

学位論文 博士（理学）

質量インバランスを有する
極低温フェルミ原子気体を記述する強結合理論と
成分に依存する擬ギャップ現象の研究

2015 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

花井 亮

目次

第 1 章	序論	1
1.1	極低温フェルミ原子気体における実験手法	2
1.2	BCS-BEC クロスオーバーと擬ギャップ現象	8
1.3	質量インバランスのある極低温フェルミ原子気体	15
1.4	本論文の目的および構成	22
第 2 章	質量インバランスのある場合の非自己無撞着 T 行列近似とその破綻	25
2.1	非自己無撞着 T 行列近似	25
2.2	バランス系における BCS-BEC クロスオーバーと擬ギャップ現象	30
2.3	質量インバランスのあるフェルミ気体における非自己無撞着 T 行列近似の破綻	36
第 3 章	質量インバランスのあるフェルミ原子気体に対する強結合理論	45
3.1	散乱相手に対する強結合補正	46
3.2	対形成に関与する粒子に対する強結合補正	49
第 4 章	質量インバランスのあるフェルミ原子気体における成分に依存する擬ギャップ現象	57
4.1	自己無撞着 T 行列近似による 1 粒子状態の解析	57
4.2	成分に依存する擬ギャップ現象	58
4.3	質量インバランスのあるフェルミ原子気体の相図	71
第 5 章	まとめ	79
付録 A	光電子分光型測定による 1 粒子スペクトル強度の測定法	85
付録 B	質量インバランスのあるフェルミ原子気体に対する平均場近似	87

付録 C 強結合極限	91
参考文献	97

第 1 章

序論

フェルミ粒子系超流動は、超伝導体や ^3He 超流動体などにおいて盛んに研究が行われている。それらのほとんどは電子同士あるいは ^3He 同士など、同じ粒子同士が対 (クーパー対) を組むことで実現する超流動である。しかし近年、 ^6Li と ^{40}K などの 2 種類のフェルミ原子を用いた極低温フェルミ原子気体において、異なる質量を有するフェルミ原子間でクーパー対を形成する新たなタイプの超流動の研究が進展を見せている (図 1.1) [1–24]。

極低温フェルミ原子気体を用いた研究は、2004 年に ^{40}K [25]、 ^6Li [26–28] の超流動が実現して以降、急速な発展を遂げてきた。この気体は、超高真空容器中に中性のフェルミ原子気体を磁氣的、あるいは光学的に $10^5 \sim 10^7$ 個捕獲し、レーザー冷却や蒸発冷却により 10^2nK の極低温まで冷却した系である [29]。その最大の特長は、フェッシュバハ共鳴 [30–33] を用いることにより、原子間の相互作用を制御できる点である。この機構を利用することで、弱結合領域から強結合領域の超流動状態を系統的に研究することが可能となった [25–28, 34–36]。

近年では、 ^6Li フェルミ原子と ^{40}K フェルミ原子を同時に捕獲した気体に対し、フェッシュバハ共鳴による異種原子間相互作用の制御も可能となった [2–5]。この機構による ^6Li - ^{40}K 分子の形成がすでに観測されており [7, 8]、質量差のあるフェルミ原子対形成による超流動実現に期待が高まっている。このような質量インバランスを有する特殊なフェルミ対凝縮は、半導体物性における電子正孔系 (対を組む電子とホールは質量が異なる) [37–44] や、高エネルギー物理におけるカラー超伝導 (対を組む 2 つのクォークの質量が異なる) [45, 46] 等でも議論されている。この原子気体の高い制御性は、これらの系の統一的な理解につながると期待され注目を集めている。

本章では、本論文の研究背景および研究目的を述べる。まず 1.1 節で、極低温フェルミ原子気体の捕獲法、冷却法、および、フェッシュバハ共鳴機構の説明を行う。次に 1.2 節で、このフェッシュバハ共鳴を用いることで実現した BCS-BEC クロスオーバー現象について説明する。1.3 節では、本研究の主題である、質量の異なる 2 種類のフェルミ

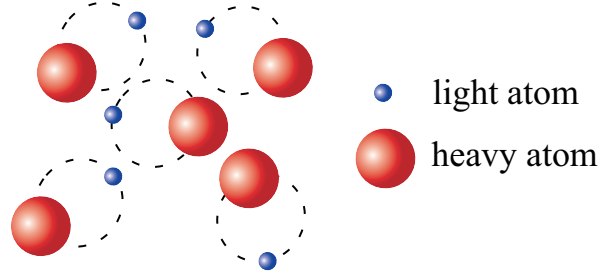


図 1.1 質量の異なる 2 成分極低温フェルミ原子気体の模式図。青い球が軽い原子、赤い球が重い原子を表す。軽い原子と重い原子の間のフェッシュバハ共鳴により、対形成相互作用 (破線) が生じる。

原子を同時に捕獲した極低温フェルミ原子気体について述べる。そして 1.4 節で、本論文の目的と構成を述べる。

1.1 極低温フェルミ原子気体における実験手法

1.1.1 極低温フェルミ原子気体の捕獲・冷却

極低温フェルミ原子気体を実現する上で土台を担ってきたのは、原子の捕獲技術および冷却技術である。この気体を用意するためにまず、高温原子源から放たれたフェルミ原子 ($\sim 700\text{K}$) を対向するレーザー光の輻射圧を利用してある程度減速させ ($\sim 1\text{mK}$)、その後以下で説明するトラップに気体を閉じ込める [29, 47]。

フェルミ原子はレーザー光により、光学的に捕獲することができる [29]。周波数 ω を持つレーザー光による電場

$$\mathbf{E}_{\text{OP}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} E_{\text{OP}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (1.1)$$

をフェルミ原子に照射すると ($\hat{\mathbf{e}}$ は電場の方向の単位ベクトル)、それが持つ電気双極子 d と結合する結果、フェルミ原子の基底エネルギーは電場の振幅 $E_{\text{OP}}(\mathbf{r})$ に関する 2 次摂動の範囲で、

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \alpha(\omega) E_{\text{OP}}^2(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

だけ変調する。ここで、

$$\alpha(\omega) = \frac{2\hbar\omega_0 |\langle e | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | g \rangle|^2}{(\hbar\omega_0)^2 - (\hbar\omega)^2}, \quad (1.3)$$

は動的な分極率である。ただし、フェルミ原子は 2 準位系であるとし、 $\hbar\omega_0 (> 0)$ はフェルミ原子の基底状態 $|g\rangle$ と励起状態 $|e\rangle$ のエネルギー差であるとした。

式 (1.2)、および、式 (1.3) から分かるように、 $\omega < \omega_0$ では $\Delta E(\mathbf{r}) < 0$ であるため、レーザー強度 $I(\mathbf{r}) \propto E_{\text{OP}}^2(\mathbf{r})$ は実効的に原子を引き寄せるポテンシャルとして働く。そのため、適当な強度分布を持つレーザー光を用いることで、フェルミ原子を捕獲することができる。例えば、 z 方向に進行するレーザー光 (ガウシアンビーム) の場合、質量 m を持つフェルミ原子に作用するポテンシャルは近似的に

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_r^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2, \quad (1.4)$$

のように、調和型ポテンシャルとなる。ここで、 ω_r 、 ω_z はポテンシャルを特徴づける周波数である。ただし、原子の捕獲法は、この他にも磁気トラップ、磁気光学トラップなどがある。詳細は、[29] を参照されたい。

多くのフェルミ原子気体の実験では、金属超伝導体においてクーパー対を形成する電子の $\uparrow$ -スピンと $\downarrow$ -スピンに対応し、2 つの原子スピン状態が用いられる。フェルミ原子のスピン状態 F は、核スピン I と最外殻の電子スピン S の和で指定される。例えば、 ^6Li フェルミ原子気体 ($I = 1$) の超流動を実現した実験 [26–28] では $|F = 1/2, F_z = 1/2\rangle (\equiv |\uparrow\rangle)$ と $|F = 1/2, F_z = -1/2\rangle (\equiv |\downarrow\rangle)$ が、 ^{40}K フェルミ原子気体 ($I = 4$) の超流動の実験 [25] では $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle (\equiv |\uparrow\rangle)$ と $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle (\equiv |\downarrow\rangle)$ が「擬スピン状態」($|\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle$) として用いられた。

捕獲したフェルミ原子気体の温度を下げるのに用いられるのが、蒸発冷却である [29,47]。トラップした原子気体に照射する電磁波の周波数を調整し、高い運動エネルギーを持った原子を選択的にトラップから外に逃がすことで、1 原子当たりの運動エネルギーの平均値を下げるができる。この操作で一時的に気体は非平衡状態となるが、原子同士の衝突により次第に熱平衡化し、初期状態と比べ温度が下がる。その後、トラップの外に逃がす原子をより低いエネルギーのものにするように照射する電磁波の周波数を調整することで、さらに原子気体は冷却される。この過程を繰り返すことにより原子数 $10^5 \sim 10^7$ 個程度の気体を 10^2nK 程度にまで冷却し、気体は量子縮退領域 ($T < T_F$ 、ただし T_F は原子気体のフェルミ温度で、 μK オーダー) に到達する [47]。

1.1.2 フェッシュバハ共鳴による原子間相互作用の制御

フェッシュバハ共鳴 [30–33] は、原子間相互作用の制御を可能にする。図 1.2 に概念図を示すように、この共鳴現象は 2 つの異なる擬スピン状態のフェルミ原子が散乱する際、共鳴束縛状態であるフェッシュバハ分子を散乱過程に含む。このとき生じる原子間相互作用は、外部磁場によりあらゆる強度の引力または斥力に制御することができ、現在、この機構は極低温フェルミ原子気体の操作性の中でも最も重要なものと位置付けられている。

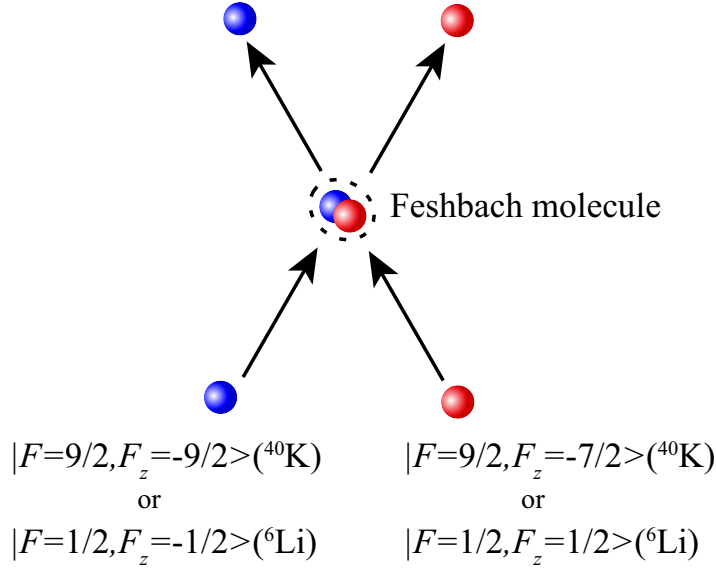


図 1.2 フェッシュバッハ共鳴の概念図。散乱する際、フェッシュバッハ分子 (Feshbach molecule) を媒介して相互作用する。赤い球と青い球はそれぞれ、異なる擬スピン状態を模式的に表す。図は、 ^{40}K フェルミ原子を用いた場合を示した。

フェッシュバッハ共鳴機構を説明するために、2つのフェルミ原子間の散乱を考える。2つのフェルミ原子が十分離れている場合、外部磁場 B が印加された状態では、ゼーマン効果により最外殻電子がスピン三重項状態となる (open channel と呼ばれる)。図 1.3 に、原子間ポテンシャルを模式的に示す [48]。スピン三重項状態での原子間ポテンシャルは、遠距離のファンデルワールス力と近距離の電子間斥力から図 1.3 の赤線で示されるレナード・ジョーンズ型となる。

核スピンと最外殻の電子スピンの間には、超微細構造相互作用が働く。2つのフェルミ原子の核スピンをそれぞれ I_1 、 I_2 とし、最外殻の電子スピンを S_1 、 S_2 とすると、超微細構造相互作用は

$$H_{\text{hf}} = J(I_1 \cdot S_1 + I_2 \cdot S_2), \quad (1.5)$$

で与えられる (J は結合定数)。式 (1.5) を

$$H_{\text{hf}} = \frac{J}{2}(I_1 + I_2) \cdot (S_1 + S_2) + \frac{J}{2}(I_1 - I_2) \cdot (S_1 - S_2), \quad (1.6)$$

のように書き換えたときに S_1 と S_2 の交換に対して反対称な項 (第 2 項) が現れることから分かるように、超微細構造相互作用は最外殻電子のスピン三重項状態とスピン一重項状態を結合する。

このとき、スピン一重項状態 (closed channel と呼ばれる) の原子間ポテンシャルもスピン三重項状態と同様、レナード・ジョーンズ型となっており (図 1.3 の青線)、その窪

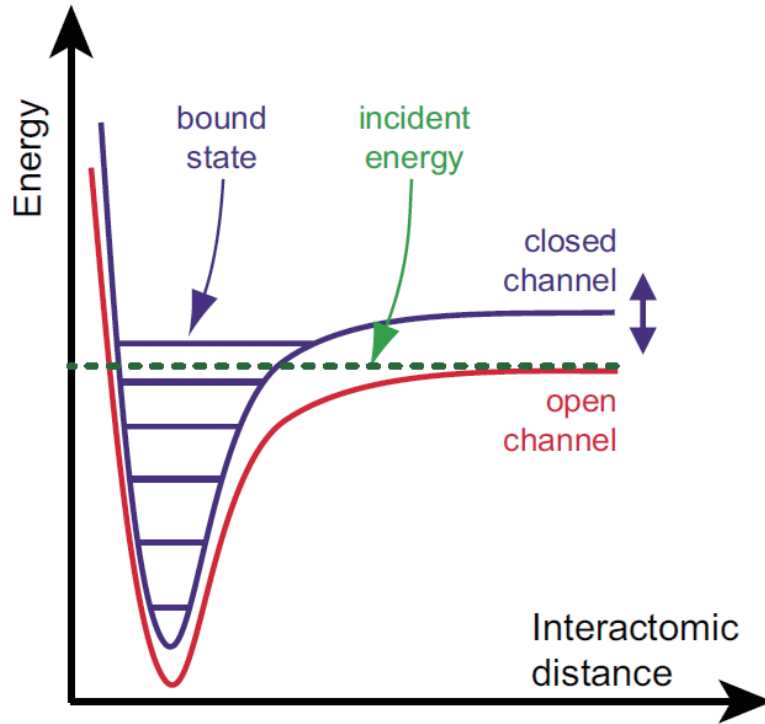


図 1.3 フェッシュバッハ共鳴を起こす 2 つのチャンネルのポテンシャルエネルギー [48]。赤線と青線はそれぞれ、最外殻電子のスピン三重項状態 (open channel) と、共鳴束縛状態 (フェッシュバッハ分子) を持つスピン一重項状態 (closed channel) の相互作用ポテンシャルを表す。これらのエネルギー差は、外部磁場 B によって制御することが可能である。破線は、入射原子のエネルギー (incident energy) を表し、これがフェッシュバッハ分子の束縛エネルギー (bound state) と一致した点がフェッシュバッハ共鳴点である。Reprinted figure with permission from I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008). Copyright (2008) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.80.885>.

み部分には共鳴束縛状態であるフェッシュバッハ分子が現れる。超微細構造相互作用は、スピン三重項状態と (スピン一重項の共鳴束縛状態である) フェッシュバッハ分子との結合を生む。解離していた状態の原子がフェッシュバッハ分子を組み、それが再び解離していく過程から生じる有効相互作用を、ここでは簡単のため、原子が解離した状態から共鳴束縛状態への遷移振幅 g に関して 2 次摂動の範囲で評価すると、

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{bg}} - \frac{g^2}{2\nu}, \quad (1.7)$$

となる。ただし、 U_{bg} はスピン三重項状態のポテンシャル散乱による有効相互作用、 ν は解離した原子のエネルギーとフェッシュバッハ分子のエネルギーの差であるとした。スピン三重項状態とスピン一重項状態はそれぞれ大きさの異なる磁気モーメントを持つため、

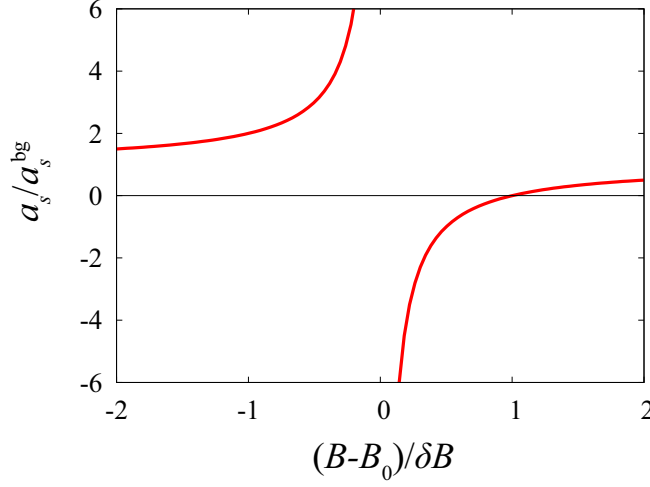


図 1.4 式 (1.9) で与えられる、フェッシュバツハ共鳴による s 波散乱長 a_s の磁場依存性。ただし $\delta B > 0, a_s^{\text{bg}} > 0$ であるとした。

原子が解離した状態のエネルギーと、フェッシュバツハ分子のエネルギーのエネルギー差 2ν を外部磁場 B により制御することができる。この 2 つのエネルギーが一致する共鳴点 $\nu = 0$ での外部磁場の大きさを B_0 とすると、共鳴点近傍での有効相互作用は

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{bg}} - \frac{g^2}{\alpha(B - B_0)}, \quad (1.8)$$

となり (α は比例定数)、共鳴点付近 $B = B_0$ で強い相互作用が得られると同時に、引力と斥力とが切り替わることが分かる。

このような有効相互作用の制御性は、散乱長 a_s [33] や散乱断面積 σ [32] の測定により確認されている。有効相互作用が磁場により変化すると、フェッシュバツハ共鳴点近傍の s 波散乱長は、磁場 B の関数として

$$a_s(B) = a_s^{\text{bg}} \left(1 - \frac{\delta B}{B - B_0} \right), \quad (1.9)$$

のように変化する [29, 30, 47]。ここで、 a_s^{bg} はスピン三重項状態のポテンシャル散乱から与えられる散乱長であり、 δB は共鳴の幅を与える。図 1.4 に s 波散乱長 a_s の磁場依存性を示す ($\delta B > 0, a_s^{\text{bg}} > 0$ とした)。 $B = B_0 + \delta B$ では $a_s = 0$ となり、原子気体は自由粒子系として振る舞う。それより大きな磁場 ($B > B_0 + \delta B$) の $a_s > 0$ となる領域では原子間に斥力相互作用が働き、より小さな磁場 ($B < B_0 + \delta B$) では引力相互作用が働く。共鳴点 $B = B_0$ 付近では s 波散乱長 a_s が大きく変化し、符号が入れ替わる。 s 波散乱長 a_s が正となる $B < B_0$ では、原子間の強い引力により束縛準位が生じる [29, 30, 47]。式 (1.9) で与えられる s 波散乱長の磁場依存性は、相互作用による準位のエネルギーシフトの測定を通して観測されている [33]。

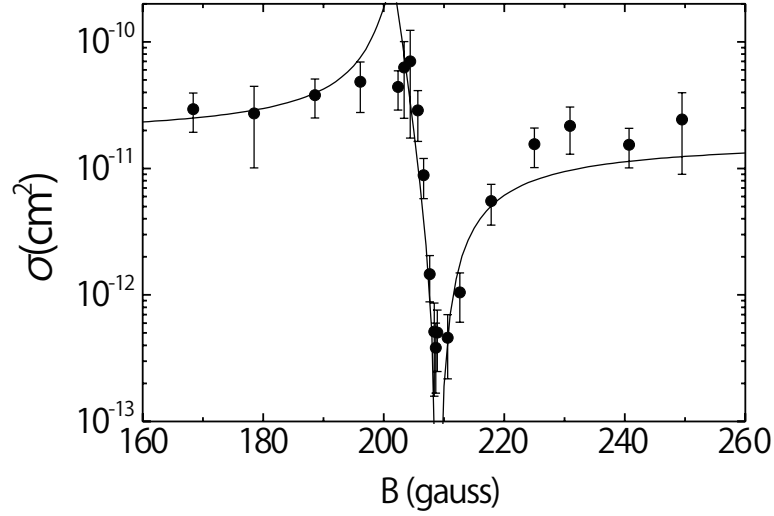


図 1.5 ^{40}K フェルミ原子気体で測定された、 $|F = 9/2, F_z = -9/2\rangle$ と $|F = 9/2, F_z = -7/2\rangle$ の間のフェッシュバハ共鳴点 $B_0 = 202\text{G}$ 付近における散乱断面積 σ の磁場 B 依存性 [32]。黒点は実験結果、実線は式 (1.10) によってフィッティングが行われた理論線。 $B = 209\text{G}$ で原子間相互作用が実効的に無視できるようになり ($a_s = 0$)、散乱断面積 σ がゼロとなる。原子間相互作用はこれより小さな磁場のとき引力、より大きな磁場のとき斥力となる。フェッシュバハ共鳴点 $B = B_0 = 202\text{G}$ では s 波散乱長 a_s が発散すると同時に、散乱断面積 σ が発散する。引力相互作用する領域 ($B < 209\text{G}$) において、 $B < B_0$ は強く相互作用する領域、 $B_0 < B (< 209\text{G})$ は弱く相互作用する領域に対応する。Reprinted figure with permission from T. Loftus, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **88**, 173201 (2002). Copyright (2002) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.173201>.

また、散乱断面積 σ は低エネルギーで s 波散乱長 a_s と

$$\sigma(B) = 4\pi a_s^2(B), \quad (1.10)$$

の関係がある [47]。図 1.5 に、 ^{40}K フェルミ原子気体において測定された散乱断面積 σ の磁場依存性を示す [32]。このように、 s 波散乱長 a_s が発散するフェッシュバハ共鳴点 $B_0 = 202\text{G}$ では散乱断面積 σ が大きくなり、 $a_s = 0$ となる $B = 209\text{G}$ では散乱断面積 σ が非常に小さくなる様子が観測されている。このようにして、フェッシュバハ共鳴による精密な相互作用の制御が実際に可能であることが実証された [30]。

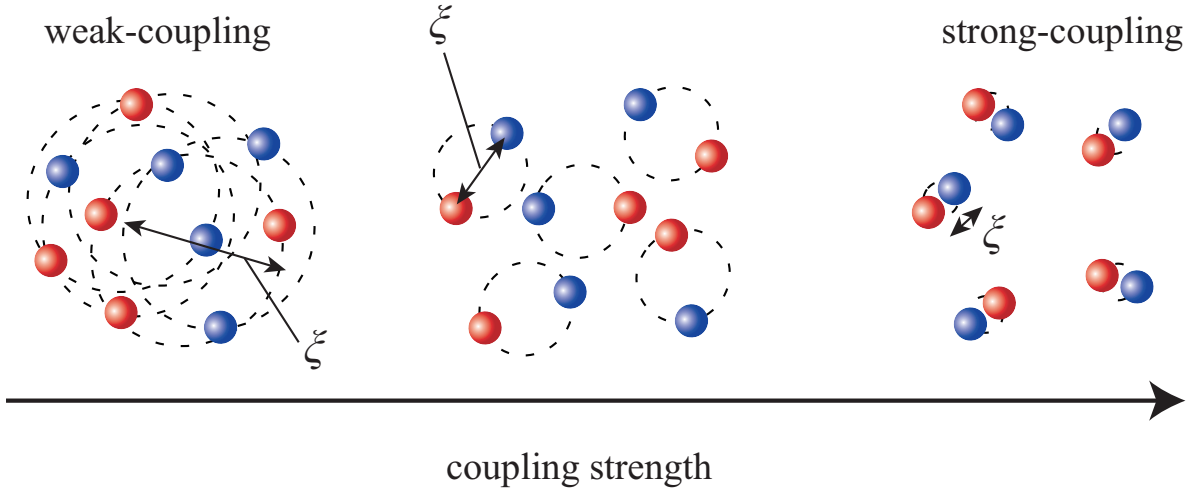


図 1.6 BCS-BEC クロスオーバーの概念図。赤い球と青い球は、それぞれ異なる擬スピン状態のフェルミ原子を表し、右側に位置する図ほど、引力相互作用が強いことを表す。引力相互作用強度が弱い BCS 領域では、互いに重なり合ったクーパー対が形成された超流動状態にある。相互作用強度を強くしていくと、クーパー対の大きさ (コヒーレンス長 ξ [52]) が徐々に小さくなっていき、分子ボソンのボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) による超流動に連続的につながる。

1.2 BCS-BEC クロスオーバーと擬ギャップ現象

1.2.1 引力フェルミ粒子系における BCS-BEC クロスオーバー

フェッシュバハ共鳴により原子間の引力相互作用強度の制御が可能となったことで、粒子間相互作用が弱い場合から強い場合まで系統的に超流動の性質を調べることが可能となった [25–28, 34–36]。弱く相互作用する場合と強く相互作用する場合では、そのフェルミ超流動の性質は大きく異なる (図 1.6)。相互作用強度が弱い場合、フェルミ面付近のフェルミ粒子が (重心運動量ゼロの) クーパー対を形成した Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 状態となる。これは金属超伝導体に類似の状態で、BCS 理論により非常によく記述される [49–51]。図 1.6 の左図に模式的に示したように、このときのクーパー対の波動関数の大きさ (コヒーレンス長 ξ [52]) は平均粒子間距離に比べて大きいため、それらは互いに重なり合った状態にある。一方、相互作用強度が強い場合、フェルミ粒子は強く束縛された分子ボソンを形成しそれらがボース・アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein condensation, BEC) を起こすことで超流動となる (図 1.6 の右図) [29]。これら両極限が、相転移を伴うことなく連続的につながる現象が BCS-BEC クロスオーバーである [34–36, 43, 53–55]。

図 1.7 は、 ^{40}K フェルミ原子気体において凝縮原子数 (重心運動量ゼロを持つ対に関与

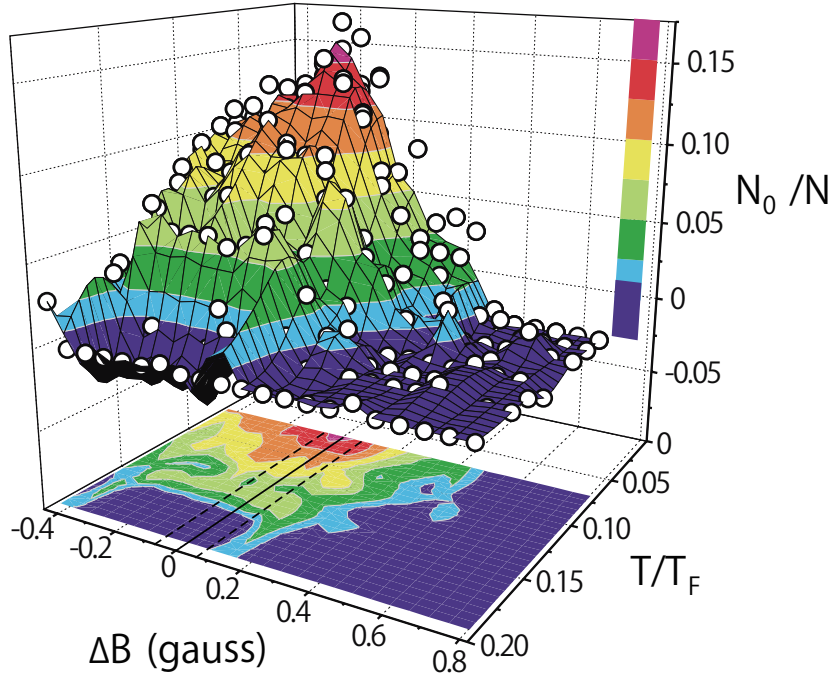


図 1.7 ^{40}K フェルミ原子気体で観測された超流動と BCS-BEC クロスオーバー [25]. $\Delta B = B - B_0$ は印加する外部磁場 B の、 s 波散乱長 a_s が発散する磁場 $B_0 = 202\text{G}$ からのずれ。 T は原子気体の温度で、この図ではフェルミ温度 $T_F \simeq 0.35\mu\text{K}$ で規格化されている。縦軸 N_0/N は凝縮した原子の割合で、この実験では、 $N_0/N > 0$ の領域が超流動状態となっている領域と判定されている。 Reprinted figure with permission from C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004). Copyright (2004) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.040403>.

