Duffin と Schaeffer は次のような予想を提出した。即ち、「もし$\Sigma(\phi(n)\varphi(n)/n) = \infty$ならば、ほとんどの実数$\alpha$に対して、上記の不等式は無限個の整数解を持つ」との予想である。この予想は現在でも解かれていない。ここで$\varphi(n)$は Euler 関数で n を超えない n と互いに素な整数の個数を表す。1978 年に部分的な結果として、Vaaler はもし$\phi(n) = O(1/n)$であれば Duffin-Schaeffer 予想が成り立つことを証明した。

ディオファントス近似の問題は、複素数を虚二次体の要素で近似する問題として拡張することができる。ただし、実数の場合と異なり、虚二次体上の整数の素因数分解は一般には一意でないため、虚二次体上の二つの整数が互いに素であることをイデアルの中で考える必要がある。すなわち、r, aを虚二次体上の整数とし、$\Psi(r)$はイデアル(r)に対して定義された非負関数とすると、不等式$|z - a/r| < \Psi(r)/|r|$, g.c.d.(a, r) = (1)がほとんどすべての複素数zに対して無限個の解 (r, a) を持つためのΨの必要十分条件を決定する問題として定式化できる。ここで g.c.d.(a, r) = (1) とはイデアル(a)と(r)が互いに素であることを意味する。

第1章では、実数の問題も含めて、過去の研究成果について解説している。まず実数の場合のDuffin-Schaeffer予想をめぐる様々な研究成果について紹介している。続いて、ディオファントス近似の解が無限個存在するような実数の集合がLebesgue測度0となるような場合についてそのHausdorff次元に関するJarnikとBesicovitchの結果やそれらを一般化したHarmanの結果、さらに、Duffin-Schaeffer予想における解が無限個存在する実数全体の集合のHausdorff次元について説明している。最後に、これらに対応する複素数の虚二次体に関するディオファントス近似の問題についてこれまで知られている結果を紹介している。特に本研究の結果の証明の中で重要な役割を果たすNakadaとWagnerの複素数上の0-1定理について述べている。

第2章では、$\Psi(r) = O(1/|r|)$であれば不等式$|z - a/r| < \Psi(r)/|r|$, g.c.d.(a, r) = (1), がほとんどすべての複素数zに対して無限個の解 (r, a) を持つことを証明している。これは実数の問題におけるVaalerによる結果の複素数の問題に対する自然な拡張である。証明は確率論のBorel-Cantelliの補題のRenyi-Lampertiによる一般化のアイディアに基づいたものであるが、その方法が虚二次体においても有効であることを正当化するための数論的議論が、証明の重要な部分になる。この章ではその過程を詳細に与えている。最後に、Duffin-Schaeffer予想の発散条件、つまり「$\Sigma(\Phi(r)\Psi(r)^2/|r|^2) = \infty$」が必要であることの合理性を明確にするため、その条件が真に必要であることを示すような関数Ψの実例を挙げた。

本論文の第3章では、虚二次体上で一般化されたJarnikとBesicovitch型定理を述べ、その証明を与えている。すなわち、不等式$|z - a/r| < |r|^{(-1-\rho)}$が無限個の虚二次体上の整数解a, rを持つような複素数zの集合のHausdorff次元を具体的に与え、この結果の証明を詳しく述べている。さらに、この結果を用いて、虚二次体上のDuffin-Schaeffer予想において「互いに素」の条件を取り除いてとき、解が無限個存在する複素数全体の集合がのHausdorff次元が2となることの証明を与えている。この結果は、複素数の虚二次体の要素による近似問題でDuffin-Schaeffer型予想が正しいことを示唆する傍証の一つとなる。

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School	Student Identification Number	SURNAME, First name
Science and Technology		Chen, Zhengyu

Title

Metric Theory of Diophantine Approximations over Imaginary Quadratic Fields

Abstract

Metric theory of Diophantine approximations deals with the size of the set of real numbers α which have infinitely many rational numbers m/n such that $|\alpha - m/n| < \psi(n)/n$ for a given non-negative real valued function $\psi(n)$. Here we usually only consider the case that m and n are co-prime. Many works have been done since the earlier 20th century by Khintchine and some other mathematicians. In 1941, Duffin and Schaeffer made a conjecture that if $\Sigma(\varphi(n)\psi(n)/n) = \infty$, then for almost all real numbers α, the inequality has infinitely many integer solutions m and n. Here $\varphi(n)$ is the Euler function which counts the positive integers less than or equal to n that are relatively prime to n. As one of partial answers to this conjecture, Vaaler proved that the conjecture is true if $\psi(n) = O(1/n)$ in 1978.

Metric theory of Diophantine approximations can be extended to complex numbers if we use the rational numbers over imaginary quadratic fields to approximate the complex numbers. In the case of imaginary quadratic fields, the prime factor decomposition of integers is not unique in contrast to the real numbers case, so we use principal ideals instead of integers to deal with the co-primeness of two integers. Let r and a be two integers over imaginary quadratic fields and $\Psi(r)$ be a non-negative real valued function of ideal (r). Then we want to know a necessary and sufficient condition on Ψ so that the inequality $|z - a/r| < \Psi(r)/|r|$, g.c.d.$(a, r) = (1)$, has infinitely many solutions r and a for almost all complex numbers z. Here g.c.d.$(a, r) = (1)$ denotes ideals (a) and (r) are co-prime.

In the first chapter of the thesis, we explain some known results on the metric theory of Diophantine approximations. Next, we consider the Hausdorff dimension of the sets of Lebesgue measure 0 arising from some Diophantine inequalities and explain the result given by Jarnik and Besicovitch as well as the result generalized by Harman. Finally, we explain some results on the metric theory of Diophantine approximations over the complex numbers.

In the second chapter of the thesis, we describe the Duffin-Schaeffer conjecture over imaginary quadratic fields and give a Vaaler type theorem for the complex number case, i.e., the conclusion of the Duffin-Schaeffer conjecture is true whenever $\Psi(r) = O(1/|r|)$. We give its proof following the idea of the generalized Borel-Cantelli's lemma. Then, we show that the divergent condition of the Duffin-Schaeffer conjecture is reasonable by giving an example of function Ψ.

In the third chapter of the thesis, we describe a generalized theorem of Jarnik and Besicovitch over imaginary quadratic fields. That is, we give the Hausdorff dimension of the set of complex numbers z which have infinitely many integer solutions r and a over imaginary quadratic fields such that $|z - a/r| < |r|^{(-1-\rho)}$. We give its proof and use this result to estimate the Hausdorff dimension of the set of the complex numbers which satisfy the property in the statement of the Duffin-Schaeffer conjecture over imaginary quadratic fields.