する原子数) を測定することにより、初めて BCS-BEC クロスオーバーを観測した実験結果である [25]。この実験では、フェッシュバハ共鳴機構を用いて外部磁場で相互作用を制御しており、 ΔB が小さくなるほど引力相互作用が強くなる。縦軸に示された、凝縮した原子の割合 N_0/N がゼロから有限となる温度 (図 1.7 の底面で青色と水色の境界線あたり) は超流動転移温度 T_c である。相互作用が弱い領域 ($\Delta B > 0$) では、相互作用が強いほどクーパー対がより高温で組むことができ超流動転移が起こりやすくなるため [49–51]、相互作用強度が増大するに従い T_c が上昇する。一方、相互作用が強い領域 ($\Delta B < 0$) ではほとんどすべてのフェルミ原子が分子ボソンを組んだ状態となるため、超流動転移温度 T_c が理想ボース分子気体のボース・アインシュタイン凝縮温度 [29]

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi\hbar^2}{2mk_B} \left[\frac{N/2}{V\zeta(3/2)} \right]^{\frac{2}{3}} = 0.218T_F, \quad (1.11)$$

へと漸近する。ここで、 m, N, V はそれぞれフェルミ原子の質量、全フェルミ原子数、系

の体積で、 $\hbar$ はディラック定数、 k_B はボルツマン定数、 $\zeta(x)$ はツェータ関数である。

このクロスオーバー現象は、絶対零度については平均場理論である BCS-Leggett 理論 [54] により説明される。この理論は 2 つのフェルミ粒子 ($k, \uparrow$) と ($-k, \downarrow$) で構成されるクーパー対の対凝縮を記述する BCS 理論を土台にしたものである。相互作用が弱いことを暗に仮定し、 $\mu = \varepsilon_F$ (ε_F は気体のフェルミエネルギー) が常に成り立っているとする通常の BCS 理論を拡張し、粒子数期待値一定の条件を課すことで化学ポテンシャル μ を決定する。この枠組みに基づき計算すると、弱結合領域から相互作用強度を強くするに従い μ が徐々に ε_F から減少していき、強結合極限で $\mu = -E_{\text{bind}}/2$ へ漸近する (E_{bind} は分子ボソンの束縛エネルギー)。このことは、引力の強い領域で 2 つのフェルミ粒子を系に加えるとそれらが分子ボソンを形成し系のエネルギーが結合エネルギー E_{bind} だけ下がることを意味している。このようにこの理論は、絶対零度における弱結合超流動から強結合超流動へのクロスオーバー現象をよく記述する。

しかしながら、この理論を有限温度にそのまま適用することはできない。絶対零度では形成されたクーパー対が重心運動量ゼロの状態にボース凝縮することにより超流動となるが、有限温度ではそれらが励起する。相互作用が非常に弱い場合、クーパー対の結合エネルギーが非常に小さいため主な励起過程は対破壊であるが、相互作用が強くなるとそれに加え、有限の重心運動量を持つ (非凝縮の) クーパー対が励起する過程も起こる。しかし、BCS-Leggett 理論では重心運動量を持たないクーパー対とその対破壊のみが考慮されており、有限の重心運動量を持つ非凝縮対の存在は無視されている。その結果、超流動転移温度 T_c は過大評価され、式 (1.11) に漸近すべき強結合極限で発散する。

この問題は、平均場近似を超えクーパー対の揺らぎの効果 (強結合効果と呼ばれる) を取り込み、非凝縮のクーパー対の存在を考慮することで解決する [43, 55, 56]。この詳細は、次章で説明する。

1.2.2 擬ギャップ現象

非凝縮クーパー対形成の効果が顕著に現れる現象として、ここで取り上げる擬ギャップ現象がある。擬ギャップ現象は、アンダードープ領域の銅酸化物高温超伝導体で盛んに議論されており [57–59]、近年では極低温フェルミ原子気体においても類似の現象が観測されている [60–62]。

超伝導状態や超流動状態 ($T < T_c$) では、1 粒子状態密度にギャップ構造が現れることが知られている [49–51]。これは、超伝導相や超流動相で 1 粒子励起を行うためには、クーパー対の結合エネルギーだけ系にエネルギーを与えることで対破壊を起こす必要があることを意味する。通常の金属超伝導体の場合、超伝導転移と同時にクーパー対が形成されるため、低温から温度を上げていくに従いクーパー対が破壊されていき、超伝導転移

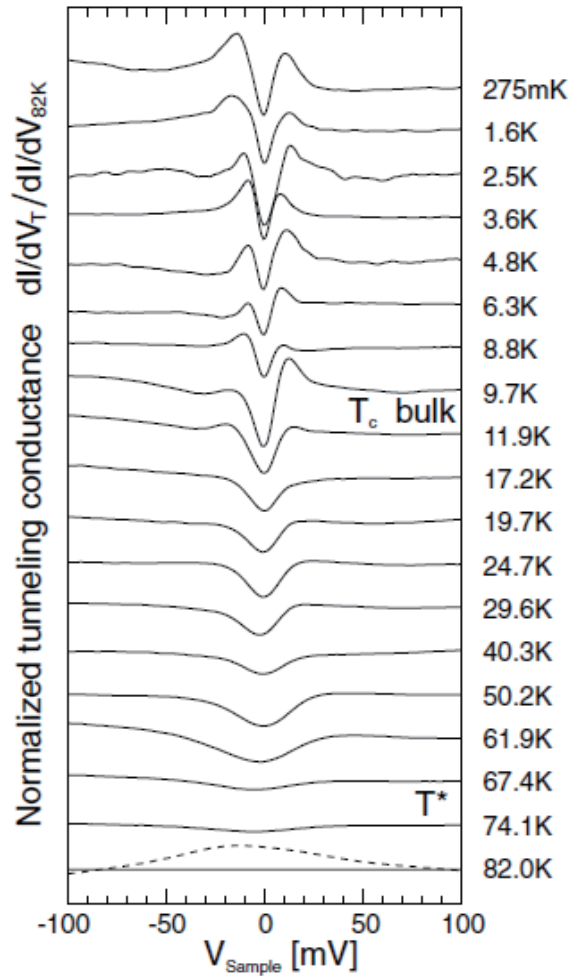


図 1.8 銅酸化物高温超伝導体 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_{6+\delta}$ で観測された擬ギャップ [63]。横軸は電圧 V_{Sample} 、縦軸は微分コンダクタンス dI/dV を $T = 82\text{K}$ の測定結果 (破線) で規格化したもので、1 粒子状態密度に比例する。 $T < T_c \simeq 10\text{K}$ で見られる超伝導ギャップは、 $T = T^* \simeq 68\text{K}$ まで残り続ける。Reprinted figure with permission from M. Kugler, Ø. Fischer, Ch. Renner, S. Ono, and Y. Ando, Phys. Rev. Lett. **86**, 4911 (2001). Copyright (2001) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.4911>.

温度 T_c ですべてのクーパー対が破壊される。そのため、エネルギーギャップは $T = T_c$ で消滅する。一方、アンダードーピングされた銅酸化物高温超伝導体では、 $T > T_c$ でも超伝導ギャップに類似の構造が観測されている [57–59]。図 1.8 は、銅酸化物高温超伝導体の $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_{6+\delta}$ においてトンネル電流の実験で測定された 1 粒子状態密度の温度依存性である [63]。 $T < T_c$ ($\simeq 10\text{K}$) に存在するギャップ構造は、超伝導転移温度 T_c よりはるかに高温 ($T^* \simeq 67\text{K}$) まで窪んだ構造として残り続ける。この現象は擬ギャップ現象と呼ばれており、その起源をめぐって長年議論が続けられている。

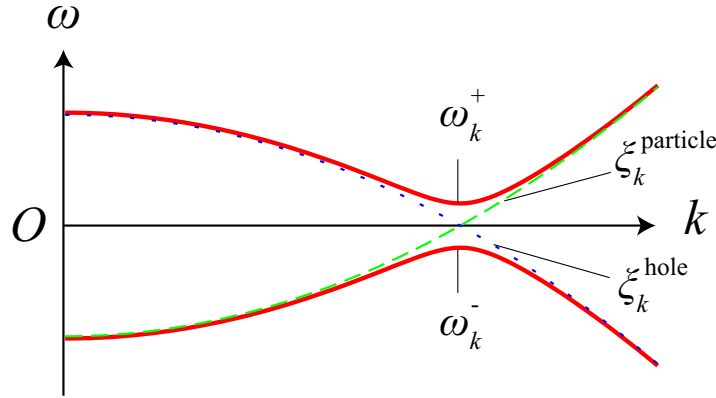


図 1.9 擬ギャップ現象の原理。非凝縮クーバー対が形成されると、式 (1.12) で与えられる粒子分散 $\omega = \xi_k^{\text{particle}}$ と、式 (1.13) で与えられるホール分散 $\omega = \xi_k^{\text{hole}}$ が (超流動転移温度以上でも) 結合しレベル反発する。その結果、 $\omega = 0$ 付近にギャップが開いた分散関係 $\omega = \omega_k^{\pm}$ (式 (1.14)) となる。ただし、実際の 1 粒子スペクトル強度は粒子間散乱などの影響で線幅を持つため、完全なエネルギーギャップとはならず窪み構造となる。

この起源として有力な候補の一つが、非凝縮のクーバー対が形成されることに因るとする説 (preformed pairing scenario) である [56, 64, 65]。アンダードープ領域の銅酸化物高温超伝導体は電子間相互作用が強いため、 $T \geq T_c$ でも非凝縮対が形成される。この電子気体で 1 粒子励起を起こす際、系はホールを励起し、対を組む相方の粒子を対消滅させることで対破壊を起こす。その結果、粒子分散

$$\xi_k^{\text{particle}} = \varepsilon_k - \mu, \quad (1.12)$$

とホール分散

$$\xi_k^{\text{hole}} = -(\varepsilon_k - \mu), \quad (1.13)$$

が結合する。ただし、 $\varepsilon_k = (\hbar k)^2/(2m)$ は電子の運動エネルギー、 μ は化学ポテンシャルである。図 1.9 にその様子を示した。2 つの分散が交差する付近 ($\omega = 0$ 付近) でレベル反発を起こした結果、準粒子分散は

$$\omega_k^{\pm} = \pm \sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}, \quad (1.14)$$

となる (図 1.9 の実線)。このとき $-\Delta_{\text{pg}} \leq \omega \leq \Delta_{\text{pg}}$ のエネルギー領域に状態が存在しなくなるため ($\mu > 0$ とした)、1 粒子状態密度にエネルギーギャップが開く。実際には、粒子分散、ホール分散は粒子間散乱等の影響でスペクトルに線幅を持つため、1 粒子状態密度には完全なギャップは開かず、窪み構造 (擬ギャップ) となるとするのが、この説である。式 (1.14) で表される準粒子分散は、銅酸化物高温超伝導体である $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ にお

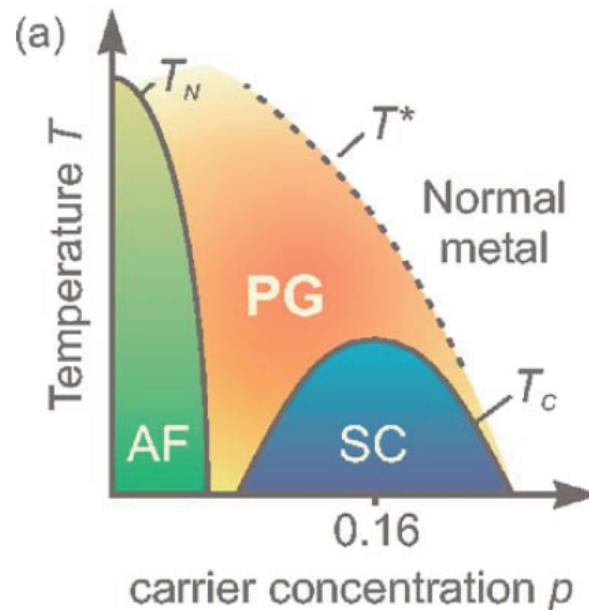


図 1.10 銅酸化物高温超伝導体のアンダードーブ領域における模式的な相図 [59]。縦軸は温度、横軸はホールドーブ量。 T_c は超伝導転移温度、 T_N は反強磁性相のネール温度。 T^* は擬ギャップが消失する温度。“SC” は超伝導相、“AF” は反強磁性相、“PG” は擬ギャップが現れる領域を表す。Reprinted figure with permission from Ø. Fischer, M. Kugler, I. Maggio-Aprile, C. Berthod, and Ch. Renner, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 353 (2007). Copyright (2007) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.79.353>.

いて角度分解型光電子分光実験 (Angle-resolved photoemission spectroscopy, ARPES) で観測されている [66]。

しかしながら、銅酸化物高温超伝導体ではその電子物性に効きうる要素は非凝縮対形成のみとは限らない。図 1.10 に銅酸化物高温超伝導体の相図を示す [59]。超伝導相の近傍には反強磁性相が存在し、その転移点近傍で生じる反強磁性揺らぎも擬ギャップ現象の起源の候補として有力である [67]。その他にも、隠れた秩序と格子欠陥によるもの [68] とするモデル等が提案されており、現状では統一的な理解に至っていない。

これに対し極低温フェルミ原子気体は、原子間引力相互作用が強いことを除くと上記のような複雑さのない非常にクリーンかつ単純な系であるため、銅酸化物高温超伝導体の擬ギャップの起源として考えられている候補のうち、非凝縮クーパ対の形成のみが起こりうる。そのため、この原子気体を用いることで、対形成揺らぎにより擬ギャップが現れるのか否かを検証することが可能である。

Jin のグループは、ARPES 実験に類似の方法を用いることで極低温フェルミ原子気体の 1 粒子状態を測定し、銅酸化物高温超伝導体の擬ギャップ状態で観測されたもの [66]

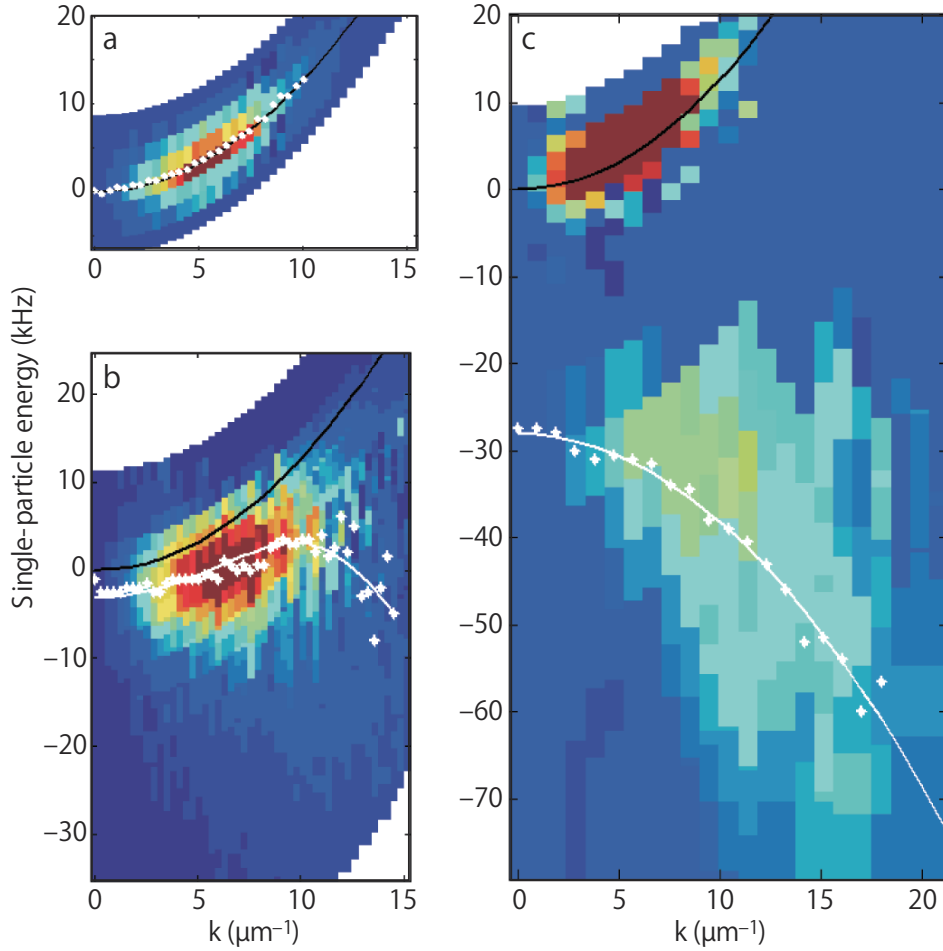


図 1.11 光電子分光型測定から観測された擬ギャップ現象 [60]。横軸：波数 k 、縦軸：1 粒子エネルギー。赤色が 1 粒子占有スペクトル強度が最も強く、黄色、青色になるにつれスペクトル強度が弱いことを示す。(a) 非常に弱い相互作用領域。(b) 中間結合領域にあたる $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。温度は $T \simeq T_c = 0.16 T_F$ 。(c) 分子ボソンを組む強結合領域である $(k_F a_s)^{-1} \simeq 1$ 。測定された束縛エネルギーは、 $h \times (25 \pm 2) \text{ kHz}$ (h はプランク定数)。白い点は、各波数 k に対するスペクトル強度の中心で、準粒子の分散関係を表す。白線は、 $\omega = \omega_k^-$ (式 (1.14)) によってフィッティングされた線 (μ, Δ_{pg} がフィッティング・パラメータ) である。ここで $k_F = (8.6 \pm 0.3) \mu\text{m}^{-1}$ 。Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature, J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, **454**, 744 (2008), copyright (2008). doi:10.1038/nature07172.

と類似の構造を観測した [60–62]。付録 A にこの実験方法の概要を示すが、この実験では 1 粒子スペクトル関数 $A(k, \omega)$ にフェルミ分布関数をかけたもの (1 粒子占有スペクトル強度) が測定される。ただし、トラップポテンシャル中の原子気体全体の空間平均が取られたものが観測される。図 1.11 は、 $T \gtrsim T_c$ における 1 粒子占有スペクトル強度の測定結果である。白点は、各波数 k に対するスペクトル強度の中心で、準粒子の分散関係を示す。相互作用強度の非常に弱い領域 (図 1.11(a)) で見られていた上反りの放物線は、相互作用強度が強くなると (図 1.11(b))、 $k \gtrsim k_F$ で下反りに切り替わる (back bending curve と呼ばれる)。また、相互作用が非常に強い領域では (図 1.11(c))、正の曲率を持つ放物線に加え、負の曲率を持つ放物線が観測された。

この結果は、非凝縮クーパー対が形成され準粒子分散が式 (1.14) のようになることで説明がつく [69–75]。図 1.11 に示した実験では 1 粒子占有スペクトル強度が測定されるため、下の分散 (式 (1.14) における ω_k^-) が主に観測される。実際、観測された分散 (図 1.11 中の白点) は、式 (1.14) の ω_k^- (図 1.11 中の白線) によく一致する。図 1.11(c) で上の分散が見えているのは、トラップの影響により原子気体が非一様であることに因るものである。トラップの端の付近は粒子数密度が低く実効的に高温となるため、多くの原子が解離しており、それが上の分散をもたらしている。この測定結果により、非凝縮対形成により極低温フェルミ原子気体でも擬ギャップが現れることが明らかとなった。

1.3 質量インバランスのある極低温フェルミ原子気体

以上見て来たように、極低温フェルミ原子気体の高い制御性は、強く相互作用するフェルミ超流動の性質を系統的に調べることを可能としてきた。近年では、異なる質量を持つ 2 種類のフェルミ原子を同時に捕獲した、質量インバランスを有する 2 成分極低温フェルミ原子気体の研究に注目が集まっている。この気体に対しフェッシュバハ共鳴を用いることで異種原子間のクーパー対を形成し、さらにそれらを冷却することで質量インバランスのあるフェルミ超流動が実現するのではないかと期待されている。

極低温フェルミ原子混合気体を用意するには、 ^6Li フェルミ原子と ^{40}K フェルミ原子を同時に制御する必要がある。しかし、光学トラップに用いるレーザー光の周波数などの実験的な制約は原子種により異なるため、それらを同時に捕獲、冷却するのは通常の 1 種類の原子を用いる場合に比べて難しい。捕獲した ^6Li フェルミ原子と ^{40}K フェルミ原子を直接蒸発冷却すると原子数が減り、量子縮退温度到達が困難になる。

Dieckmann のグループは、ボソンである ^{87}Rb を冷媒として用いることで、 ^6Li と ^{40}K を同時にフェルミ縮退温度以下に冷却することに成功した [1]。 ^{87}Rb を捕獲、蒸発冷却し、それを ^6Li - ^{40}K 混合気体と熱平衡化させるこの方法では、主役であるフェルミ原子成分である ^6Li と ^{40}K の数を (少なくとも原理的には) 減らさずに冷却できる。

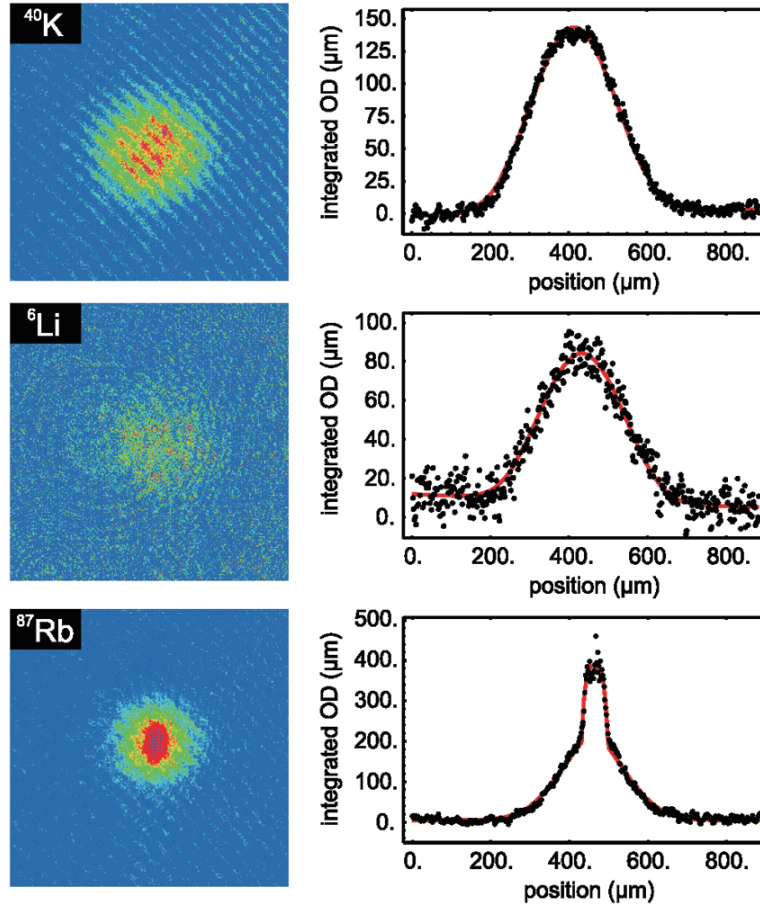


図 1.12 観測された ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合気体の同時量子縮退 [1]。冷媒である ${}^{87}\text{Rb}$ ボース原子気体は、ボース・アインシュタイン凝縮している。上中下のパネルはそれぞれ、 ${}^{40}\text{K}$ 、 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{87}\text{Rb}$ の測定結果を表す。左図は、原子をトラップから解放し、自由落下させた後に測定した吸収強度の空間分布で、これは原子気体の波数分布に対応する。赤色が吸収強度が強く、黄色、青色になるにつれ吸収強度が弱いことを表す。右図は、左図が射影された (積分された) もの。 ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子気体、 ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子気体に関しては左図の横軸方向、 ${}^{87}\text{Rb}$ ボース原子気体に関しては縦軸方向に積分を実行した。赤線は、フィッティング結果を表し、その結果から、 ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子気体の温度 $T_{\text{Li}} = 313\text{nK} < T_{\text{F}}^{\text{Li}} = 1.2\mu\text{K}$ 、 ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子気体の温度 $T_{\text{K}} = 184\text{nK} < T_{\text{F}}^{\text{K}} = 0.47\mu\text{K}$ 、 ${}^{87}\text{Rb}$ ボース凝縮体の温度は $T_{\text{Rb}} = 184\text{nK}$ であると測定された。原子の自由落下時間は ${}^{40}\text{K}$ 、 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{87}\text{Rb}$ でそれぞれ、15 ms、4 ms、20 ms。Reprinted figure with permission from M. Taglieber, A.-C. Voigt, T. Aoki, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, Phys. Rev. Lett. **100**, 010401 (2008). Copyright (2008) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.010401>.

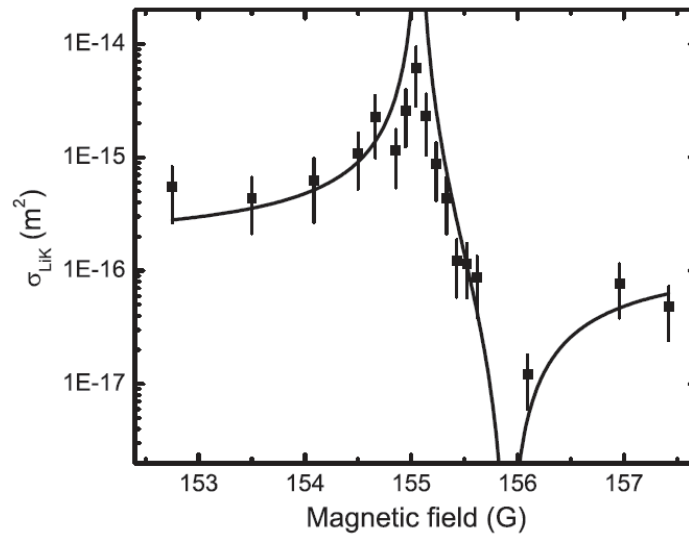


図 1.13 測定された ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子の $|F = 1/2, F_z = 1/2\rangle$ と ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子の $|F = 9/2, F_z = -5/2\rangle$ の間のフェッシュバツハ共鳴点 ($B_0 = 155.1\text{G}$) 近傍における散乱断面積 σ_{LiK} の磁場依存性 [3]。黒点は実験結果、実線は理論線である。Reprinted figure with permission from L. Costa, J. Brachmann, A.-C. Voigt, C. Hahn, M. Taglieber, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, Phys. Rev. Lett. **105**, 123201 (2010). Copyright (2010) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.123201>.

図 1.12 は、 ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子気体と ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子気体が同時に量子縮退領域にあることを示す実験結果である [1]。冷媒である ${}^{87}\text{Rb}$ は、ボース凝縮している。トラップされた原子気体を瞬間的にトラップをなくして解放し自由落下させると、高い運動量を持つ原子ほどよく広がる。これを利用し、落下する気体の空間分布を測定することで、系の波数分布を原子種ごとに測定することができる (Time of Flight(TOF) 法 [76])。フェルミ原子気体はフェルミ分布に従い、ボース原子気体については、ボース凝縮成分が従うトーマス・フェルミ分布 [29] と非凝縮成分が従うボース分布関数を足し上げた分布に従うと考えられるため、それらでフィッティングを行うことで、気体の温度を決定することができる。図 1.12 は、測定された ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{40}\text{K}$ 、および冷媒として用いられている ${}^{87}\text{Rb}$ の波数分布で、フィッティングの結果、 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{40}\text{K}$ 両方の原子気体でフェルミ温度 ($T_F^{\text{Li}} = 1.2\mu\text{K}$, $T_F^{\text{K}} = 0.47\mu\text{K}$) を下回る、 $T \sim 200\text{nK}$ が得られている [1]。さらに Grimm のグループは、2 成分の ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子の間にフェッシュバツハ共鳴を利用した気体と、 ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子気体との弾性衝突レートが高く蒸発冷却の効率が良いことを見出し [6]、 ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子気体と ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子気体の同時フェルミ縮退を実現している [7]。

また、異種フェルミ原子である ${}^6\text{Li}$ と ${}^{40}\text{K}$ の間のフェッシュバツハ共鳴の研究も近年

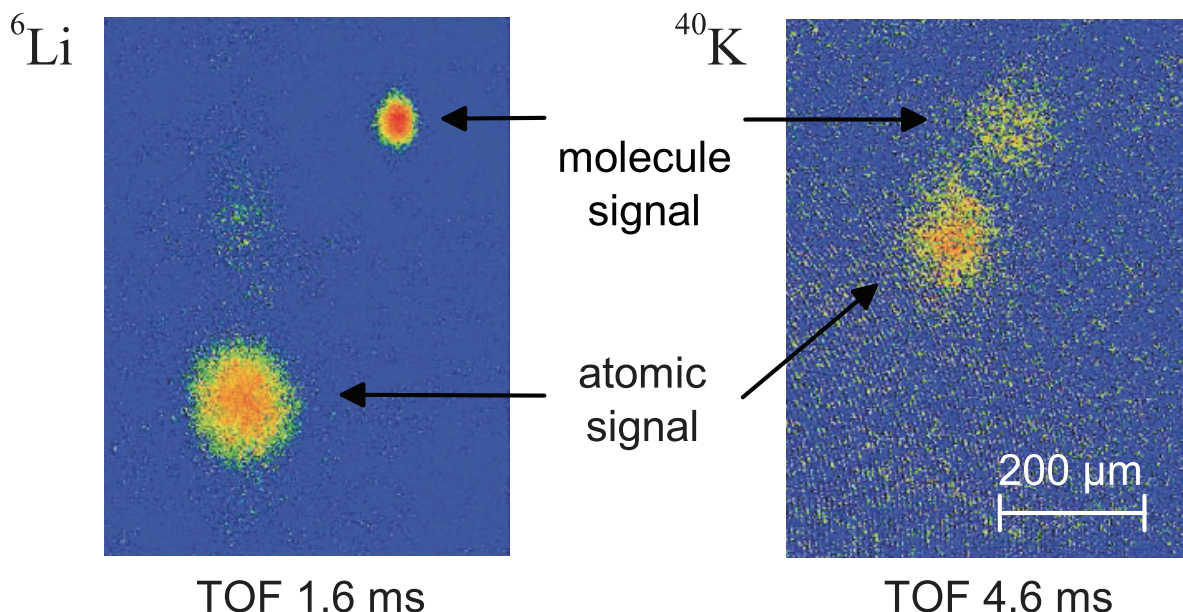


図 1.14 観測された ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子 [8]。 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合気体にフェッシュバッハ共鳴を用い部分的に分子を組ませたままトラップから解放、その吸収強度の空間分布を測定した結果である。自由落下の際、空間的に非一様な磁場パルスを $570\mu\text{s}$ の間印加することで、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子と ${}^6\text{Li}$ および ${}^{40}\text{K}$ 原子を空間的に分離している。磁場パルスの強度は $167\text{G}/\text{cm}$ 。左の図は ${}^6\text{Li}$ 、右の図は ${}^{40}\text{K}$ の吸収強度で、自由落下時間はそれぞれ、 1.6 ms 、 4.6 ms 。 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子 (“molecule signal”) と、 ${}^6\text{Li}$ および ${}^{40}\text{K}$ 原子 (“atomic signal”) の両方が観測されている。 Reprinted figure with permission from A.-C. Voigt, M. Taglieber, L. Costa, T. Aoki, W. Wieser, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 020405 (2009). Copyright (2009) by the American Physical Society. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.020405>.

大きく進展している [2–5]。図 1.13 に、 ${}^6\text{Li}$ フェルミ原子と ${}^{40}\text{K}$ フェルミ原子間のフェッシュバッハ共鳴点近傍における散乱断面積 σ_{LiK} の磁場依存性を示す [3]。フェッシュバッハ共鳴点付近 ($B_0 = 155.1\text{G}$) で散乱断面積 σ_{LiK} が大きく変化しており、 ${}^6\text{Li}$ と ${}^{40}\text{K}$ 間の相互作用の制御性が実験的に示された。この機構を用い、Dieckmann [8]、Grimm [7] の両グループが ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子の観測に成功している。図 1.14 は、Dieckmann のグループによる ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子形成の実験結果である [8]。捕獲した ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合気体に対し、フェッシュバッハ共鳴を用い分子が組んだ状態を生成した上で、それらをトラップから解放する。さらに自由落下する気体に対し、空間的に非一様な磁場パルスを与えた後、その吸収強度の空間分布を測定する。 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子と ${}^6\text{Li}$ 原子、 ${}^{40}\text{K}$ 原子は異なる磁気モーメントを持つため [8]、非一様な磁場パルスにより空間的に分子と原子が分離した形で観測されることになる。測定結果である図 1.14 には、 ${}^6\text{Li}$ 、 ${}^{40}\text{K}$ 両方に 2 種類のシグナル (“molecule signal” と “atomic signal”) が観測されており、これは確かに ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 分子が

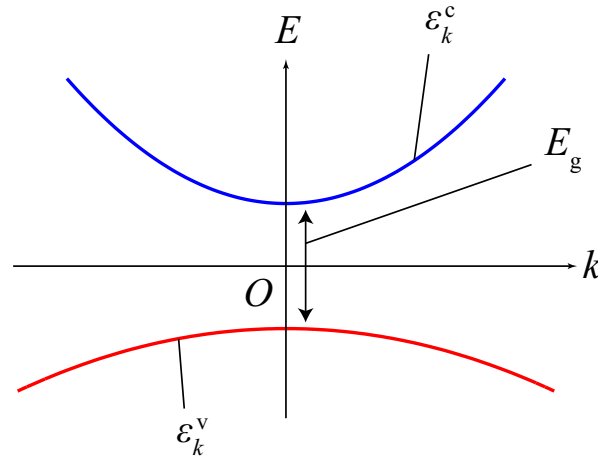


図 1.15 半導体バンド構造の模式図。この図は直接型半導体の場合を示している。青線が電子が励起される伝導帯 ε_k^c 、赤線が正孔が励起される価電子帯 ε_k^v 。 E_g は伝導帯と価電子帯の間のエネルギーギャップである。典型的に、伝導帯と価電子帯は 2-10 程度有効質量が異なる [79–82]。

形成されたことを示している。

この系は、半導体中で生成する電子正孔系 (励起子系) に類似している。図 1.15 は、典型的な半導体のバンド構造である。これにレーザー光を照射、あるいは電圧をかけると電子と正孔がそれぞれ伝導帯、価電子帯に励起される。電子、正孔間には強いクーロン相互作用が働くため、強相関多体効果を研究する恰好の舞台として、古くから注目を集めてきた [39–43, 77, 78]。この系では、非常に低温まで冷却することで電子と正孔が対 (励起子) を形成、ボース・アインシュタイン凝縮を起こしたり [39, 40]、極低温フェルミ原子気体で実現した BCS-BEC クロスオーバーが起こるのでは [42, 43]、と理論的に予想されている。

伝導帯の電子と価電子帯の正孔は通常、2 ~ 10 倍程度質量が異なるため [79–82]、この大きな質量の違いが対形成の性質に影響を与え、その結果、ボース凝縮やその揺らぎの物理に大きな影響を与える可能性は高い。しかし励起子系は、このような質量インバランスの効果以外にも、電子同士、正孔同士のクーロン斥力による遮蔽効果 [83, 84] や、電子・正孔が有限の寿命を持つことによる非平衡性 [44] などの複雑な要素も含んでいる。このため、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合気体のような励起子気体に比べ系の構成要素が単純で、かつ高い操作性を有する系は、励起子凝縮の物理の研究にも非常に有効であると考えられる。

質量の異なるフェルミ超流動が議論されているのは、ここで挙げた電子正孔気体に限らない。半導体量子井戸を微小共振器で挟むことで光子を閉じ込めることにより生成する電子正孔気体と光子とを強く結合した電子正孔光子気体 (励起子ポラリトン気体) [85–91] ではボース・アインシュタイン凝縮がすでに実現している [87, 88, 91]。さらに、高エネ

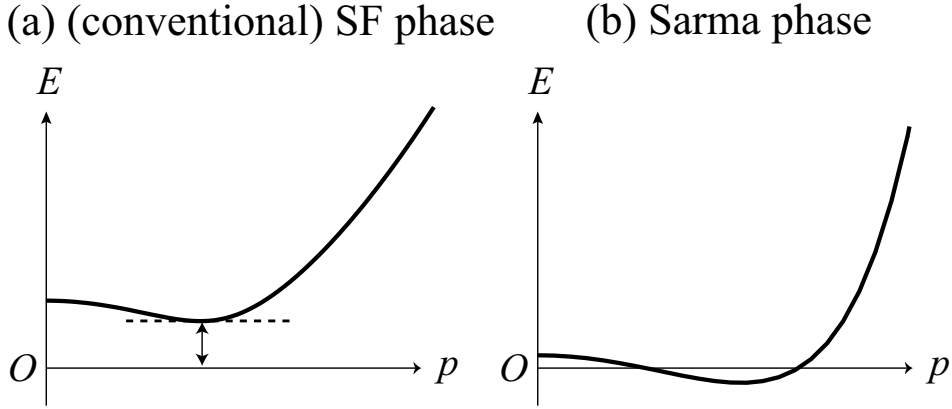


図 1.16 (a) 通常の超流動相の準粒子分散と、(b) サルマ相の準粒子分散。通常の超流動相では 1 粒子励起を起こすのに有限のエネルギーを必要とする。それに対しサルマ相では準粒子分散に負エネルギーの領域が存在し、ギャップレスとなる。

ルギー物理で議論されているカラー超伝導も [45, 46]、対を組むクォークが異なる質量を持っており (アップクォークとダウクォークは 2 倍程度、アップクォークとストレンジクォークは 100 倍程度質量が異なる)、これも質量インバランスを持つ超伝導である。

質量の異なる粒子間のクーパー対形成によるフェルミ超流動相では、サルマ相 [10, 12, 92] と呼ばれる特殊な相の出現が理論的に予言されている。通常の超流動相では準粒子分散が

$$E_k = \sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}, \quad (1.15)$$

で与えられ [49–51]、エネルギーギャップを有する (図 1.16(a))。一方サルマ相では図 1.16(b) のように、準粒子エネルギーに負の領域が現れ、エネルギーギャップが消失した形になっている。つまりこの相は、超流動相の一種であるにもかかわらず、無限小のエネルギーで 1 粒子励起を起こすことができる。このような特殊な超流動相であるサルマ相は、絶対零度では不安定であるものの [18]、有限温度では安定に存在できると理論的に予想されている [22]。

質量インバランスのあるフェルミ粒子系を理解する上で、鍵となる特徴は以下の点である。 $N/2$ 個の軽いフェルミ粒子 (質量 m_L) と $N/2$ 個の重いフェルミ粒子 (質量 m_H) からなる 2 成分フェルミ混合系を考える。図 1.17 に示すように絶対零度 $T = 0$ では、粒子間相互作用を無視した場合、両方の成分で同じ大きさのフェルミ波数

$$k_F = \sqrt{2m_L\varepsilon_F^L} = \sqrt{2m_H\varepsilon_F^H}, \quad (1.16)$$

を持つ。ただし、

$$\varepsilon_F^\sigma = \frac{(3\pi^2 N)^\frac{2}{3}}{2m_\sigma}, \quad (1.17)$$

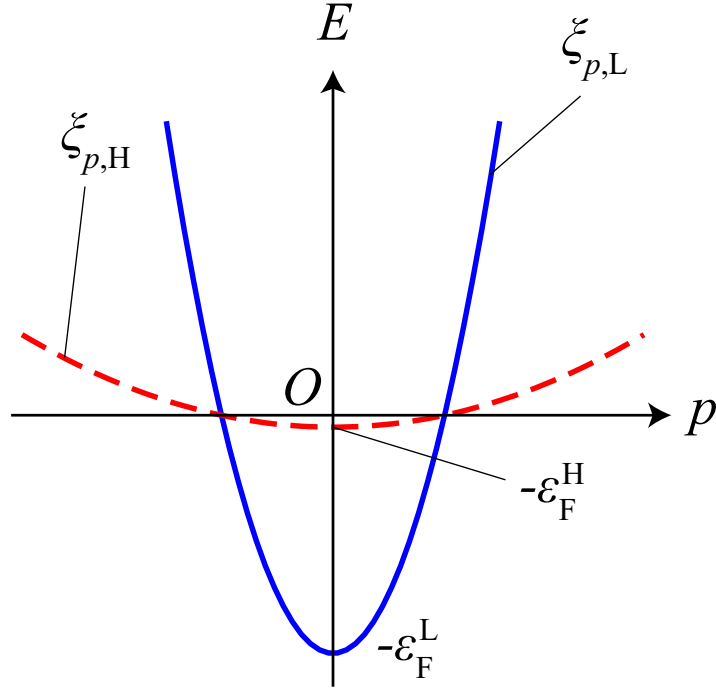


図 1.17 軽いフェルミ粒子 ($\sigma = L$)、重いフェルミ粒子 ($\sigma = H$) の分散関係 $\xi_{p,\sigma} = p^2/(2m_\sigma) - \varepsilon_F^\sigma$ の模式図。 ε_F^σ 、 m_σ はそれぞれ、 σ 成分のフェルミエネルギーと質量を表す。 $T = 0$ では、成分間に粒子数差がない場合、両成分は共通のフェルミ波数 k_F を持つ。

は σ 成分のフェルミエネルギーである。ここに (弱い) 引力相互作用が印加されると、フェルミ面近傍の波数 p の軽い粒子と波数 $-p$ の重い粒子がクーパー対を形成する。これは質量インバランスのないバランス系の場合と状況がさほど変わらないため、質量の違いはほとんど物性に影響を与えない [15]。

一方、有限温度では、 σ 成分の化学ポテンシャル μ_σ は

$$\mu_\sigma(T) = \varepsilon_F^\sigma \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F^\sigma} \right)^2 \right], \quad (1.18)$$

のように振る舞う [93]。ただし、

$$T_F^\sigma = \frac{\varepsilon_F^\sigma}{k_B}, \quad (1.19)$$

は σ 成分のフェルミ温度である。その結果、実効的なフェルミ波数

$$\tilde{k}_F^\sigma \equiv \sqrt{2m_\sigma\mu_\sigma(T)}, \quad (1.20)$$

は一般に、軽い粒子 ($\sigma = L$) と重い粒子 ($\sigma = H$) とでずれることになる。これは、外部磁場の印加された電子気体において、 $\uparrow$ -スピンと $\downarrow$ -スピンのフェルミ面にずれが生じ

るのと類似の状況である。その意味で質量インバランス系における温度 T は、有効的な磁場のように働く。さらに、軽い粒子、重い粒子それぞれの成分のフェルミ縮退の度合いは、それぞれのフェルミエネルギーと規格化された温度 T/T_F^{σ} によって決められる。 $T/T_F^H > T/T_F^L$ となるため ($m_H > m_L$)、軽い粒子に比べて重い粒子の方がフェルミ縮退が解けやすく、温度を上げていくと、後者の方が前者に比べ古典領域に入りやすい。

バランス系の場合 ($m_L = m_H$)、対形成相互作用の比較的弱い領域では、フェルミ面近傍のフェルミ粒子のみが対形成に寄与する。しかし質量インバランスのある場合、軽い粒子と重い粒子のフェルミ面にずれがある上、各成分のフェルミ面の熱励起によるぼやけ方にも違いがあるため、対形成の性質はバランス系の場合とは大きく異なると予想できる。クーパー対形成は超流動転移や擬ギャップ現象に直接関係しているため、その性質の変化が、これらの物理に大きな影響を及ぼす可能性は高い。

1.4 本論文の目的および構成

本論文では、質量インバランスを有する極低温フェルミ原子気体の強結合効果の理論研究を行う。ここまで述べてきたように、極低温フェルミ原子混合系の実験は近年、進展を見せているものの、超流動状態は未だ実現していない。その実現に向けた実験的努力に対し、どの程度の低温を達成すべきなのか等を、非凝縮クーパー対形成の効果も取り込んだ、定量的に信用度の高い理論で予測することは現在、当該研究分野における重要な課題となっている。

また、前述のサルマ相 [22] も強結合補正により大きな影響を受けると考えられる。図 1.18 は平均場超流動理論の枠組みで計算された ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系の相図であるが、この近似の範囲では中間結合領域から強結合領域にかけて、超流動転移温度 T_c 近傍にサルマ相が预言される (解析法は付録 B に詳説した)。しかし、前述のように平均場近似はこの領域の超流動転移温度 T_c を過大評価することが知られている。強結合極限では軽い原子の質量 m_L と重い原子の質量 m_H の和を質量に持つ理想分子ボース気体となり、そのときの超流動転移温度は (図 1.18 の点線)

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi\hbar^2}{(m_L + m_H)k_B} \left[\frac{N/2}{V\zeta(3/2)} \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (1.21)$$

となることが期待されるが、平均場近似の超流動転移温度 T_c 、あるいはサルマ相が预言されている温度領域はこれよりはるかに高い値である。

さらに、1.2.2 節で議論した擬ギャップ現象は非凝縮対形成により生じる現象であるため、対形成の性質を大きく変える質量インバランスの効果はこの現象にも大きな影響を及ぼすと予想される。擬ギャップは正常相の超流動転移点近傍で現れるため、擬ギャップ現

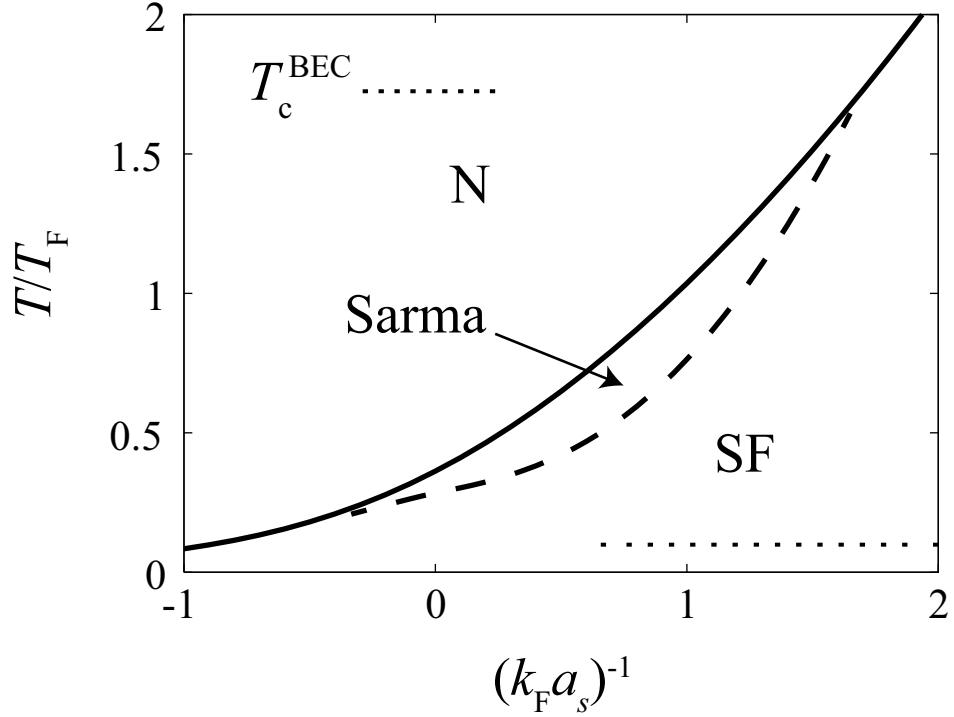


図 1.18 平均場近似により計算された ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系の相図 (解析法は付録 B に詳説した)。質量比は $m_L/m_H = 6/40 = 0.15$ 。軽い粒子と重い粒子の数は同数であることが仮定されている。縦軸はフェルミ温度 T_F で規格化された温度、横軸は相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ 。実線は超流動転移温度 T_c 、破線は準粒子エネルギーが負になる領域が現れ始める温度。点線は、式 (1.21) で与えられる、質量 $m_L + m_H$ を持つ理想分子ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮温度。ここで、“SF” は通常の超流動相、“N” は常流動相、“Sarma” はサルマ相である。この相図は平均場近似の枠組みで計算された結果であるため、強結合極限 $(k_F a_s)^{-1} \rightarrow \infty$ で分子ボソンのボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} (点線) に漸近せず、 T_c を過大評価する。

象の観測から、系がどの程度超流動転移に近づいているかを知ることにも可能なはずである。従って、擬ギャップ現象が現れる相互作用領域、温度領域を質量インバランスがある場合に理論的に予想することは非常に重要な課題である。

このような物理を研究するには、強結合効果を取り込む必要がある。そのような効果を取り込んだ理論である (非自己無撞着) T 行列近似 (T -matrix approximation, TMA) は、次章で説明するように、バランス系の極低温フェルミ原子気体における BCS-BEC クロスオーバーや擬ギャップ現象を記述する理論として大きな成功を収めてきた [69–75]。しかし、この理論を質量の異なる場合に拡張すると、物理量が 2 価になるといった非物理的な結果が得られる。この困難のため、質量インバランスのある極低温フェルミ原子気体の解析はそのほとんどが平均場近似による解析に頼らざるを得ず、絶対零度の解

析 [10–17, 20]、あるいは有限温度についての定性的な議論 [18, 19, 21, 22] にとどまっている。現状の強結合理論をどのように改良し、この系にも適用可能な理論をいかに構築するかは、当該研究分野の重要な課題の一つである。

本論文では、非自己無撞着 T 行列近似を適切に拡張することにより、この問題を解決する。この強結合理論が抱えていた問題点を指摘し、どのようにそれらが克服されるのかを段階的に高次補正を入れていくことで詳細に説明し、質量インバランスのあるフェルミ原子気体をも扱える理論を構築する。さらに、構築したこの強結合理論を用い 1 粒子状態の計算を行い、この系の擬ギャップ現象を解析する。

本論文の構成は、以下の通りである。第 2 章では、非自己無撞着 T 行列近似の定式化を行い、バランス系において極低温フェルミ原子気体の擬ギャップ現象がどのようにこの枠組みで説明されるかについて述べる。その後、質量インバランスのある場合ではこの理論が破綻することを指摘する。第 3 章では、非自己無撞着 T 行列近似に対して強結合補正をさらに高次まで取り込んだ自己無撞着 T 行列近似 (Self-consistent T -matrix approximation, SCTMA) [94–97] により質量インバランス系が記述可能であることを示す。この定式化の過程において、従来の非自己無撞着 T 行列近似の抱える 2 つの問題点を明らかにする。第 4 章では、自己無撞着 T 行列近似を用い 1 粒子励起を常流動相について解析し、この系に現れる成分に依存する擬ギャップ現象を明らかにする。

本論文では、系の体積を $V = 1$ とし、 $\hbar = k_B = 1$ とする単位系を用いる。

第 2 章

質量インバランスのある場合の非自己無撞着 T 行列近似とその破綻

本章では、極低温フェルミ原子気体における強結合効果の BCS-BEC クロスオーバー領域の強結合物性の研究で成功を収めてきた非自己無撞着 T 行列近似 (T -matrix approximation, TMA) についての説明を行う。その上で、この理論を質量の異なる 2 成分のフェルミ原子気体に適用すると、破綻することを指摘する。

まず、2.1 節で、非自己無撞着 T 行列近似の枠組みを説明する。すぐに質量インバランスのある場合に拡張するため、構成する 2 成分のフェルミ原子に質量差のある系について定式化する。次に 2.2 節で、質量インバランスのないバランス系における超流動転移温度 T_c 、化学ポテンシャル、1 粒子状態の相互作用依存性等を示し、非自己無撞着 T 行列近似が BCS-BEC クロスオーバーの物理を良く記述することを説明する。2.3 節では、2 成分に質量差を設けた場合の計算結果を示し、この近似が非物理的な結果を与え、改善の必要に迫られることを指摘する。さらに、その破綻の原因を議論する。

2.1 非自己無撞着 T 行列近似

質量の異なる 2 成分からなる、空間的に一様な極低温フェルミ原子気体を考える。この系を記述するハミルトニアンは、

$$H = \sum_{p,\sigma} \xi_{p,\sigma} c_{p,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q/2,L}^\dagger c_{-p+q/2,H}^\dagger c_{-p'+q/2,H} c_{p'+q/2,L}. \quad (2.1)$$

ここで $c_{p,\sigma}$ は、波数 p を持つフェルミ原子の消滅演算子である。 $\sigma = L, H$ はそれぞれ、質量 m_L を持つ軽いフェルミ原子と質量 m_H を持つ重いフェルミ原子を表す ($m_L \leq m_H$)。ただし、軽い原子、重い原子の各成分はスピンレス (すなわち、軽い原子 1 成分と重い原子 1 成分の気体) である。このモデルは、特に $m_L = m_H$ の場合、通常のバランス系に帰

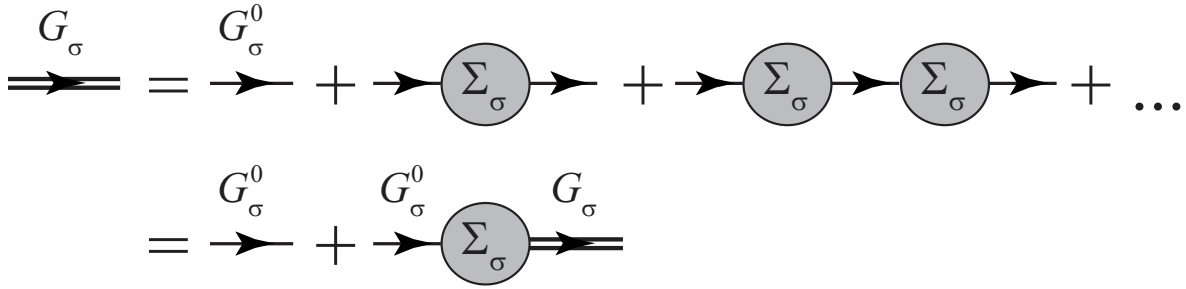


図 2.1 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ に対するダイソン方程式 (2.7) のダイアグラム表示。二重線は自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を含む 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.8))、実線は自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.6)) を表す。

着する。また、

$$\xi_{\mathbf{p},\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{p},\sigma} - \mu_\sigma = \frac{p^2}{2m_\sigma} - \mu_\sigma, \quad (2.2)$$

は化学ポテンシャル μ_σ から測った $\sigma (= \text{L, H})$ 成分の運動エネルギーである。 $-U (< 0)$ は軽い原子と重い原子の間に働く接触型の引力相互作用で、フェッシュバハ共鳴により可変であるとする。

このモデルに対し、1 粒子温度グリーン関数 [98–100]

$$G_\sigma(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T_\tau [c_{\mathbf{p},\sigma}(\tau) c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger(0)] \rangle, \quad (2.3)$$

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\sigma(\mathbf{p}, \tau), \quad (2.4)$$

を考える。ここで、

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(e^{-H/T} \dots), \quad (2.5)$$

は統計平均である。ただし、 T は系の温度、 Z は分配関数である。また、 τ は虚時間、 T_τ は虚時間順序付け演算子、 $c_{\mathbf{p},\sigma}(\tau)$ は場の演算子の相互作用表示である。 $\omega_n = (2n+1)\pi T (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ はフェルミ粒子の松原周波数を表す。図 2.1 にダイアグラム表示を示したように、自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数を

$$G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma}}, \quad (2.6)$$

とすると、 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ はダイソン方程式

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) + G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n), \quad (2.7)$$

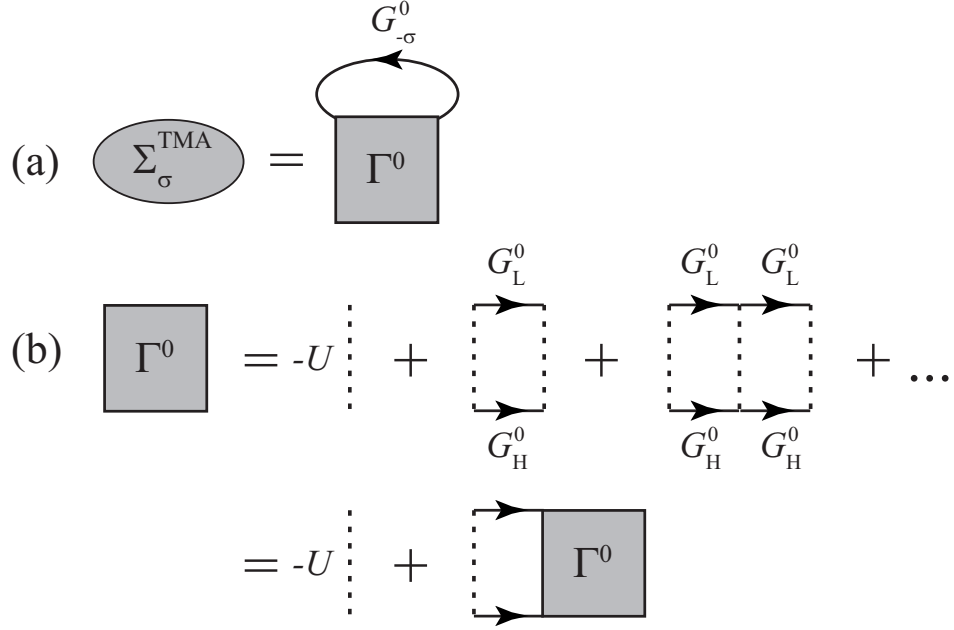


図 2.2 (a) 非自己無撞着 T 行列近似 (TMA) に取り込む自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.9))。 (b) 梯子型のヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ (式 (2.10)) のダイアグラム表示。実線は自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.6))、破線は相互作用 $-U$ 。

を満たす [98–100]。ここで $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ は自己エネルギーで、粒子間相互作用の効果を表す。式 (2.7) は次のように書くこともできる。

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{[G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)]^{-1} - \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)} = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma} - \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)}. \quad (2.8)$$

非自己無撞着 T 行列近似 (TMA) では、図 2.2(a) に示したファインマンダイアグラムを自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ として採用することで、強結合効果を取り込む。具体式は、

$$\Sigma_\sigma^{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) G_{-\sigma}^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n) e^{i(\nu_n - \omega_n)\delta}. \quad (2.9)$$

ここで $-\sigma$ は、 σ 成分の反対の成分を表す (例えば、 $\sigma = \text{L}$ のとき、 $-\sigma = \text{H}$ を意味する)。また、 $\nu_n = 2n\pi T$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) はボース粒子の松原周波数、 $\delta = 0^+$ は無限小の正数である。 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ は、図 2.2(b) に示す梯子型のファインマンダイアグラムを足し上げて得られるヴァーテックス関数

$$\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) = \frac{-U}{1 - U\Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n)}, \quad (2.10)$$

であり、物理的には引力相互作用により生じる対形成揺らぎを表す。式 (2.10) において、

$$\begin{aligned}\Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n) &= T \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} G_L^0(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, i\nu_n + i\omega_n) G_H^0(-\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, -i\omega_n) \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - f(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \text{L}}) - f(\xi_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \text{H}})}{i\nu_n - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \text{L}} - \xi_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \text{H}}},\end{aligned}\quad (2.11)$$

は最低次の2体相関関数である。ただし、

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/T} + 1}, \quad (2.12)$$

はフェルミ分布関数である。

超流動転移温度 T_c は、ヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ が $\mathbf{q} = \nu_n = 0$ に極が現れると同時に常流動相から超流動相への不安定化が起こるとする、サウレスの判定条件 [101]

$$0 = 1 - U\Pi^0(\mathbf{q} = 0, i\nu_n = 0), \quad (2.13)$$

により決定する。これは物理的には、超流動相に入ると同時にゴールドストーンモードが現れることを意味する。非自己無撞着 T 行列近似の場合、式 (2.13) の右辺を具体的に計算すると、

$$0 = 1 - \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh[\xi_{\mathbf{k}, \text{L}}/(2T)] + \tanh[\xi_{\mathbf{k}, \text{H}}/(2T)]}{\xi_{\mathbf{k}, \text{L}} + \xi_{\mathbf{k}, \text{H}}}, \quad (2.14)$$

が得られる。特に $m_L = m_H$ (バランス系) では

$$1 = U \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh[\xi_{\mathbf{k}}/(2T)]}{2\xi_{\mathbf{k}}}, \quad (2.15)$$

と平均場のギャップ方程式 ($T = T_c$) に一致する [49–51] ($\xi_{\mathbf{p}} = \xi_{\mathbf{p}, \text{L}} = \xi_{\mathbf{p}, \text{H}}$ は、バランス系におけるフェルミ原子の運動エネルギー)。この T_c 方程式 (2.13) と共に、

$$N_\sigma = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (2.16)$$

から計算される σ 成分のフェルミ原子数を

$$N_L + N_H = N, \quad (2.17)$$

$$N_L - N_H = 0, \quad (2.18)$$

の条件下で数値的に解くことで、超流動転移温度 T_c および化学ポテンシャル μ_L, μ_H を自己無撞着に決定する。また、 $T > T_c$ における系の物性を解析する際は、粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を解くことで、化学ポテンシャル μ_L, μ_H を決定する。このように計算された温度と化学ポテンシャルを式 (2.9) で与えられる自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ に代入することで、1粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を決定する。

1 粒子スペクトル強度、および、1 粒子状態密度は、以上のように決定した 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を解析接続することで得られる 1 粒子遅延グリーン関数 [98–100]

$$G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta), \quad (2.19)$$

から計算することができる。1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ は、

$$\begin{aligned} A_\sigma(\mathbf{p}, \omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega), \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{-\text{Im} \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)}{[\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma} - \text{Re} \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)]^2 + [\text{Im} \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)]^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

のように与えられ、これは系の 1 粒子励起の情報を持つ。これは、

$$\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma} - \text{Re} \Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta) = 0, \quad (2.21)$$

を満たす $\omega = \omega_{\mathbf{p}, \sigma}$ で大きな値を持ち、これが系の分散関係を与える。自由フェルミ気体の場合、1 粒子スペクトル強度は、自由粒子の 1 粒子遅延グリーン関数が

$$G_\sigma^{0R}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\delta - \xi_{\mathbf{p}, \sigma}} = P \frac{1}{\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma}} - \pi i \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma}), \quad (2.22)$$

となることに注意して (P はコーシーの主値)

$$A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega) = \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma}), \quad (2.23)$$

となり、 $\omega = \xi_{\mathbf{p}, \sigma}$ にデルタ関数的なピーク構造を持つ。式 (2.20) から分かるように、粒子間相互作用による多体効果を表す自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)$ は、この自由粒子のスペクトル強度のピーク構造を変形 (実部)、あるいはブロードにする (虚部) 役割を果たす。また、1 粒子状態密度は

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} A_\sigma(\mathbf{p}, \omega), \end{aligned} \quad (2.24)$$

で与えられる。

式 (2.11) や式 (2.14) の右辺の波数積分を実行すると、紫外発散する。これは、接触型相互作用を考えていることに起因するもので、この発散を防ぐためには、一般にカットオフ波数 k_c が必要となる。金属超伝導体の場合、電子間の引力相互作用はフォノンを媒介する過程から生じるため、カットオフ波数としてデバイ波数 k_D が用いられる [49–51]。しかし、本研究対象である極低温フェルミ原子気体には、このような明瞭な長さスケール

が存在しない。そこで、極低温フェルミ原子気体の研究では結合定数 $-U$ を、観測可能な s 波散乱長 a_s [33] に以下のように繰り込む [102]。

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \frac{-U}{1 - U \sum_{\mathbf{k}}^{k_c} \frac{m}{k^2}}. \quad (2.25)$$

ただし、

$$m = \frac{2m_L m_H}{m_L + m_H}, \quad (2.26)$$

は換算質量の2倍である。この処理により、式 (2.25) の右辺に存在するカットオフ波数を $k_c \rightarrow \infty$ としても $-U \rightarrow 0$ とすることで s 波散乱長 a_s が有限となり、物理的な起源が不明瞭なカットオフ k_c を理論から取り除くことができる。このスケールでは、 $(k_F a_s)^{-1} \lesssim -1$ は弱結合領域、 $1 \lesssim (k_F a_s)^{-1}$ は強結合領域に対応することになる ($k_F = (3\pi^2 N)^{1/3}$ は N 粒子フェルミ粒子系におけるフェルミ波数)。 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ は中間的な相互作用強度で、ユニタリー極限 (unitary limit, unitarity) と呼ばれており、また、 $-1 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1$ は BCS-BEC クロスオーバー領域と呼ばれる。

2.2 バランス系における BCS-BEC クロスオーバーと擬ギャップ現象

本節では、質量インバランスのない ($m_L = m_H (= m)$) 極低温フェルミ原子系の結果を述べ、非自己無撞着 T 行列近似が BCS-BEC クロスオーバー領域の T_c や、擬ギャップ現象をよく記述することを述べる。バランス系では軽い原子 ($\sigma = L$) と重い原子 ($\sigma = H$) を区別する必要がないため、本節では添え字 σ を省略する (例えば、 $G_\sigma \rightarrow G$)。

図 2.3(a) は、BCS-BEC クロスオーバー領域における超流動転移温度 T_c である。また、図 2.3(b) には、超流動転移温度 T_c での化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ を示してある。相互作用が弱い極限では、強結合補正が無視できるようになり ($\Sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \rightarrow 0$)、対形成揺らぎを無視した BCS 理論に帰着する。この極限ではフェルミ面を形成されるため、化学ポテンシャルは

$$\mu = \varepsilon_F, \quad (2.27)$$

となり ($\varepsilon_F = k_F^2/(2m)$ はフェルミエネルギー)、超流動転移温度は

$$T_c^{\text{BCS}} = \frac{8}{\pi} e^{\gamma-2} \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}, \quad (2.28)$$

のように、相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ に対して指数関数的に上昇する (図 2.3(a) の破線) [43, 55]。ここで $\gamma = 0.577\dots$ はオイラー定数である。ここから相互作用強度を強くして

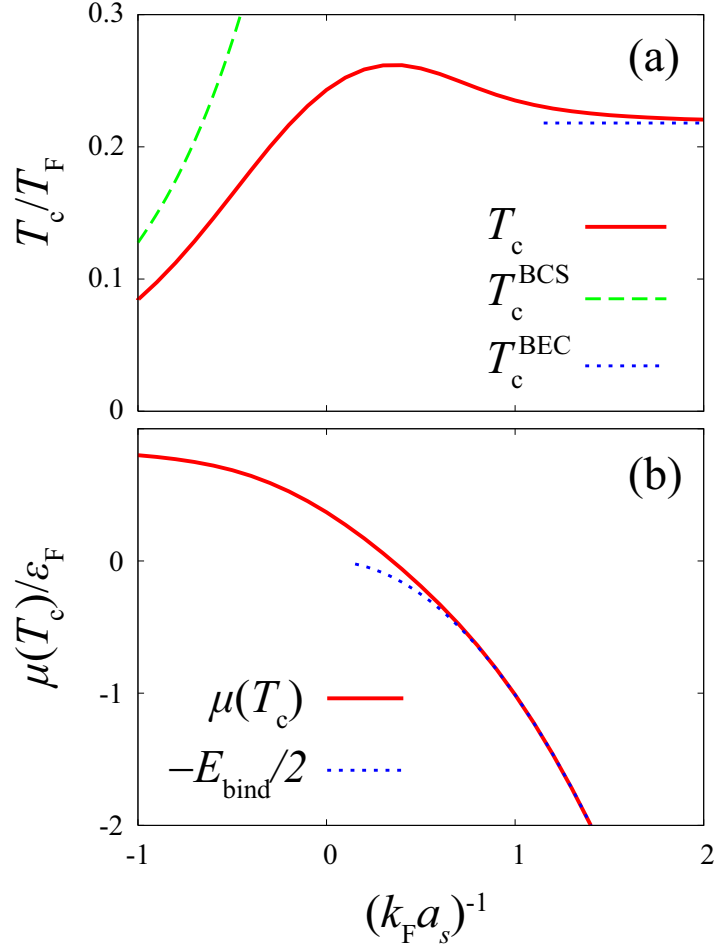


図 2.3 非自己無撞着 T 行列近似によって計算されたバランス系 ($m_L = m_H$) の (a) 超流動転移温度 T_c および、(b) T_c における化学ポテンシャル $\mu(T_c)$ 。 T_c および $\mu(T_c)$ はそれぞれ、フェルミ温度 $T_F = k_F^2/(2m)$ およびフェルミエネルギー ϵ_F で規格化されている。比較のため、(a) では T_c^{BCS} (2.28)、 T_c^{BEC} (2.35)、(b) では $-E_{\text{bind}}/2$ を示した。

いくと、超流動転移温度 T_c の上昇は徐々に抑制され、BCS 理論の T_c^{BCS} (2.28) に比べ低くなっていく。それと同時に、化学ポテンシャル μ もフェルミエネルギー ϵ_F から減少する。

強結合極限では、付録 C に示すように、梯子型のヴァーテックス関数が

$$\Gamma^{0(\text{BEC})}(\mathbf{q}, i\nu_n) = -\frac{8\pi}{m^2 a_s} \frac{1}{i\nu_n - q^2/(2M) + \mu_B}, \quad (2.29)$$

のように、質量 $M = 2m$ を持つ分子ボソンの 1 粒子温度グリーン関数に比例する形となる。ここで

$$\mu_B = 2\mu + E_{\text{bind}}, \quad (2.30)$$

は、自由なボース粒子の 1 粒子温度グリーン関数との比較から明らかなように、分子ボソンの化学ポテンシャルに対応する。ただし、

$$E_{\text{bind}} = \frac{1}{ma_s^2}, \quad (2.31)$$

は、分子ボソンの結合エネルギーである。このときの粒子数方程式 (2.17) は、付録 C に示すように、

$$\frac{N}{2} = \sum_q n_B \left(\frac{q^2}{2M} - \mu_B \right), \quad (2.32)$$

となる。ただし、

$$n_B(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1}, \quad (2.33)$$

はボース分布関数である。このように、この気体は $N/2$ 粒子系の理想分子ボース気体で記述される。サウレスの判定条件 (2.13) は超流動転移温度 T_c で $\Gamma^{0(\text{BEC})}(q, i\nu_n)$ (式 (2.29)) が $q = \nu_n = 0$ に極を持つことを要求するため、超流動転移温度 T_c では $\mu_B = 0$ となり、式 (2.30) から、

$$\mu(T_c) = -\frac{E_{\text{bind}}}{2}, \quad (2.34)$$

となる (図 2.3(b) の点線)。これは、系に 2 つの粒子を入れると、直ちに分子ボソンを形成、系のエネルギーが結合エネルギーだけ下がることを表している。さらに、この結果を式 (2.32) に代入することで、強結合極限の T_c がボース・アインシュタイン凝縮温度

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi}{M} \left(\frac{N/2}{\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.35)$$

へと漸近することが示される (図 2.3(a) の点線)。ただし、 $\zeta(x)$ はツェータ関数である。

図 2.4 は、超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ である。相互作用が比較的弱い領域 ($(k_F a_s)^{-1} = -0.5$) において、窪んだ構造が $\omega = 0$ 付近に現れる。この構造は、擬ギャップと呼ばれている。擬ギャップ構造は、相互作用強度を強めていくほどより大きくなっていき、強結合領域 $(k_F a_s)^{-1} = 1$ では、分子ボソンの束縛エネルギー E_{bind} 程度のギャップが開く。

この構造は、対形成揺らぎにより非凝縮クーパー対が形成し、粒子分散とホール分散が結合することによって生じる。超流動転移温度 T_c ではサウレスの判定条件 (2.13) より $\Gamma^0(q = 0, i\nu_n = 0)$ が発散するため、超流動転移点付近では対形成揺らぎが増大し、ヴァーテックス関数 $\Gamma^0(q, i\nu_n)$ が低波数・低エネルギーに大きな値を持つ。式 (2.9) にお

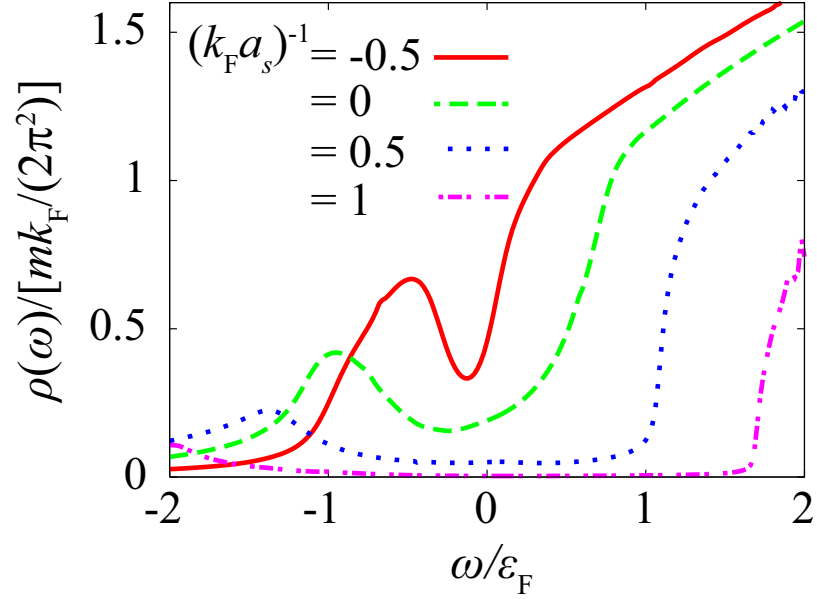


図 2.4 超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ の相互作用強度依存性。1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ は、 $\omega = 0$ における自由粒子の 1 粒子状態密度 $\rho^0(0) = mk_F/(2\pi^2)$ で規格化されている。

ける $G^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ の $\mathbf{q}, i\nu_n$ 依存性は $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ のそれに比べ緩やかであるため、近似的に $G^0(-\mathbf{p}, -i\omega_n)$ とすることができ (静的近似) [69, 70]、

$$\Sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \Sigma_{\text{Hartree}} - \Delta_{\text{pg}}^2 G^0(-\mathbf{p}, -i\omega_n). \quad (2.36)$$

ここで、 $\Sigma_{\text{Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}$ はエネルギーの定数シフトを与えるハートレー項である。また式 (2.36) において、

$$\Delta_{\text{pg}}^2 = -T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} [\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) + U] (> 0), \quad (2.37)$$

は擬ギャップパラメータと呼ばれる量で [69]、対形成揺らぎの大きさを特徴づける量である。式 (2.36) を 1 粒子温度グリーン関数の表式 (2.8) に代入すると、

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \frac{1}{[G^0(\mathbf{p}, i\omega_n)]^{-1} - \Sigma_{\text{Hartree}} - \Delta_{\text{pg}}^2 G^{(\text{hole})0}(\mathbf{p}, i\omega_n)}, \quad (2.38)$$

が得られる。ここで、

$$G^{(\text{hole})0}(\mathbf{p}, i\omega_n) = -G^0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}}, \quad (2.39)$$

は、(自由な) ホールの 1 粒子温度グリーン関数である。式 (2.38) は、自由な 1 粒子グリーン関数 $G^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ と自由なホールの 1 粒子温度グリーン関数 $G^{(\text{hole})0}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ が擬

ギャップパラメータ Δ_{pg}^2 を通して混じる表式となっているため、粒子分散 $\omega = \xi_{\mathbf{p}}$ とホール分散 $\omega = -\xi_{\mathbf{p}}$ が結合し、レベル反発する。その結果、式 (2.38) を解析接続した 1 粒子遅延グリーン関数 (ただし、 μ を $\mu - \Sigma_{\text{Hartree}}$ に置き換えた)

$$G^{\text{R}}(\mathbf{p}, \omega) \simeq \frac{\omega + i\delta + \xi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i\delta)^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta_{\text{pg}}^2}, \quad (2.40)$$

から分かるように、

$$\omega = \pm \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2} (\equiv \pm E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}}), \quad (2.41)$$

の分散関係が現れる。式 (2.40) は、形式的に平均場 BCS 理論で得られる 1 粒子遅延グリーン関数の対角成分 [50, 99]

$$[G^{\text{MF}}(\mathbf{p}, \omega)]^{\text{R}} \simeq \frac{\omega + i\delta + \xi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i\delta)^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2}, \quad (2.42)$$

における超流動秩序パラメータ Δ を擬ギャップパラメータ Δ_{pg} に置き換えた形をしており、対形成揺らぎが Δ と同様の役割を果たしていることが分かる。結果、常流動相であるにもかかわらず、図 2.4 に示したように、超流動ギャップに類似の構造が 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ に現れる。

図 2.5 は、超流動転移温度 T_c における 1 粒子スペクトル強度 $A(\mathbf{p}, \omega)$ の相互作用強度依存性である。静的近似の範囲において、式 (2.40) から 1 粒子スペクトル強度は

$$A(\mathbf{p}, \omega) \simeq u_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}}) + v_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}}), \quad (2.43)$$

となるため ($u_{\mathbf{p}}^2 = [1 + (\xi_{\mathbf{p}}/E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}})]/2$, $v_{\mathbf{p}}^2 = [1 - (\xi_{\mathbf{p}}/E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}})]/2$)、式 (2.41) で表される分散に強いスペクトル強度を持つことになる。相互作用が弱い領域 ($(k_{\text{F}}a_s)^{-1} = -0.5$) から強くなるに従い、粒子とホールの結合が強くなるため、擬ギャップがより顕著となっていく (図 2.5(a)、(b))。図 2.5(c) に示した強結合領域 ($(k_{\text{F}}a_s)^{-1} = 1$) では化学ポテンシャル μ が負であるため、2 本の分散 ($\omega = E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}} \simeq \xi_{\mathbf{p}} > 0$ と $\omega = -E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}} \simeq -\xi_{\mathbf{p}} < 0$) は交差しない。ここで、強結合領域では $\Delta_{\text{pg}} \ll |\mu|$ となることを用いた。それらのエネルギー差が $2|\mu| \simeq E_{\text{bind}}$ となることは、1 粒子励起を起こすのに分子ボソンを破壊する必要があることを表している。

このように非自己無撞着 T 行列近似は対形成揺らぎにより生じる粒子分散とホール分散の結合の効果を記述することができ、擬ギャップ現象を説明できる理論となっている。実際、この理論に基づきトラップの影響を加味した解析で計算された 1 粒子占有スペクトル強度

$$L(\mathbf{p}, \omega) = A(\mathbf{p}, \omega)f(\omega), \quad (2.44)$$

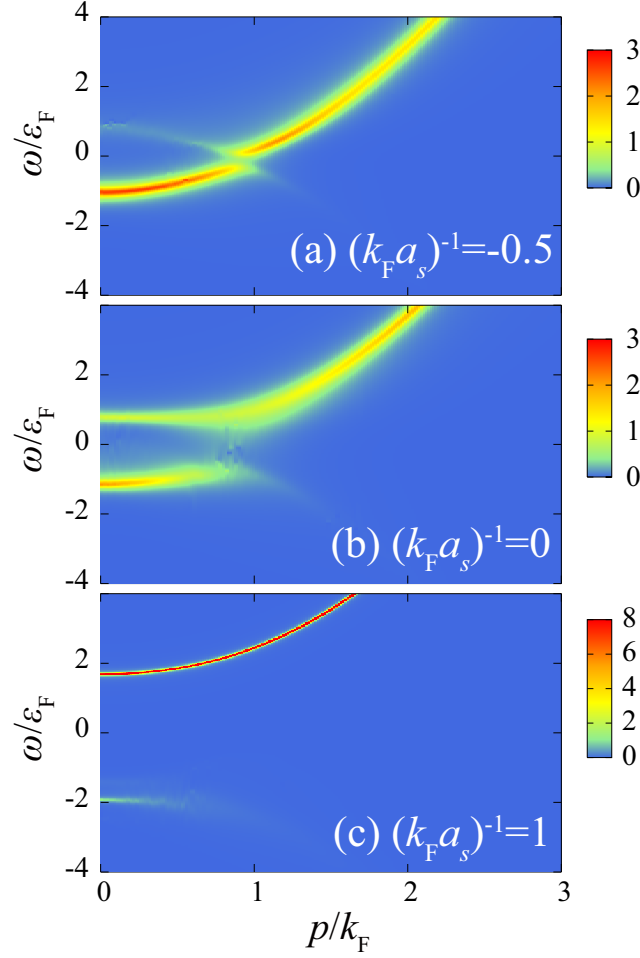


図 2.5 超流動転移温度 T_c における 1 粒子スペクトル強度 $A(p, \omega)$ の相互作用強度依存性。(a) $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ 。(b) $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。(c) $(k_F a_s)^{-1} = 1$ 。 $A(p, \omega)$ の大きさは、フェルミエネルギーの逆数 ε_F^{-1} で規格化してある。

は、図 1.11 に示した超流動転移温度 T_c における光電子分光型測定の実験結果 [60] を定量的に再現する [71]。

超流動転移温度 T_c よりも高温になるとサウレスの判定条件 (2.13) を満たさなくなり、対形成揺らぎが抑制される。図 2.6 は、 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ および 1 粒子スペクトル強度 $A(p, \omega)$ の温度依存性である。温度が上がるにつれ 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ の $\omega = 0$ 付近に現れる擬ギャップ構造が埋まっていき、 $T \sim 0.3T_F$ において消失する。さらに高温では、自由粒子の 1 粒子状態密度 $\rho(\omega) \sim \sqrt{\omega + \mu}$ に近づいていく。1 粒子スペクトル強度 $A(p, \omega)$ も高温になるに従い非凝縮対の形成が抑制されるため、ホール分散 $\omega = -\xi_p$ からのスペクトル強度が弱くなっていき、通常の粒子分散 $\omega = \xi_p$ に近づいていく。

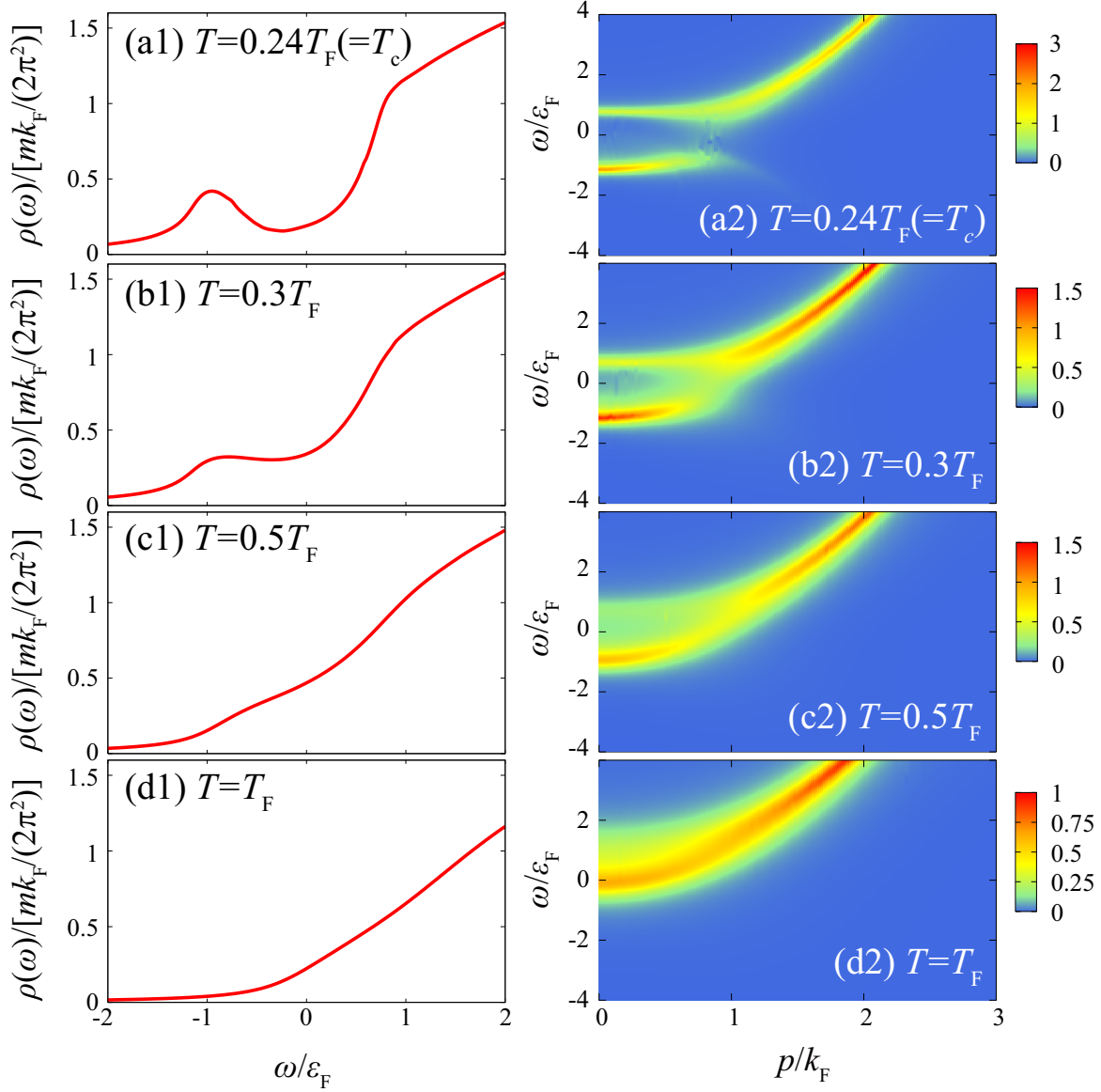


図 2.6 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ (左図) と 1 粒子スペクトル強度 $A(\mathbf{p}, \omega)$ (右図) の温度依存性。(a1), (a2) $T = 0.24T_F (= T_c)$ 。(b1), (b2) $T = 0.3T_F$ 。(c1), (c2) $T = 0.5T_F$ 。(d1), (d2) $T = T_F$ 。 $A(\mathbf{p}, \omega)$ は、フェルミエネルギーの逆数 ε_F^{-1} で規格化されている。

2.3 質量インバランスのあるフェルミ気体における非自己無撞着 T 行列近似の破綻

以上見て来たように、非自己無撞着 T 行列近似はバランス系の BCS-BEC クロスオーバーや擬ギャップ現象をよく記述する理論であるため、当該研究分野で広く用いられて来

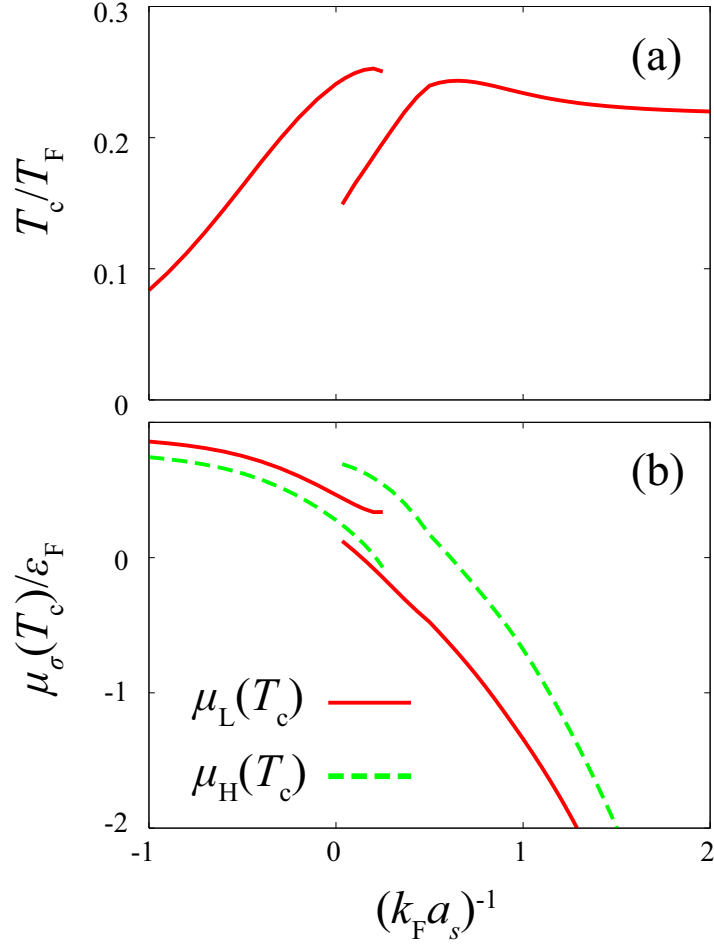


図 2.7 非自己無撞着 T 行列近似の枠組みで計算した、質量比 $m_L/m_H = 0.9$ における (a) 超流動転移温度 T_c および、(b) T_c における化学ポテンシャル $\mu_L(T_c), \mu_H(T_c)$ の相互作用依存性。 $T_c, \mu_\sigma(T_c)$ はそれぞれ質量 m (換算質量の 2 倍) を持つ粒子のフェルミ温度 $T_F = k_F^2/(2m)$ およびフェルミエネルギー $\epsilon_F = k_F^2/(2m)$ で規格化されている。

た [69–75]。しかし、質量に違いのある 2 成分極低温フェルミ原子気体にこの理論を拡張すると、BCS-BEC クロスオーバー領域で破綻する。図 2.7 は、質量比 $m_L/m_H = 0.9$ における超流動転移温度 T_c と、 $T = T_c$ における化学ポテンシャル $\mu_L(T_c), \mu_H(T_c)$ の計算結果である。このように、非自己無撞着 T 行列近似は物理量が 2 価性を持つといった、非物理的な結果を与える。

この原因は、以下に示すように、非自己無撞着 T 行列近似が強結合補正を自己無撞着な形で取り扱っていないためである。相互作用する多体系では、粒子間散乱を繰り返すことにより 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(p, \omega)$ が変調する。系の中の 1 つの粒子に着目すると、その粒子は変調した 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(p, \omega)$ を持つ粒子と相互作用するはずであ

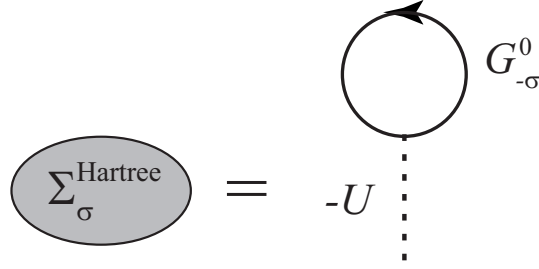


図 2.8 ハートレー近似の自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{Hartree}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.45)) のダイアグラム表示。実線は自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_{\sigma}^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、破線は引力相互作用 $-U$ を表す。

る。しかし、非自己無撞着 T 行列近似では散乱相手を自由粒子とみなしている。なぜなら、粒子間散乱等の相互作用効果を表す自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.9)) には自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_{-\sigma}^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ が用いられており、多体効果による 1 粒子励起構造の変調が散乱過程に反映されていないためである。このような近似は、バランス系では定量的な違いを及ぼすにすぎないが、質量インバランスのある場合、深刻な問題を引き起こす。

これを見るため、ヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ を相互作用 $-U$ に置き換える。図 2.8 にダイアグラム表示を示すように、このときの非自己無撞着 T 行列近似の自己エネルギーは

$$\Sigma_{\sigma}^{\text{Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = -UN_{-\sigma}^0, \quad (2.45)$$

に簡単化される (ハートレー近似、Hartree approximation)。ただし、

$$N_{\sigma}^0 = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{\sigma}^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (2.46)$$

は、相互作用による補正の入っていない 1 粒子温度グリーン関数 $G_{\sigma}^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ から計算される。

図 2.9 は、ハートレー近似の自己エネルギー (式 (2.45)) を用い粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を解いて決定した化学ポテンシャル μ_{σ} である ($T = 0$ とした)。相互作用効果はエネルギーシフト $-UN_{-\sigma}^0$ (式 (2.45)) を与え、化学ポテンシャル μ_{σ} を低下させる。質量インバランスを有する場合、重い成分の方が軽い成分に比べ平坦な分散を持つため μ_{H} の方が μ_{L} に比べ先にゼロに近づき、

$$N_{\text{H}}^0 < N_{\text{L}}^0, \quad (2.47)$$

となる。極端な場合、

$$\mu_{\text{L}} > \mu_{\text{H}} = 0, \quad (2.48)$$

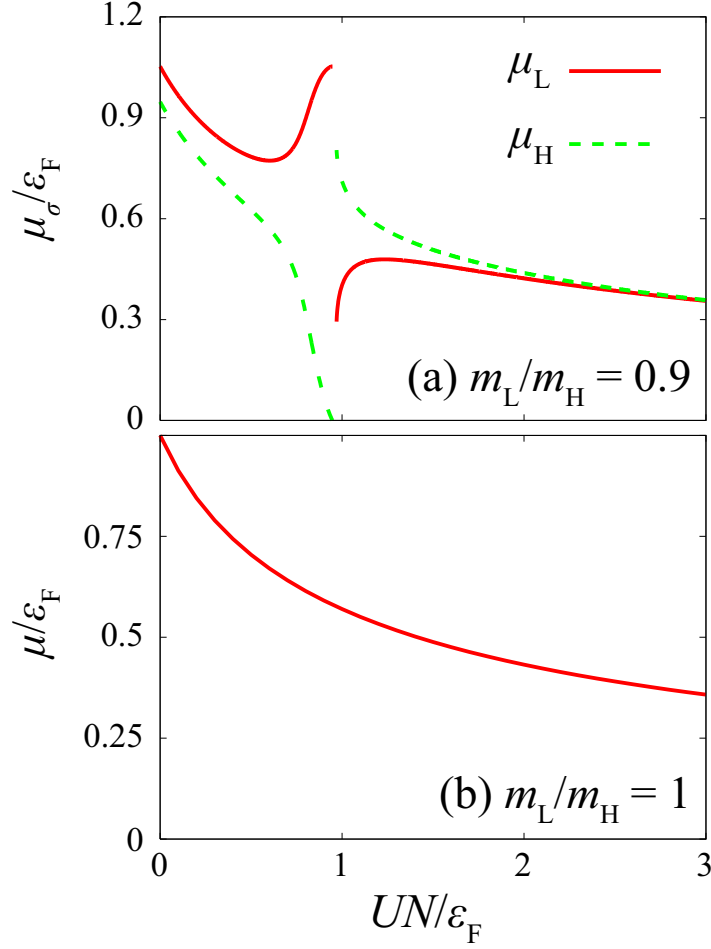


図 2.9 ハートレー近似における自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{Hartree}}$ (式 (2.45)) を用い粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を解いて得られた化学ポテンシャル μ_{σ} 。温度は $T = 0$ とした。(a) $m_L/m_H = 0.9$ 。非自己無撞着 T 行列近似の計算結果 (図 2.7(b)) と類似の異常が現れている。(b) バランス系 $m_L/m_H = 1$ 。両成分が同じ化学ポテンシャルなので、添え字は省略した。バランス系には、(a) に見られる異常な振る舞いが現れない。

すなわち

$$N_L^0 = \frac{(2m_L\mu_L)^{3/2}}{6\pi^2} > 0, \quad (2.49)$$

かつ

$$N_H^0 = 0, \quad (2.50)$$

となる。このとき、2 成分間で相互作用しているにもかかわらず重い成分のみが軽い成分と結合し ($\Sigma_H^{\text{Hartree}} \neq 0$)、軽い成分は自由粒子として振る舞う ($\Sigma_L^{\text{Hartree}} = 0$) という非物理的な結果を与える。その結果、質量インバランスのある場合、重い成分の化学ポテン

シャルが $\mu_H = 0$ となる付近で非自己無撞着 T 行列近似で得られるものと類似の異常が計算結果に現れる (図 2.9(a))。一方バランス系では、図 2.9(b) に示すように、このような異常は現れない。

質量インバランス系と同様の非自己無撞着 T 行列近似の破綻は、スピンインバランスのある極低温フェルミ原子気体 [103] においても指摘されている。スピンインバランス系は、2 つの擬スピン状態 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ の原子数が異なる ($N_\uparrow \neq N_\downarrow$) 極低温フェルミ原子気体で、 $\uparrow$ -成分、 $\downarrow$ -成分それぞれのフェルミ面がずれた状態にある。この系では、 $\uparrow$ -成分の化学ポテンシャル $\mu_\uparrow$ と $\downarrow$ -成分の化学ポテンシャル $\mu_\downarrow$ の差

$$h_p = \frac{\mu_\uparrow - \mu_\downarrow}{2}, \quad (2.51)$$

が 2 成分間に原子数差、および、フェルミ面のずれをもたらしているため、 h_p は有効的な磁場とみなすことができる。非自己無撞着 T 行列近似を用いてこの有効磁場 h_p に対するスピン帯磁率

$$\chi = \lim_{h_p \rightarrow 0} \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{h_p}, \quad (2.52)$$

を計算すると、 $0.5 \lesssim (k_F a_s)^{-1} \lesssim 1.1$ で負の値を示すことが理論的に指摘されている [103]。スピン帯磁率 χ が負であることは系が微小磁場に対して不安定であることを意味しているため、熱力学的に禁止されており [104]、非自己無撞着 T 行列近似が破綻していることを意味している。

この負のスピン帯磁率の問題の原因も、非自己無撞着 T 行列近似をハートレー近似に簡単化することで理解することができる [103]。スピンインバランス系におけるハートレー近似の自己エネルギー

$$\Sigma_\uparrow^{\text{Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\downarrow^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = -UN_\downarrow^0, \quad (2.53)$$

$$\Sigma_\downarrow^{\text{Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\uparrow^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = -UN_\uparrow^0, \quad (2.54)$$

を用いスピン帯磁率を計算すると、

$$\chi_{\text{Hartree}} = \tilde{\chi}^0 (1 - U\chi^0), \quad (2.55)$$

となる。ただし、

$$N_\alpha^0 = T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\alpha^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (2.56)$$

は自由な 1 粒子グリーン関数 $G_\alpha^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ から計算される $\alpha = \uparrow, \downarrow$ 成分の自由粒子の数である。また、 χ^0 は自由フェルミ気体の帯磁率

$$\chi^0 = -2T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} [G^0(\mathbf{p}, i\omega_n)]^2 = \frac{1}{2T} \sum_{\mathbf{p}} \cosh^{-2} \left(\frac{\xi_{\mathbf{p}}}{2T} \right), \quad (2.57)$$

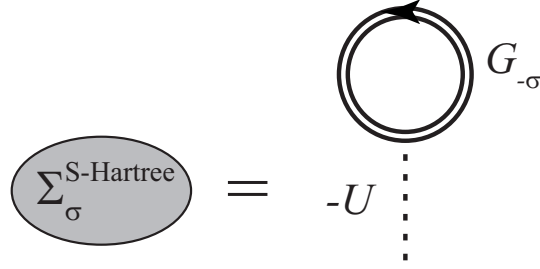


図 2.10 自己無撞着ハートレー近似の自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{S-Hartree}}$ (式 (2.63)) のダイアグラム表示。二重線は (相互作用効果が繰り込まれた) 1 粒子温度グリーン関数 $G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、破線は引力相互作用 $-U$ を表す。

であり、 $\tilde{\chi}^0$ は

$$\tilde{\chi}^0 = -2T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} [G(\mathbf{p}, i\omega_n)]^2 = \frac{1}{2T} \sum_{\mathbf{p}} \cosh^{-2} \left(\frac{\xi_{\mathbf{p}} + \Sigma^{\text{Hartree}}}{2T} \right), \quad (2.58)$$

である ($h_p \rightarrow 0$ では $\uparrow$ -成分と $\downarrow$ -成分を区別する必要がなくなるため、式 (2.57) および式 (2.58) では添え字 α を省略した)。式 (2.55) は $U\chi^0 > 1$ で $\chi_{\text{Hartree}} < 0$ となり、スピン帯磁率 χ_{Hartree} の正定値性を保証しない式になっている。

質量インバランスの効果は、スピンインバランスの効果に類似している。軽い原子、重い原子それぞれの運動エネルギーを、 $\mu = [\mu_L + \mu_H]/2$ を用い

$$\xi_{\mathbf{p},L} = \frac{m}{m_L} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) - h, \quad (2.59)$$

$$\xi_{\mathbf{p},H} = \frac{m}{m_H} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) + h, \quad (2.60)$$

と書き直したとき、

$$h = \frac{m_L \mu_L - m_H \mu_H}{m_L + m_H}, \quad (2.61)$$

はスピンインバランス系の有効磁場 h_p (式 (2.51)) と同様、フェルミ面にずれをもたらす有効磁場として働く。なぜなら、 $\xi_{\mathbf{p},\sigma} = 0$ から決定される実効的フェルミ波数

$$\tilde{k}_{F,0}^{\sigma} = \sqrt{2m_{\sigma}\mu_{\sigma}}, \quad (2.62)$$

は、 $h = 0$ では軽い成分と重い成分で一致するものの、 $h \neq 0$ では両者にずれが生じるからである。非自己無撞着 T 行列近似がスピンインバランス系の有効磁場 h_p に対する応答を正しく記述できていないため、質量インバランス系における有効磁場 h (式 (2.61)) に対する応答も正しく取り込まれていない可能性が高く、実際、破綻する。

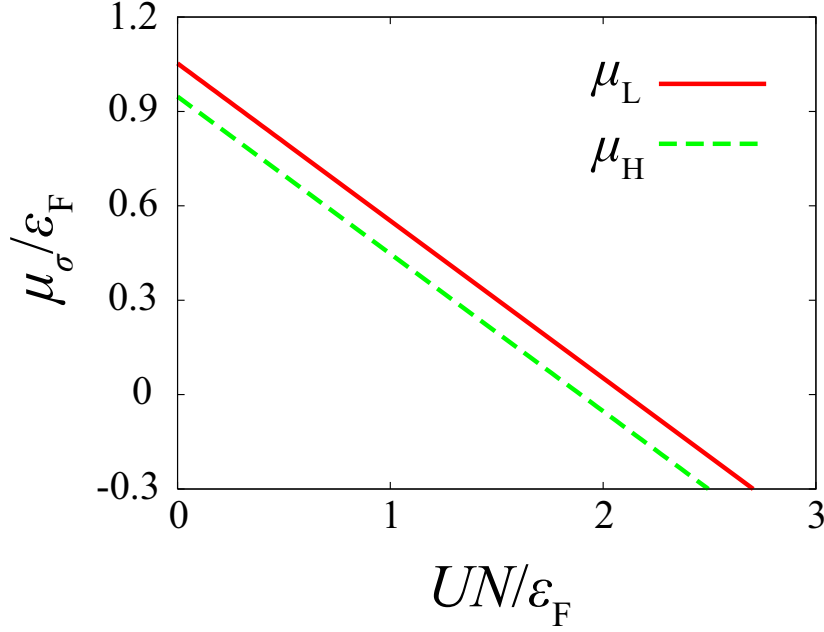


図 2.11 自己無撞着ハートレー近似における自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{S-Hartree}}$ (式 (2.63)) を用い粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を解いたときの化学ポテンシャル μ_{σ} 。質量比は $m_L/m_H = 0.9$ 、温度は $T = 0$ とした。図 2.9(a) に現れた μ_{σ} の異常が解消している。

図 2.9(a) に見られる μ_{σ} の異常な振る舞いは、図 2.10 に示す自己エネルギー (自己無撞着ハートレー近似、Self-consistent Hartree approximation) を用いることで解消する。具体式は、

$$\Sigma_{\sigma}^{\text{S-Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = -UN_{-\sigma}, \quad (2.63)$$

であり、式 (2.45) における自由粒子のグリーン関数 $G_{-\sigma}^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ が 1 粒子グリーン関数 $G_{-\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ に置き換えられている。この自己エネルギー $\Sigma_{\sigma}^{\text{S-Hartree}}$ を用い粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を解いた結果が、図 2.11 である。ハートレー近似の結果 (図 2.9(a)) とは対照的に、 μ_{σ} が不連続になる等の異常は生じない。以上の議論は、質量インバランスを有する場合、相互作用する相手の粒子に関する自己無撞着性を確保することが重要であることを強く示唆している。なお、自己無撞着ハートレー近似の範囲で計算したスピン帯磁率は、

$$\chi_{\text{S-Hartree}} = \frac{\tilde{\chi}^0}{1 + U\tilde{\chi}^0} (> 0), \quad (2.64)$$

のように、正定値性が保障された表式となる。

さらに非自己無撞着 T 行列近似はこれに加え、対形成過程の取り扱いにも問題を抱えている。軽い原子と重い原子が対形成する際、その過程に関与する粒子の 1 粒子スペクト

ル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ も多体効果による変調を受けているはずである。しかし、非自己無撞着 T 行列近似では対形成過程を表すヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ に自由粒子のグリーン関数が用いられており、やはりこの効果が自己無撞着に取り込まれていない。次章では、この点も質量インバランスがある場合に問題を引き起こすことを示す。その上で、これらの問題点を解消した強結合理論を提案する。

第 3 章

質量インバランスのあるフェルミ原子気体に対する強結合理論

2.3 節で議論したように、非自己無撞着 T 行列近似は (1) 相互作用する相手の粒子に対する強結合補正、および、(2) 対形成に関与する粒子に対する強結合補正の 2 点に関し自己無撞着な取り扱いをしていない。本章では、これらを段階的に改善していくことで、質量インバランスのある場合、(1)、(2) の両方を自己無撞着に扱うことが重要となることを明らかにし、この系にも適用可能な強結合理論を構築する。

まず、非自己無撞着 T 行列近似に対しより高次の強結合補正を取り込んだ「拡張 T 行列近似」[103, 105, 106] を用い解析を行う。この近似は散乱相手の粒子に関する強結合補正の自己無撞着性が確保されており、この理論により前述の負のスピン帯磁率の問題が解消、 ^6Li の実験で測定されたスピン帯磁率 [107] に計算結果が定量的に一致することが示されている [103]。そのため、この理論を質量インバランス系に適用することで、図 2.7 に示した超流動転移温度 T_c や化学ポテンシャル μ_σ の非物理的な振る舞いが改善することが期待できる。しかし本章で示すように、この拡張 T 行列近似は超流動転移温度 T_c や化学ポテンシャル μ_σ の非物理的な振る舞いの問題は解決できるものの、大きな質量インバランスがある場合 ($m_L/m_H \ll 1$)、弱結合領域で T_c が消失するという新たな問題を引き起こす。

そこで、拡張 T 行列近似をさらに拡張し、質量インバランスのある極低温フェルミ原子気体において 1 粒子励起に対する強結合補正を完全に自己無撞着に取り込んだ理論を構築する。この「自己無撞着 T 行列近似」[94–97] で計算した T_c が BCS-BEC クロスオーバー全域で任意の質量比 m_L/m_H において有限になることを示す。このようにして非自己無撞着 T 行列近似が抱える 2 つの問題点 (1)、(2) の両方を解決することができた。

3.1 節では、拡張 T 行列近似を質量インバランス系に適用する。3.2 節では、自己無撞着 T 行列近似の枠組みで解析し、質量インバランスのある極低温フェルミ原子気体に適

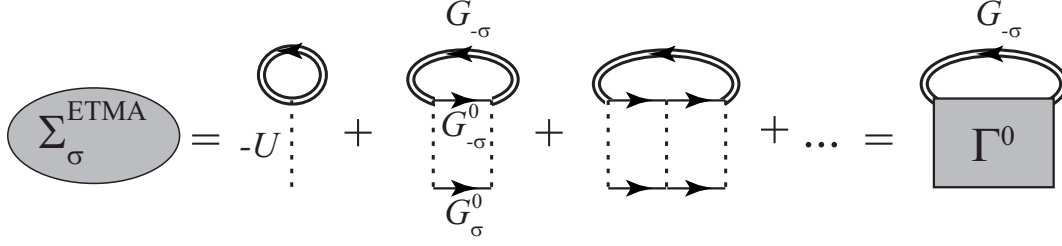


図 3.1 拡張 T 行列近似 (ETMA に用いる自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{ETMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ のダイアグラム表示。二重線は、1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、実線は自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、破線は引力相互作用 $-U$ である。

用可能な強結合理論を構築する。

3.1 散乱相手に対する強結合補正

まず、拡張 T 行列近似 (Extended T -matrix approximation, ETMA) [103, 105, 106] の枠組みで解析を行う。この近似では自己エネルギーとして、図 3.1 のダイアグラムで表される

$$\Sigma_\sigma^{\text{ETMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n) e^{i(\nu_n - \omega_n)\delta}, \quad (3.1)$$

を採用する。この自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{ETMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ は、非自己無撞着 T 行列近似に用いる自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{TMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (2.9)) の 1 粒子温度グリーン関数を、自由なものの $G_{-\sigma}^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ から、多体効果の繰り込まれたもの $G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ に置き換えた表式となっている。ただし、ヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ については非自己無撞着 T 行列近似と同じ関数 (式 (2.10)) を採用している。ここで、ヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ を相互作用 $-U$ に近似すると $\Sigma_\sigma^{\text{ETMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ は自己無撞着ハートレー近似の自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{S-Hartree}}$ (式 (2.63)) に帰着する。このことから分かるように、この理論では散乱相手の粒子に関する自己無撞着性が保持されている。

超流動転移温度 T_c は非自己無撞着 T 行列近似のときと同様、サウレスの判定条件 (2.13) で決定する。この式に加え、自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{ETMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を決定する方程式 (3.1)、粒子数方程式 (2.17)、(2.18) を自己無撞着に解くことで、超流動転移温度 T_c 、化学ポテンシャル μ_σ 、および、1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を決定する。

図 3.2 は、拡張 T 行列近似で計算した質量比 $m_L/m_H = 0.9$ における超流動転移温度 T_c 、および、化学ポテンシャル $\mu_\sigma(T_c)$ である。このように、非自己無撞着 T 行列近似で見られた非物理的な物理量の 2 価性が解消する。粒子間相互作用が強くなるにつれ、超流

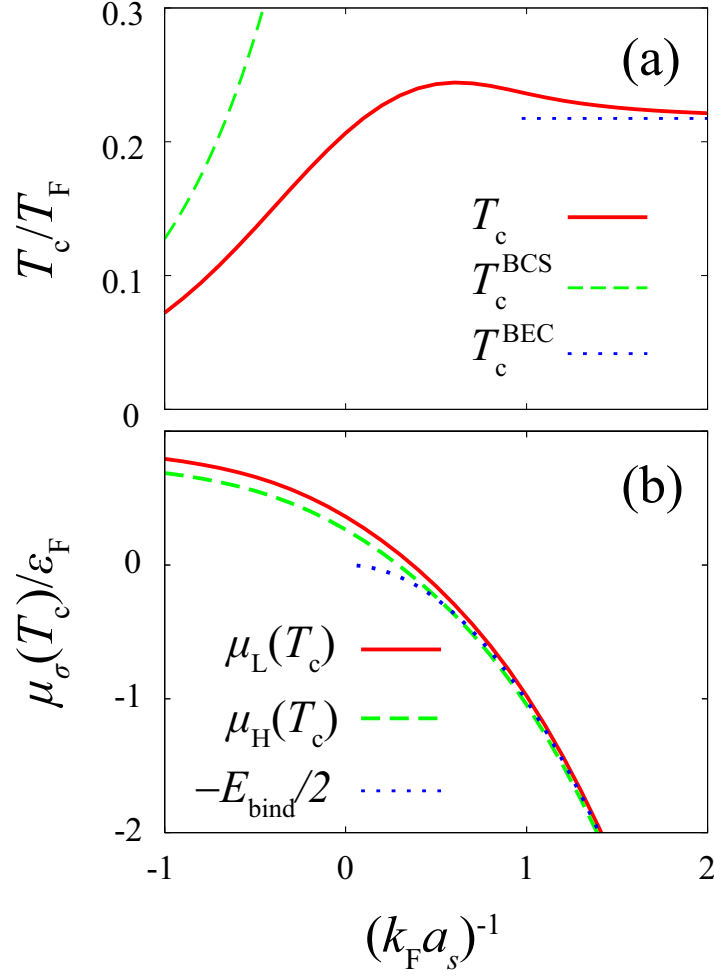


図 3.2 質量比 $m_L/m_H = 0.9$ における、拡張 T 行列近似を用いて計算した (a) 超流動転移温度 T_c および (b) 化学ポテンシャル $\mu_\sigma(T_c)$ 。(a) における破線は平均場理論の計算結果 T_c^{BCS} (式 (3.2))、点線は理想分子ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} (式 (3.3))。(b) における点線は、分子ボソンの結合エネルギーの半分 $-E_{\text{bind}}/2$ 。どちらの図においても、図 2.7 に示したような、 T_c や $\mu_\sigma(T_c)$ の異常な振る舞いがなくなっている。

動転移温度は平均場理論の結果 (図 3.2(a) の破線) [13]

$$T_c^{\text{BCS}} = \frac{8}{\pi} e^{\gamma-2} \sqrt{\epsilon_F^L \epsilon_F^H} e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}, \quad (3.2)$$

から徐々にずれていく。強結合極限では、質量 $m_L + m_H$ の分子ボソンが $N/2$ 個形成した理想分子ボース気体になり、超流動転移温度はボース・アインシュタイン凝縮温度 (図 3.2(a) の点線) [16]

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{2\pi}{m_L + m_H} \left(\frac{N/2}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (3.3)$$

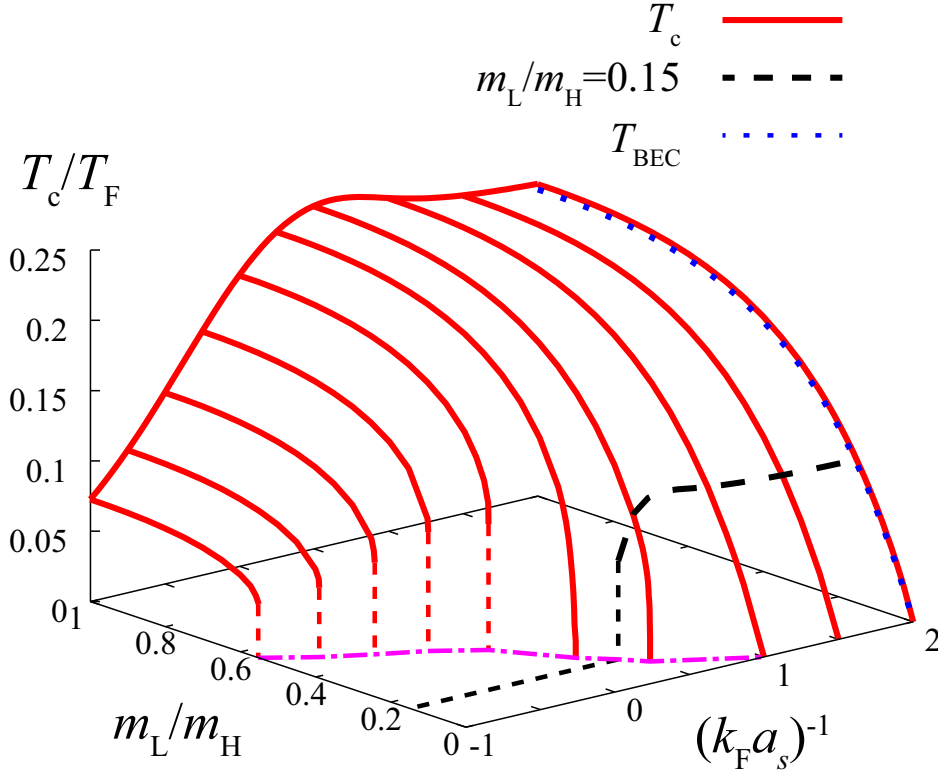


図 3.3 拡張 T 行列近似により計算された超流動転移温度 T_c の相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ 、質量比 m_L/m_H 依存性。破線は ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する質量比 $(m_L/m_H = 6/40 = 0.15)$ の場合の T_c 。点線は式 (3.3) で与えられる、理想分子ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} 。1 点鎖線は、 T_c が消失する質量比 m_L/m_H (または相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$) を表している。

に漸近する。また、化学ポテンシャル $\mu_\sigma(T_c)$ は相互作用に対し単調に減少する。強結合極限では軽い原子と重い原子が分子ボソンを組むため、それらを 1 つずつ系に入れると分子ボソンの束縛エネルギー $E_{\text{bind}} (= 1/(ma_s^2))$ だけ系のエネルギーが低下し、その結果付録 C に導出するように

$$\mu_L(T_c) + \mu_H(T_c) = -E_{\text{bind}}, \quad (3.4)$$

に近づいていく (図 3.2(b) の点線)。このように質量インバランスの小さい場合は、なめらかな BCS-BEC クロスオーバー現象が得られる。

しかし、質量インバランスが大きくなると、拡張 T 行列近似の計算結果にも問題が生じる。図 3.3 は、拡張 T 行列近似によって計算された T_c の質量比 m_L/m_H 、および、相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ 依存性である。弱結合領域で質量インバランスが大きくなると、 T_c が消失する振る舞いが現れる。その結果、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系が相互作用が弱い領域で超流動転移しないことをこの理論は预言する (図 3.3 の破線)。

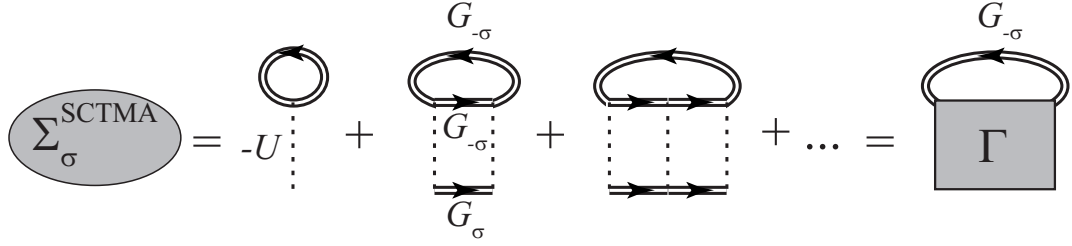


図 3.4 自己無撞着 T 行列近似 (SCTMA に用いる自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ のダイアグラム表示。二重線は、1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ 、破線は引力相互作用 $-U$ である。

3.2 対形成に關与する粒子に対する強結合補正

図 3.3 の弱結合領域に見られる T_c の消失は、実際には拡張 T 行列近似に内在する理論の非自己無撞着性に起因する。これを示すため、1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ に関して完全に自己無撞着に扱った自己無撞着 T 行列近似 (Self-consistent T -matrix approximation, SCTMA) [94–97] の枠組みを用いて解析する。自己無撞着 T 行列近似では、自己エネルギー $\Sigma_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ として図 3.4 で表されるダイアグラムを採用する。具体式は、

$$\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) = T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n) e^{i(\nu_n - \omega_n)\delta}. \quad (3.5)$$

式 (3.5) では拡張 T 行列近似と同様、非自己無撞着 T 行列近似の自己エネルギー (式 (2.9)) に用いられる自由な 1 粒子温度グリーン関数 $G_{-\sigma}^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ が相互作用効果の繰り込まれた 1 粒子温度グリーン関数 $G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n)$ に置き換えられており、散乱相手の粒子に関する自己無撞着性が保障されている。それに加え、対形成揺らぎを表すヴァーテックス関数

$$\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) = \frac{-U}{1 - U\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n)}, \quad (3.6)$$

に用いる 2 体相関関数は

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) = T \sum_{\mathbf{k}, \omega_n} G_L(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, i\nu_n + i\omega_n) G_H(-\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, -i\omega_n), \quad (3.7)$$

のように、相互作用効果が繰り込まれた 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ が用いられている。つまりこの近似は、相互作用する相手の粒子、および、対形成過程に關与する粒子の両方に関し自己無撞着に強結合補正を扱った理論となっている。

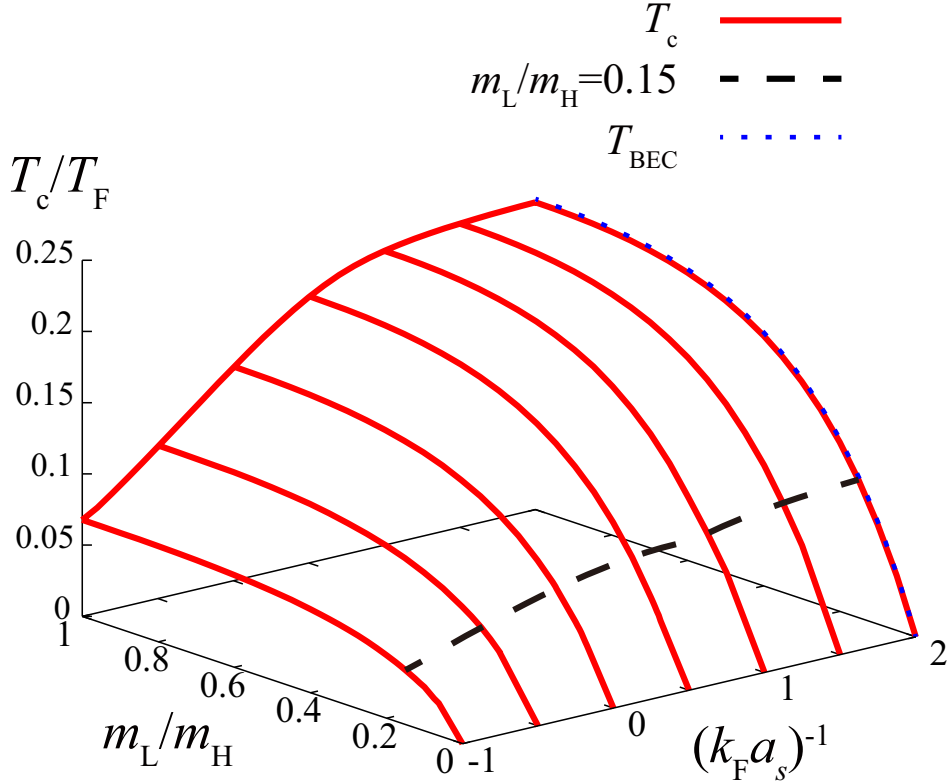


図 3.5 自己無撞着 T 行列近似により計算された超流動転移温度 T_c の相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ 、質量比 m_L/m_H 依存性。破線は ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する質量比 ($m_L/m_H = 6/40 = 0.15$) の場合の T_c 。点線は式 (3.3) で与えられる、理想分子ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} 。全領域で、有限の T_c が得られる。

超流動転移温度 T_c を決定するサウレスの判定条件は、式 (3.6) で与えられるヴァーテックス関数 $\Gamma(q=0, i\nu_n=0)$ が発散する条件から

$$1 = U\Pi(q=0, i\nu_n=0), \quad (3.8)$$

となる。非自己無撞着 T 行列近似や拡張 T 行列近似に用いるサウレスの判定条件 (2.13) が平均場理論のギャップ方程式と一致するのは対照的に、自己無撞着 T 行列近似の T_c 方程式 (3.8) には 2 体相関関数 $\Pi(q, i\nu_n)$ を通して対形成過程に関する強結合補正が取り込まれる。サウレスの判定条件 (3.8)、粒子数方程式 (2.17)、(2.18)、および、式 (3.5) から超流動転移温度 T_c 、化学ポテンシャル μ_σ 、1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(p, i\omega_n)$ を決定する。

図 3.5 は、自己無撞着 T 行列近似によって計算された超流動転移温度 T_c である。また、図 3.6 は、いくつかの質量比の場合について超流動転移温度 T_c 、化学ポテンシャル μ_σ を $(k_F a_s)^{-1}$ の関数としてプロットしたものである。このように、図 3.3 に示した拡張 T 行列近似の結果とは対照的に、全相互作用、全質量インバランス領域において T_c が有限と

なり、なめらかな BCS-BEC クロスオーバーが得られる。特に ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する $m_L/m_H = 0.15$ においても、すでに BCS-BEC クロスオーバーが実現している ${}^6\text{Li}$ 気体や ${}^{40}\text{K}$ 気体と同様、BCS-BEC クロスオーバー現象が起こることをこの理論は予言する (図 3.6(a4)、(b4))。これは絶対零度のユニタリー極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) について、少なくとも質量比 $0.1 \lesssim m_L/m_H \leq 1$ で超流動相が得られているモンテカルロ計算と無矛盾な結果である [23]。

この 2 つの理論 (自己無撞着 T 行列近似と拡張 T 行列近似) の計算結果の違いの原因を探るため、1 粒子遅延グリーン関数

$$G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta), \quad (3.9)$$

の極 (実部)

$$\omega = \xi_{\mathbf{p}, \sigma} + \text{Re}[\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)], \quad (3.10)$$

を考える。式 (3.10) を満たすエネルギー ω は多体効果を表す $\text{Re}[\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)]$ により変調された σ 成分の分散関係を与える (図 3.7)。この分散が $\omega = 0$ を横切る波数、すなわち

$$\frac{[\tilde{k}_F^\sigma]^2}{2m_\sigma} - \mu_\sigma + \text{Re}[\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\tilde{\mathbf{k}}_F^\sigma, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta = 0 + i\delta)] = 0, \quad (3.11)$$

を満たす波数 $\tilde{k}_F^\sigma$ が、 σ 成分の実効的なフェルミ波数となる。

図 3.8(a) に弱結合領域の $\tilde{k}_F^\sigma$ の計算結果 ($(k_F a_s)^{-1} = -0.5$) を示すように、軽い成分と重い成分の実効的なフェルミ波数は近似的に一致しフェルミ波数 k_F に近い値となる。弱結合領域では、

$$\frac{N}{2} \sim \frac{[\tilde{k}_F^\sigma]^3}{6\pi^2}, \quad (3.12)$$

と近似的に見積もることができる。この右辺は質量比 m_L/m_H によらない表式をしているため、ここで得られた $\tilde{k}_F^L \simeq \tilde{k}_F^H \simeq k_F$ は妥当な結果である。弱結合領域の超流動転移は、波数 $p \simeq \tilde{k}_F^L$ を持つ軽い粒子と波数 $p \simeq -\tilde{k}_F^H$ を持つ重い粒子がクーパー対を組むことで起こるので、このような (実効的な) フェルミ面の一致は超流動転移にとって有利に働く。その結果、粒子数方程式 (2.17)、(2.18) および T_c 方程式 (3.8) すべてに 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ が用いられている自己無撞着 T 行列近似から計算される T_c は、図 3.5 にすでに示したように、すべての質量比 m_L/m_H で有限の値となる。

一方拡張 T 行列近似の場合、自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ がヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ (式 (2.10)) や T_c 方程式 (2.13) に用いられている。そのため、図 3.8(a) に見た実効的なフェルミ波数の一致 ($\tilde{k}_F^L \simeq \tilde{k}_F^H$) は対形成の過程に反映されない。

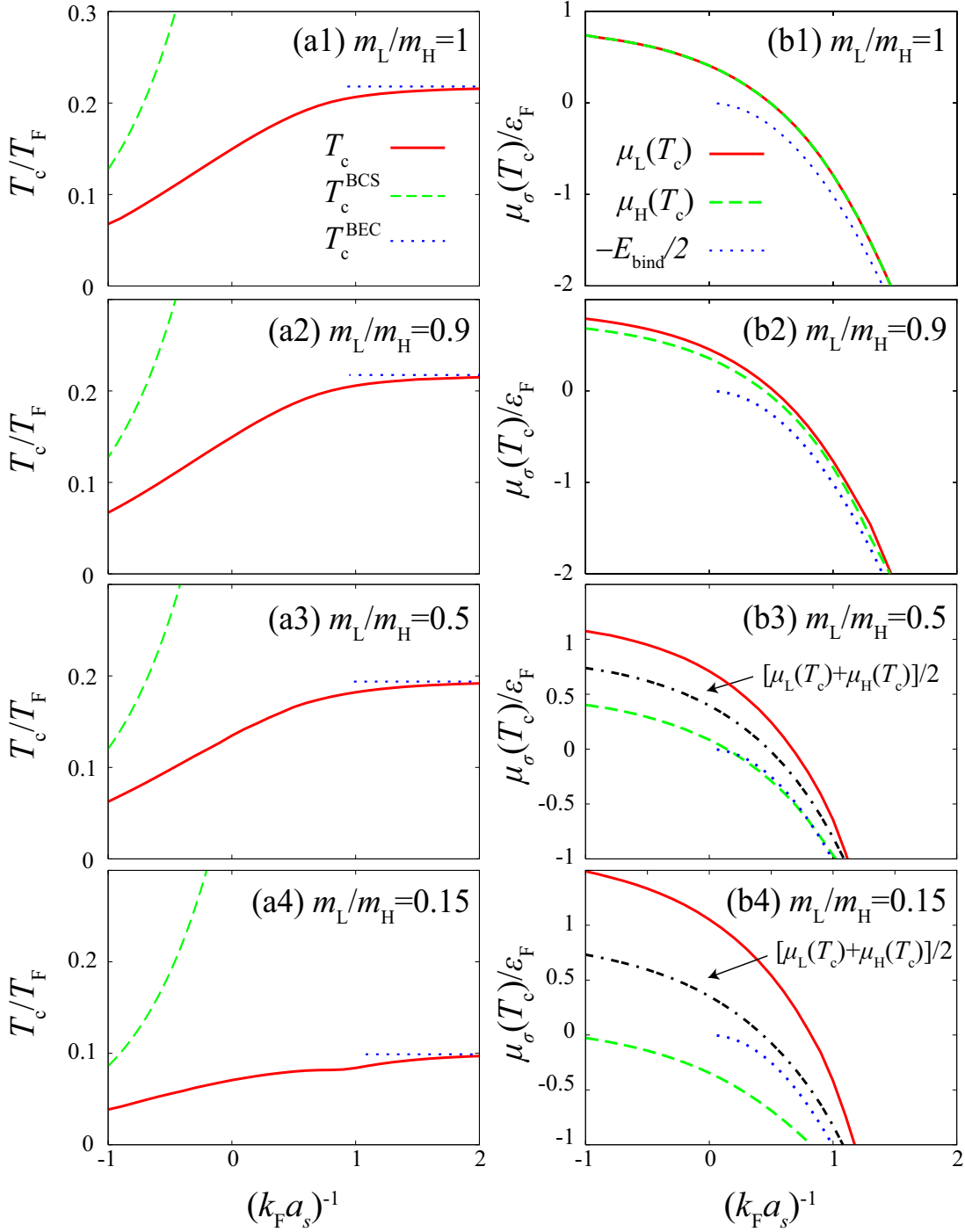


図 3.6 自己無撞着 T 行列近似を用いて計算した超流動転移温度 T_c (左側)、および、(b1)-(b4) 化学ポテンシャル $\mu_\sigma(T_c)$ (右側) の質量比依存性。(a1), (b1) $m_L/m_H = 1$ 。(a2), (b2) $m_L/m_H = 0.9$ 。(a3), (b3) $m_L/m_H = 0.5$ 。(a4), (b4) $m_L/m_H = 0.15$ 。(a1)-(a4) における破線は式 (3.2) で与えられる平均場理論の超流動転移温度 T_c^{BCS} 、点線は理想分子ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} (式 (3.3))。(b1)-(b4) における点線は、分子ボソンの結合エネルギーの半分 $-E_{\text{bind}}/2$ 。(b3), (b4) には、 $[\mu_L + \mu_H]/2$ も示した。

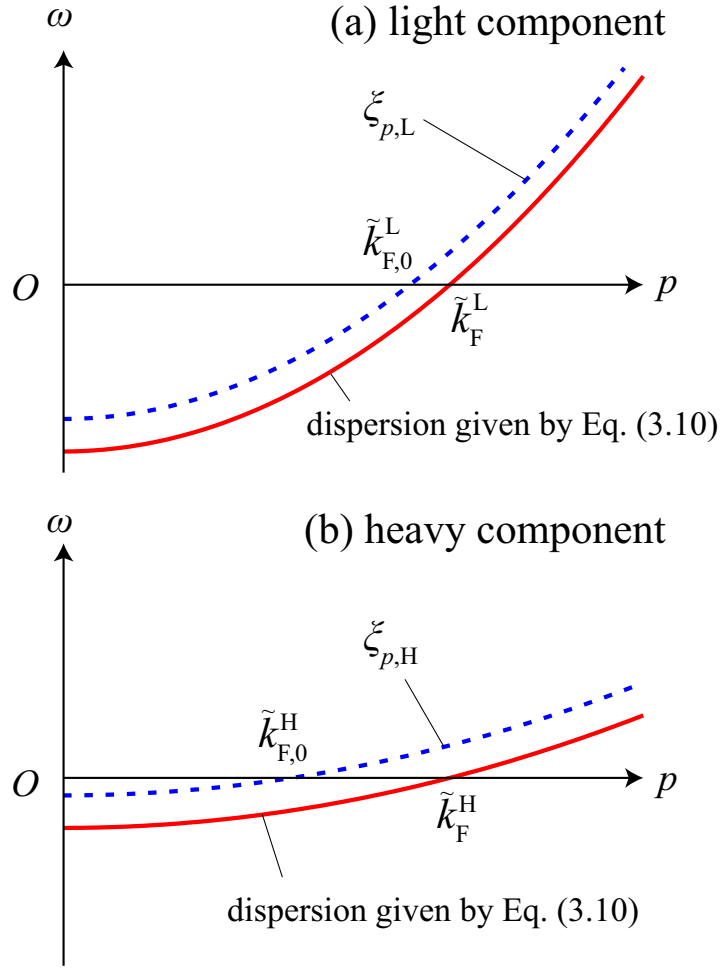


図 3.7 分散関係の模式図。実線は式 (3.10) で与えられる、自己エネルギーの実部 $\text{Re}[\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)]$ による変調を受けた分散関係の模式図。破線は自由粒子の分散関係 $\omega = \xi_{p,\sigma}$ 。(a) 軽い成分。(b) 重い成分。平坦な分散を持つ重い原子の方が、多体効果による変調 $\text{Re}[\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)]$ の影響を受けやすい。そのため、実効的なフェルミ波数が両成分で一致している場合 ($\tilde{k}_F^L \simeq \tilde{k}_F^H$)、自由粒子の実効的なフェルミ波数は大きくずれる ($\tilde{k}_{F,0}^L > \tilde{k}_{F,0}^H$)。

拡張 T 行列近似では、(式 (3.11) で与えられる $\tilde{k}_F^\sigma$ ではなく) 式 (2.62) で与えられる自由粒子の実効的なフェルミ波数 $\tilde{k}_{F,0}^\sigma$ が超流動転移の性質を決めることになる。

図 3.8(a) に示すように、両者の $\tilde{k}_{F,0}^\sigma$ は一致しない。これは、重い原子が軽い原子に比べ平坦な分散を持ち自己エネルギーによる分散の補正の影響を受けやすいため、 $\tilde{k}_F^\sigma$ が軽い原子と重い原子で一致している場合、自己エネルギー補正を取り除いたフェルミ波数 $\tilde{k}_{F,0}^\sigma$ は一致しないためである (図 3.7)。この実効的なフェルミ面の不一致は式 (2.61) で与えられる有効磁場 h が系に印加されている場合に相当し、これが超流動状態を破壊する。

図 3.8(b) に示すように、 $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ における拡張 T 行列近似で計算された T_c は

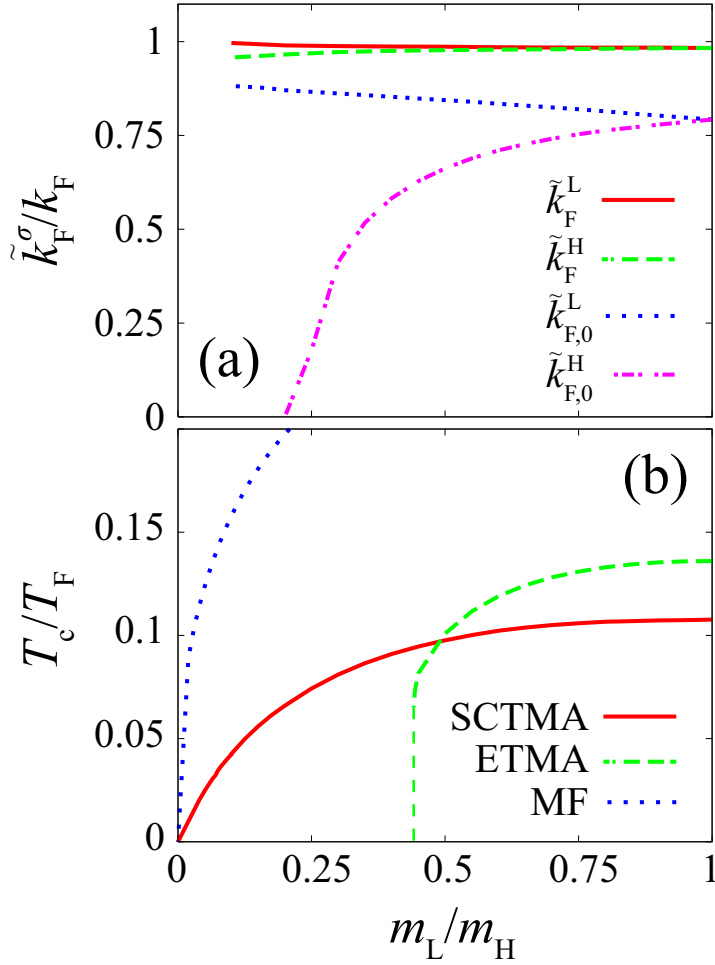


図 3.8 (a) 式 (3.11) で定義される、実効的フェルミ波数 $\tilde{k}_F^\sigma$ 。自己無撞着 T 行列近似で計算された $\tilde{k}_{F,0}^\sigma = \sqrt{2m_\sigma\mu_\sigma}$ も示した。ここに示していないものの、拡張 T 行列近似で計算した $\tilde{k}_{F,0}^\sigma$ も、ほとんど同じ結果を与える。(b) $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ における T_c 。SCTMA：自己無撞着 T 行列近似。ETMA：拡張 T 行列近似。MF：平均場理論。

質量比 $m_L/m_H \simeq 0.44$ で消失し、そのときの実効的フェルミ波数は $\tilde{k}_{F,0}^L = 0.85k_F$ および $\tilde{k}_{F,0}^H = 0.61k_F$ である。ここから式 (2.61) より導かれる有効磁場の大きさは $h = 0.15T_F$ で、バランス系での超流動転移温度と $T_c = 0.14T_F$ と同等の大きさである。超流動状態のエネルギースケールはおおよそバランス系の超流動転移温度 $T_c(m_L/m_H = 1)$ で見積もることができるため [49–51]、それらがおおよそ一致していることは有効磁場 h が $m_L/m_H = 0.44$ よりも大きな質量インバランスのある領域の超流動状態を破壊しているという解釈と合致する。しかしこの有効磁場 h は、強結合補正が粒子数方程式 (2.17)、(2.18) に取り込まれている一方、(対形成の性質で決まる) T_c 方程式 (2.13) には取り込まれていないという、自己無撞着でない取り扱いをしていることに起因し現れている。そのため、拡張 T 行列近似に現れる T_c の消失はこの理論がフェルミ面の大きさに対する強結

合効果を正しく取り込めていないことに因ると結論される。

平均場理論 (粒子数方程式 (2.17)、(2.18) に用いる 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を自由粒子の 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)$ に置き換える) は、粒子数方程式と T_c 方程式の両方で強結合効果を見逃しているため図 3.8(b) に示すように、平均場理論でも常に有限の T_c が得られる (ただし、 T_c の値は過大評価されている)。

以上、3 つの理論 (非自己無撞着 T 行列近似、拡張 T 行列近似、自己無撞着 T 行列近似) の計算結果を比較、解析してきた。その結果、質量の異なる極低温フェルミ原子気体を扱うには (1) 相互作用する相手の粒子に関する強結合補正、および、(2) 対形成に参加する軽い原子、重い原子それぞれのフェルミ面に対する強結合補正の 2 点について、自己無撞着に扱うことが重要であることを明らかにした。そして、それら両方を満たす自己無撞着 T 行列近似を用いることで質量インバランス系の強結合物性を解析できることを明らかにした。

第 4 章

質量インバランスのあるフェルミ原子気体における成分に依存する擬ギャップ現象

本章では、自己無撞着 T 行列近似の枠組みで、質量インバランス系の 1 粒子状態の解析を行う。この系でもバラン系と同様の擬ギャップ構造が BCS-BEC クロスオーバー領域で 1 粒子状態密度に現れるものの、軽い成分と重い成分でその現れ方が異なることを示す。

4.1 節で、1 粒子状態の計算手順を述べる。4.2 節では、質量インバランス系における成分に依存する擬ギャップ現象の詳細を明らかにする。そして 4.3 節では、擬ギャップ現象の現れる領域を決定し、相図を示す。

4.1 自己無撞着 T 行列近似による 1 粒子状態の解析

$T \geq T_c$ での 1 粒子励起スペクトルを自己無撞着 T 行列近似の枠組みで計算するためにまず、粒子数方程式 (2.17)、(2.18)、および、式 (3.5) を自己無撞着に解くことで、化学ポテンシャル μ_σ 、および、1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を決定する。

このようにして計算された μ_σ を用い、1 粒子スペクトル強度は 1 粒子温度グリーン関数 $G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)$ を解析接続して得られる 1 粒子遅延グリーン関数

$$G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta), \quad (4.1)$$

を用いて

$$A_\sigma(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega), \quad (4.2)$$

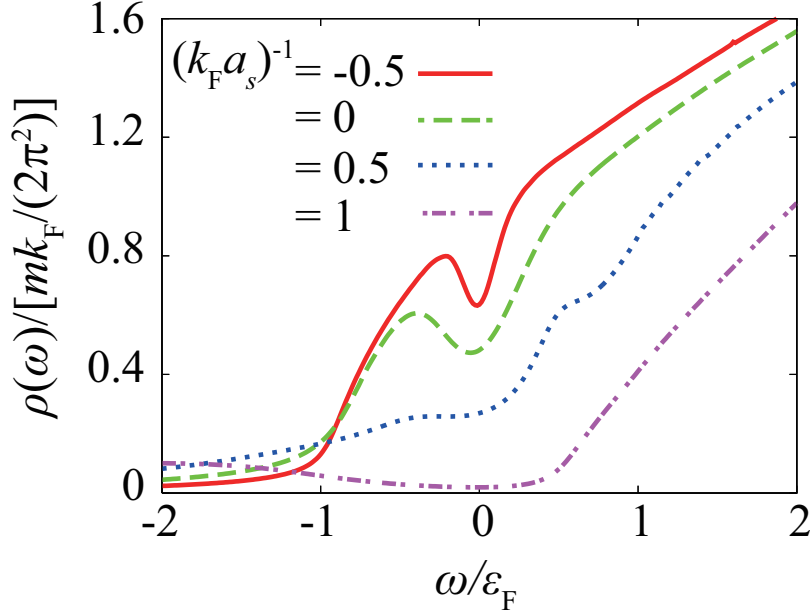


図 4.1 自己無撞着 T 行列近似で計算された、バランス系 ($m_L/m_H = 1$) の超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)$ の相互作用強度依存性。自由粒子の $\omega = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho^0(0) = mk_F/[2\pi^2]$ で規格化した。

のように計算される。また、1 粒子状態密度は、

$$\rho_\sigma(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} A_\sigma(\mathbf{p}, \omega). \quad (4.3)$$

図 4.1、および、図 4.2 はそれぞれ、バランス系 ($m_L = m_H$) の超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $\rho(\omega)(= \rho_L(\omega) = \rho_H(\omega))$ 、および、1 粒子スペクトル強度 $A(\mathbf{p}, \omega)(= A_L(\mathbf{p}, \omega) = A_H(\mathbf{p}, \omega))$ の相互作用依存性である。このように自己無撞着 T 行列近似も、図 2.4 および図 2.5 にすでに示した非自己無撞着 T 行列近似の計算結果と定性的に同様の結果を与える。

4.2 成分に依存する擬ギャップ現象

図 4.3 は、ユニタリ極限 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ の超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ の質量比 m_L/m_H 依存性である。軽い成分 (図 4.3(a)) では、大きな質量インバランス領域 ($m_L/m_H = 0.15 \ll 1$) でも $\omega = 0$ 近傍に擬ギャップ構造が現れる。一方、重い成分 (図 4.3(b)) では、質量インバランスを大きくするにつれ窪み構造 (擬ギャップ構造) が不明瞭になっていき、 $m_L/m_H \simeq 0.15$ で消失する。この結果は、擬ギャップ現象をもたらす非凝縮クーパ対形成に軽い原子と重い原子が同量寄与するにも係らず、擬ギャッ

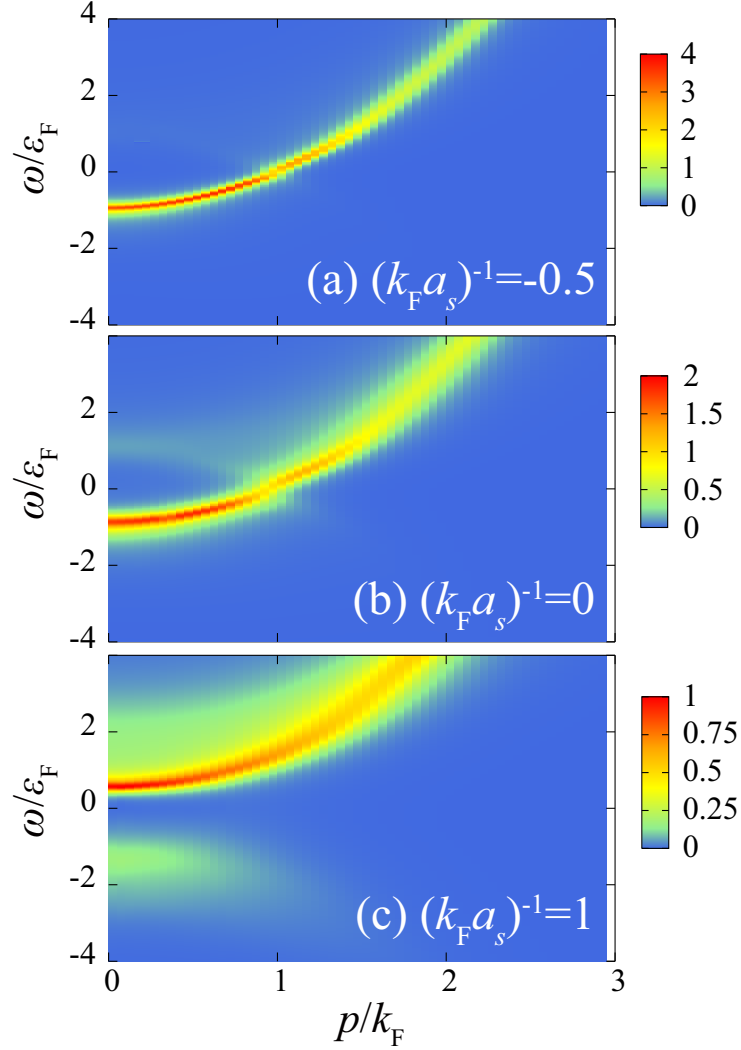


図 4.2 バランス系 ($m_L/m_H = 1$) の超流動転移温度 T_c における 1 粒子状態密度 $A(p, \omega)$ の相互作用強度依存性。(a) $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ 。(b) $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。(c) $(k_F a_s)^{-1} = 1$ 。質量 $m = m_L = m_H$ を持つ粒子のフェルミエネルギーの逆数 $\epsilon_F^{-1} = [k_F^2/(2m)]^{-1}$ で規格化した。

プの現れ方が軽い成分と重い成分で異なることを示している。

同様の結果は、BCS-BEC クロスオーバーの全域で得られる。図 4.4 は、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する $m_L/m_H = 0.15$ での 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ の相互作用強度依存性である。弱結合領域 ($(k_F a_s)^{-1} = -0.5$) で各成分に現れている $\omega = 0$ 近傍の擬ギャップ構造は、相互作用強度を強くしていくと ($(k_F a_s)^{-1} = 0.5$)、重い成分でのみ消失する。強結合領域 ($(k_F a_s)^{-1} = 1$) では、両成分にエネルギーギャップが存在するものの、重い成分に現れる窪み構造は非常に浅く、不明瞭である。

さらに、1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(p, \omega)$ にも、同様の質量インバランス効果は現れる。

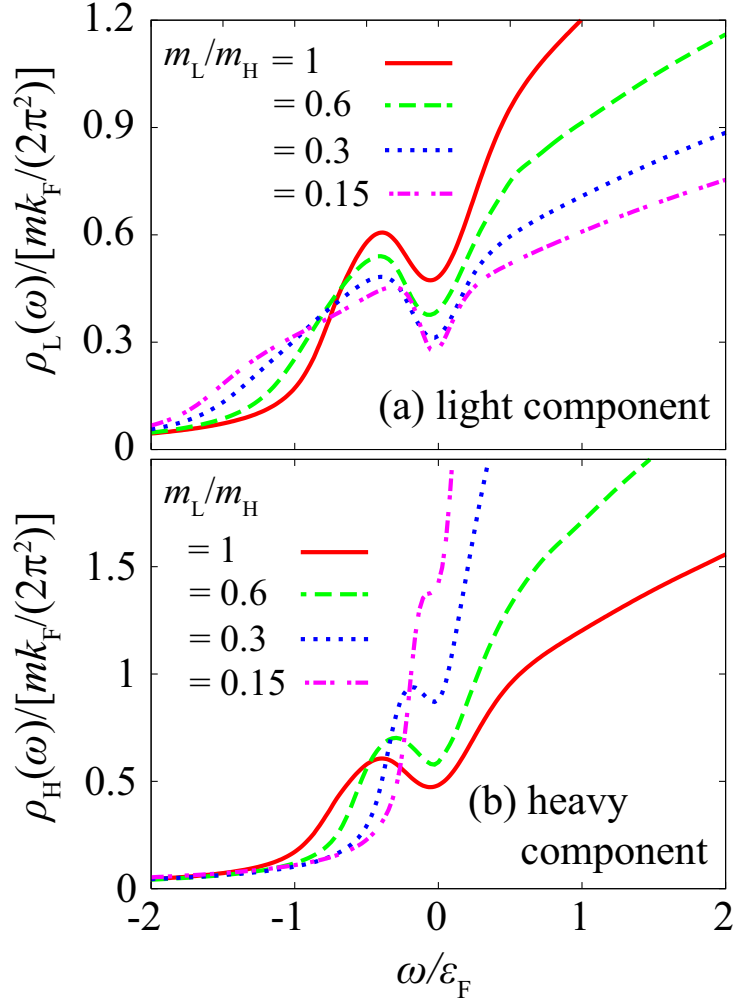


図 4.3 超流動転移温度 T_c における、1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ の質量比 m_L/m_H 依存性。(a) 軽い成分 ($\sigma = L$)。 (b) 重い成分 ($\sigma = H$)。相互作用強度は $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。どちらの縦軸も、質量 m (換算質量の 2 倍) を持つ自由粒子の $\omega = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho^0(0) = mk_F/(2\pi^2)$ で規格化した。図 4.4、図 4.8、図 4.14、図 4.16、図 4.19、図 4.20、図 4.21 においても、同様の規格化を行った。

図 4.5 は、超流動転移温度 T_c における 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ の質量比 m_L/m_H 依存性である。図 4.5(a1)、(a2)、(a3) に示す軽い成分には、2.2 節でバランス系について議論したのと同様、 $\omega = 0$ 付近で粒子分散のスペクトル強度が強く抑制される。一方の重い成分 (図 4.5(b1)、(b2)、(b3)) にも同様の振る舞いが見られるが、軽い成分ほど顕著ではない。1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ の波数積分を取ることで 1 粒子状態密度が得られるため、これが重い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_H(\omega)$ に擬ギャップ構造が軽い成分ほど明瞭に現れない原因となっている。図 4.6 に示した質量比 $m_L/m_H = 0.15$ における 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ から分かるように、このような傾向は、弱結合領域

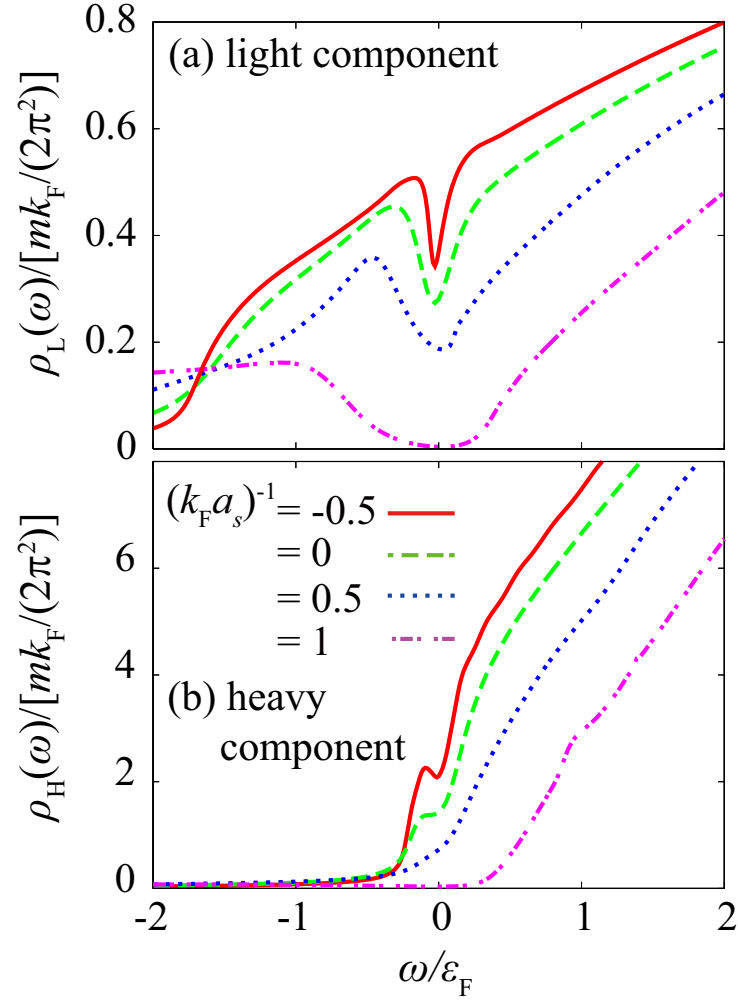


図 4.4 超流動転移温度 T_c における (a) 軽い成分、(b) 重い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ の相互作用強度依存性。質量比は、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する $m_L/m_H = 0.15$ 。

$((k_F a_s)^{-1} = -0.5)$ から中間結合領域 $((k_F a_s)^{-1} = 0)$ の幅広い相互作用領域で見られる。強結合領域 $((k_F a_s)^{-1} = 1)$ ではバランス系の場合と同様、分子ボソンの束縛エネルギーに対応するエネルギーギャップが開く。

ここに見られたような成分に依存する擬ギャップ現象の物理を理解するため、まず、2.2 節でも行った静的近似を自己無撞着 T 行列近似の自己エネルギー $\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ (式 (3.5)) に対して行う。超流動転移温度 T_c ではサウレスの判定条件 (3.8) から $\Gamma(\mathbf{q} =$

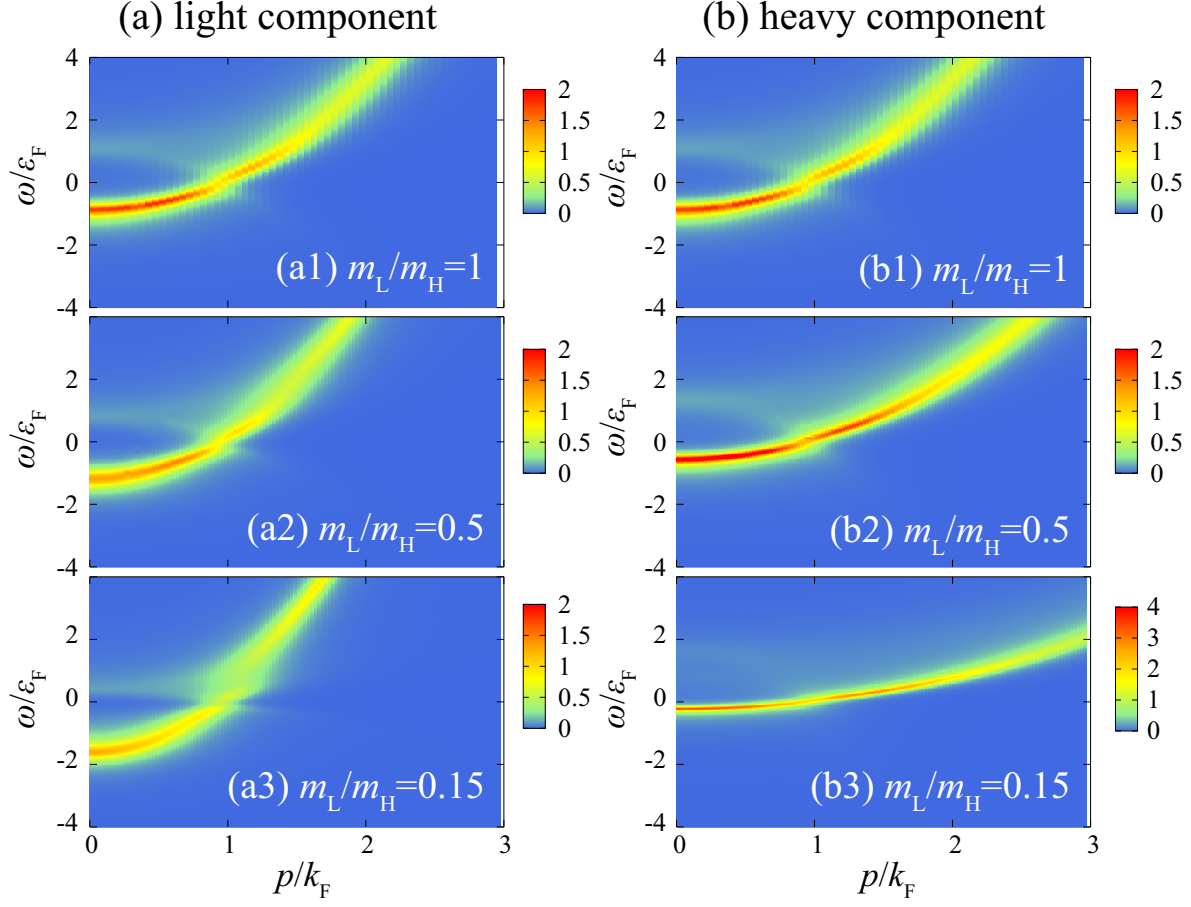


図 4.5 超流動転移温度 T_c における 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ の質量比 m_L/m_H 依存性。相互作用強度は、 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。左のパネル (a) は軽い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ 。右図 (b) は重い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_H(\mathbf{p}, \omega)$ を表す。(a1), (b1) $m_L/m_H = 1$ 。(a2), (b2) $m_L/m_H = 0.5$ 。(a3), (b3) $m_L/m_H = 0.15$ 。1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ の規格化には、換算質量の 2 倍 (m) を質量に持つ粒子のフェルミエネルギーの逆数 $\varepsilon_F^{-1} = [k_F^2/(2m)]^{-1}$ を用いた。図 4.6、図 4.7、図 4.12、図 4.13 についても同様の規格化を行っている。

$0, i\nu_n = 0$ が発散するため、式 (3.5) は

$$\begin{aligned}
 \Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) &\simeq \Sigma_\sigma^{\text{Hartree}} - G_{-\sigma}(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \Delta_{\text{pg}}^2 \\
 &= \Sigma_\sigma^{\text{Hartree}} \\
 &\quad + \frac{\Delta_{\text{pg}}^2}{i\omega_n + \xi_{-\mathbf{p}, -\sigma} - \Sigma_{-\sigma}^{\text{Hartree}}(-\mathbf{p}, -i\omega_n) + G_{-\sigma}(-\mathbf{p}, -i\omega_n) \Delta_{\text{pg}}^2},
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

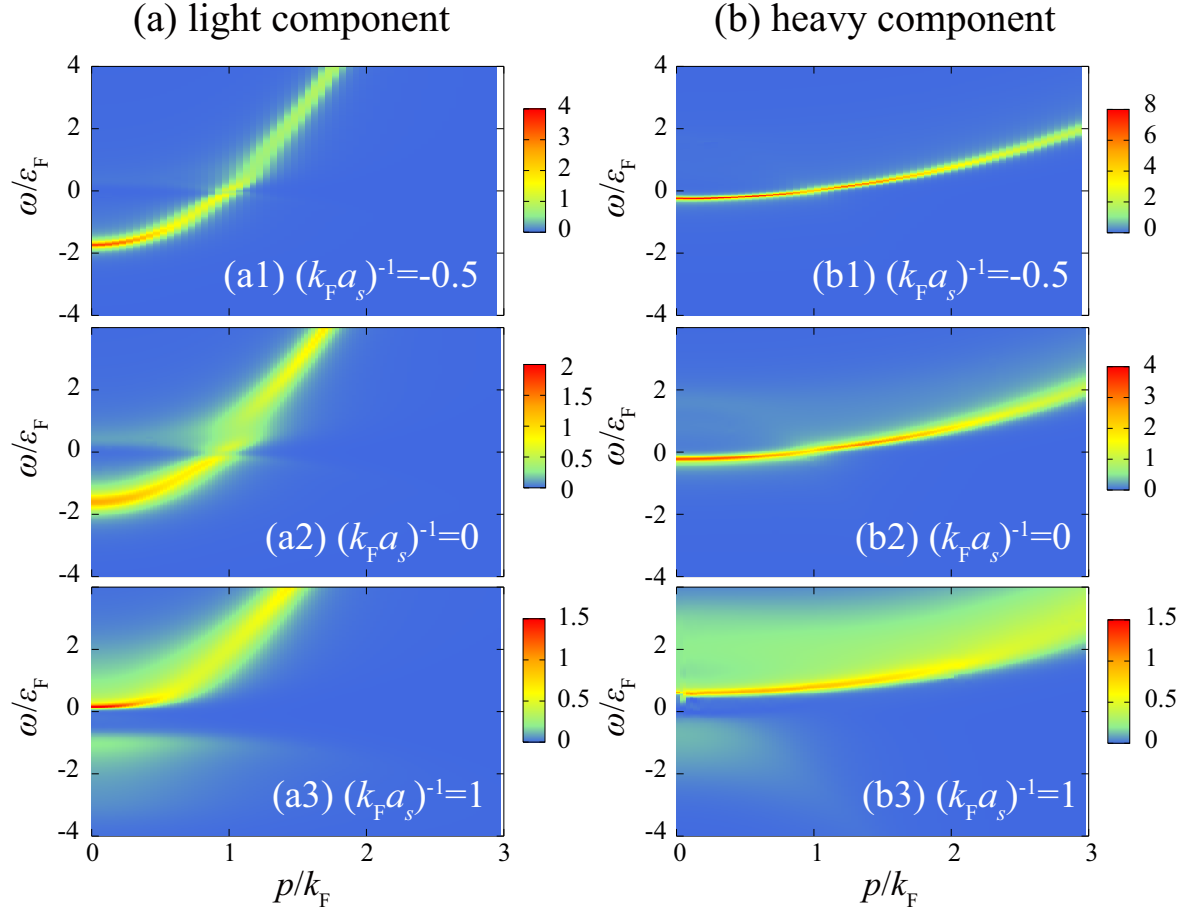


図 4.6 超流動転移温度 T_c における 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ の相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1}$ 依存性。質量比は、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系に対応する $m_L/m_H = 0.15$ 。左図は軽い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ 、右図は重い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_H(\mathbf{p}, \omega)$ 。(a1), (b1) $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ 。(a2), (b2) $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。(a3), (b3) $(k_F a_s)^{-1} = 1$ 。

と近似することができる。ただし、

$$\Sigma_\sigma^{\text{Hartree}} = -UT \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta}, \quad (4.5)$$

はハートレー項、

$$\Delta_{\text{pg}}^2 = -T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} [\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) + U] (> 0), \quad (4.6)$$

は非凝縮対の形成を反映した擬ギャップパラメータである。式 (4.4) を $\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n)$ について解くと、

$$\Sigma_\sigma^{\text{SCTMA}}(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \frac{\tilde{\Delta}_{\text{pg}, \sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n)}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}, -\sigma}}, \quad (4.7)$$

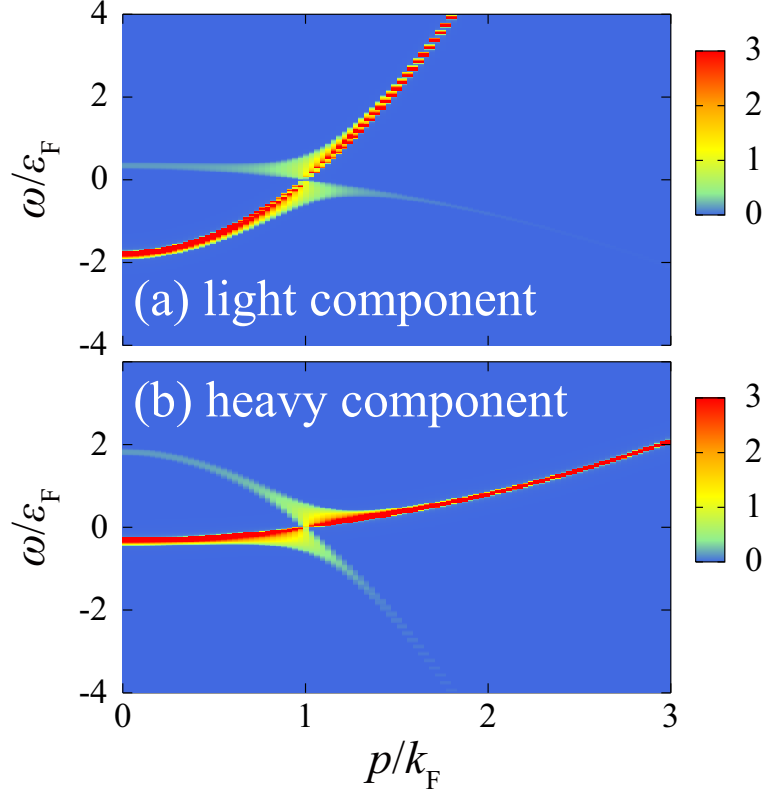


図 4.7 式 (4.10) で与えられる、静的近似の遅延グリーン関数 $G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega)$ で計算した (a) 軽い成分、(b) 重い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\omega)$ 。質量比 $m_L/m_H = 0.15$ 、 $\Delta_{pg}/\epsilon_F = 0.3$ 、 $\mu_\sigma = k_F^2/(2m_\sigma)$ とおいた。

となる。ただし、

$$\tilde{\Delta}_{pg,\sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{2\Delta_{pg}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\Delta_{pg}^2}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma})(i\omega_n + \xi_{\mathbf{p},-\sigma})}}}, \quad (4.8)$$

は、自己無撞着 T 行列近似における擬ギャップパラメータである (ここで、 μ_σ を $\mu_\sigma - \Sigma_\sigma^{\text{Hartree}}$ に置き換えた)。式 (4.7) を 1 粒子温度グリーン関数の表式 (2.8) に代入すると、

$$G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \simeq \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p},\sigma} - \frac{\tilde{\Delta}_{pg,\sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n)}{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}}, \quad (4.9)$$

となる。

図 4.7 は、式 (4.9) を解析接続して得られる 1 粒子遅延グリーン関数

$$G_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta) \simeq \frac{1}{\omega + i\delta - \xi_{\mathbf{p},\sigma} - \frac{\tilde{\Delta}_{pg,\sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)}{\omega + i\delta + \xi_{\mathbf{p},-\sigma}}}, \quad (4.10)$$

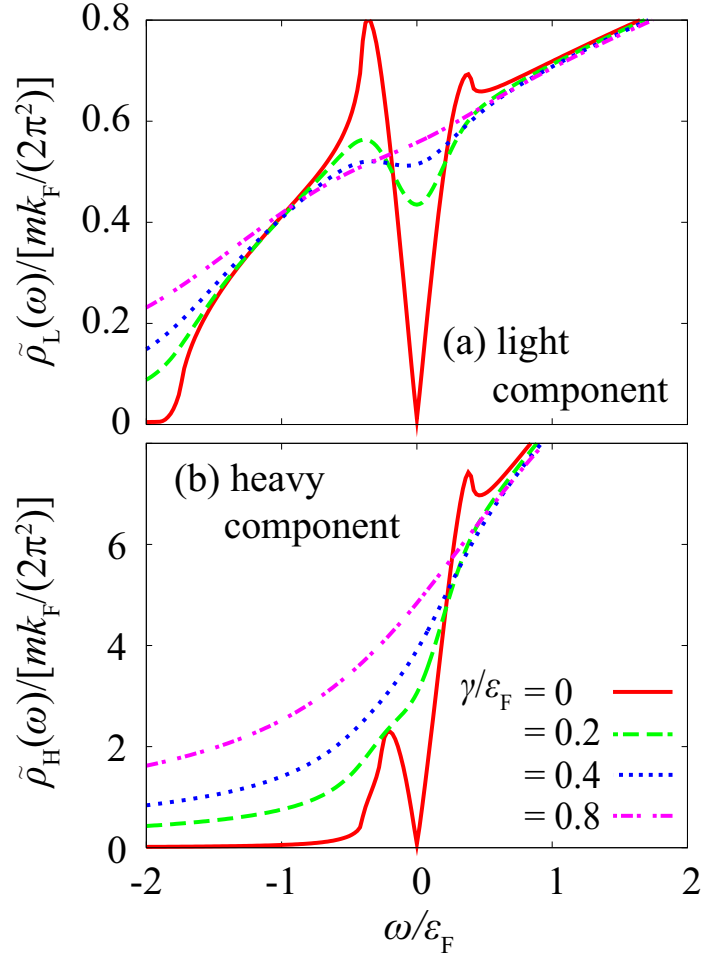


図 4.8 式 (4.11) で与えられる、近似的な 1 粒子グリーン関数 $\tilde{G}_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega)$ を用いて計算した (a) 軽い成分、(b) 重い成分の 1 粒子状態密度 $\tilde{\rho}_\sigma(\omega)$ 。質量比 $m_L/m_H = 0.15$ 、 $\Delta_{pg}/\varepsilon_F = 0.3$ 、 $\mu_\sigma = k_F^2/(2m_\sigma)$ とおいた。

から計算された 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ である。このように自己無撞着 T 行列近似の枠組みにおいても、通常の σ 成分の自由な粒子の分散関係 $\omega = \xi_{\mathbf{p}, \sigma}$ に加え、 $-\sigma$ 成分のホール分散 $\omega = -\xi_{\mathbf{p}, -\sigma}$ が (ブロードではあるものの) 現れる。これは、非自己無撞着 T 行列近似と同様、擬ギャップパラメータ $\tilde{\Delta}_{pg, \sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta)$ を通して粒子とホールが結合することを表しており、これが 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ に擬ギャップ構造をもたらす (図 4.8 の $\gamma = 0$ 参照)。なお、式 (4.10) を $O(\Delta_{pg}^2)$ まで展開すると、非自己無撞着 T 行列近似における静的近似での 1 粒子遅延グリーン関数 (式 (2.40)) が得られる。

このギャップ構造は散乱等による線幅により不明瞭となるが、その効き方が軽い成分と重い成分とで異なることが、成分に依存する擬ギャップ現象の要因となる。これを見るため、式 (4.10) における $\omega + i\delta$ を $\omega + i\gamma$ に置き換えることで、原子間の散乱過程などの要

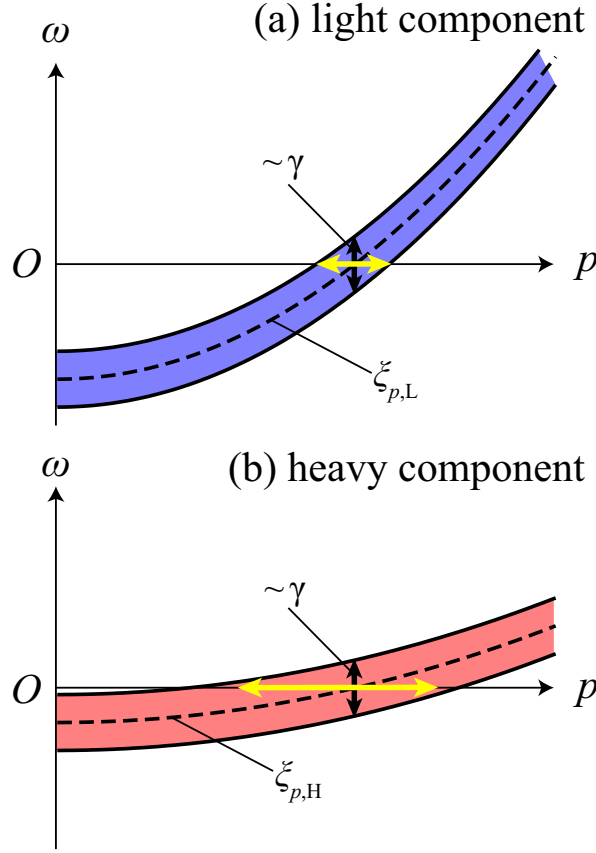


図 4.9 現象論的線幅 γ が 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ に影響を与える範囲の概念図。(a) 軽い成分。(b) 重い成分。両成分で同じ線幅の大きさ γ を仮定しているものの、 $\omega \simeq 0$ では重い成分の方がより広い領域で影響を受ける。

因で現れるスペクトル強度の線幅 γ を現象論的に取り入れる。具体式を書くと、

$$\tilde{G}_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\gamma - \xi_{\mathbf{p}, \sigma} - \frac{\tilde{\Delta}_{\text{PG}, \sigma}^2(\mathbf{p}, i\omega_n \rightarrow \omega + i\gamma)}{\omega + i\gamma + \xi_{\mathbf{p}, -\sigma}}}. \quad (4.11)$$

ただし、ここで導入した現象論的な線幅 γ は軽い成分と重い成分で同じ大きさであるとした。図 4.8 に、 $\tilde{G}_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega)$ (式 (4.11)) を用い計算した 1 粒子状態密度 $\tilde{\rho}_\sigma(\omega)$ に示す。どちらの成分においても、線幅 γ を大きくするにつれ擬ギャップ構造が消失していくことが分かるが、軽い成分の擬ギャップ構造に比べ重い成分のそれが線幅 γ によって消失しやすいという結果が得られる。

これは、線幅 γ が 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ に影響を及ぼす領域の、2 成分間の違いから理解することができる。簡単のため線幅 γ を持った自由粒子の 1 粒子遅延グリーン関数

$$\tilde{G}^{0R}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega + i\gamma - \xi_{\mathbf{p}, \sigma}}, \quad (4.12)$$

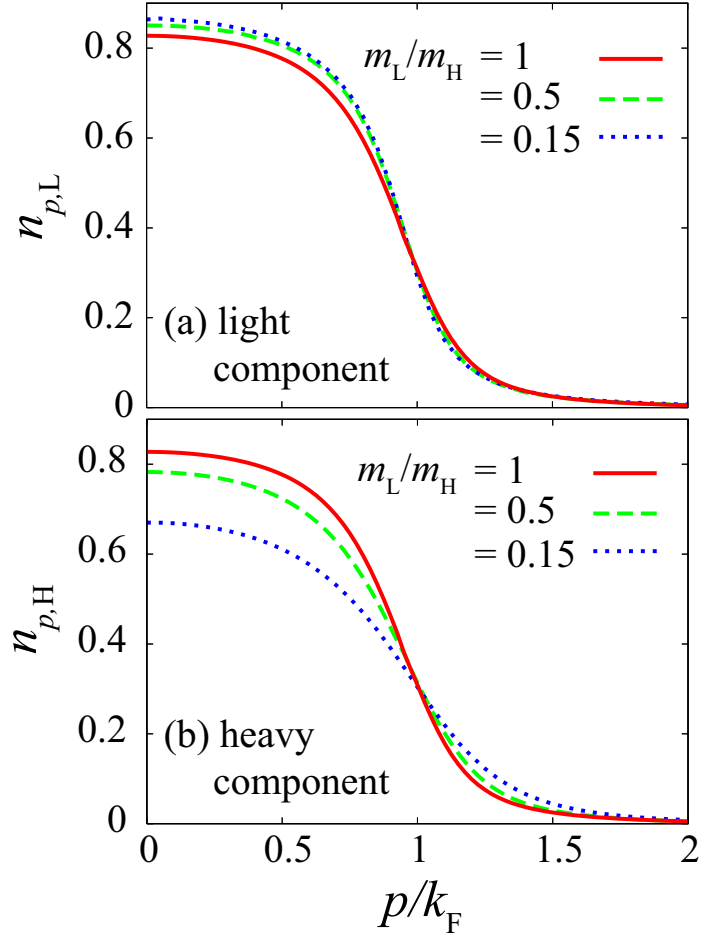


図 4.10 超流動転移温度 T_c における粒子の運動量分布 $n_{p,\sigma}$ の m_L/m_H 依存性。(a) 軽い成分。(b) 重い成分。相互作用強度は $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。

から与えられる $\omega = 0$ の 1 粒子スペクトル強度

$$\tilde{A}_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega = 0) = \frac{1}{\pi} \frac{4m_\sigma \gamma}{[p^2 - [\tilde{k}_{F,0}^\sigma]^2]^2 + 4m_\sigma^2 \gamma^2}, \quad (4.13)$$

を考える。図 4.9 に概念図を示すように、線幅 γ が擬ギャップ現象に関係する $\omega = 0$ 付近の 1 粒子状態密度 $\tilde{\rho}_\sigma^0(\omega = 0) = \sum_{\mathbf{p}} \tilde{A}_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega = 0)$ に影響を及ぼす領域は

$$[\tilde{k}_{F,0}^\sigma]^2 - 2m_\sigma \gamma \lesssim p^2 \lesssim [\tilde{k}_{F,0}^\sigma]^2 + 2m_\sigma \gamma, \quad (4.14)$$

であり、粒子が重いほど広い範囲で影響を受ける。つまり、重い成分の方が軽い成分に比べ広い領域で線幅 γ の影響を受けやすく、より容易にホール分散との結合が他の散乱などの効果によって隠れてしまう。このため擬ギャップ構造も、重い成分の方が消失しやすい。

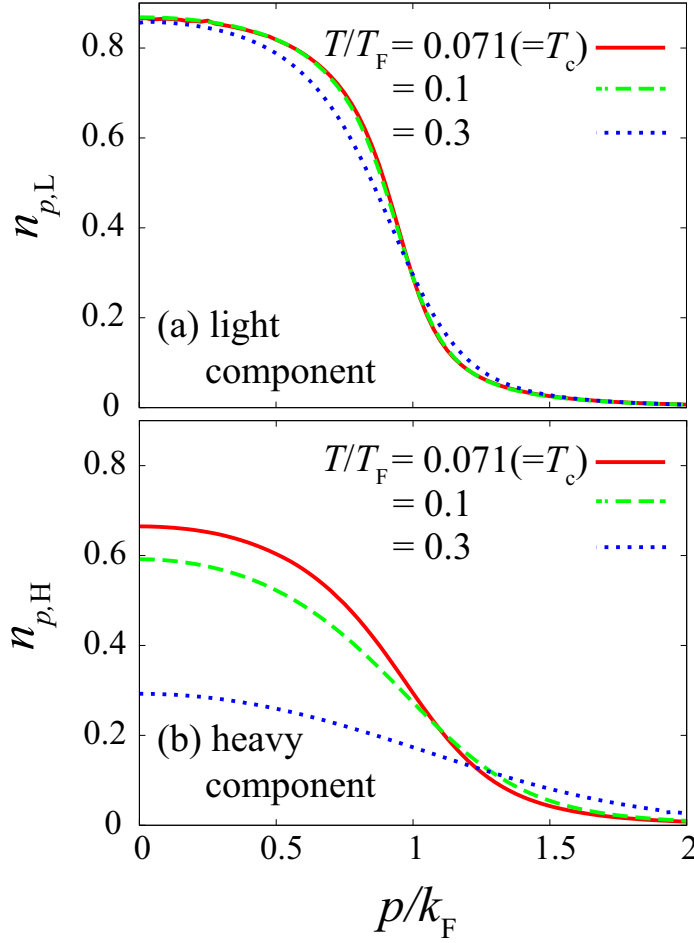


図 4.11 (a) 軽い成分、(b) 重い成分の粒子の運動量分布 $n_{p,\sigma}$ の温度依存性。質量比は $m_L/m_H = 0.15$ 、相互作用強度は $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。

これに加え、質量インバランスの効果は各成分での温度効果にも違いを与え、成分に依存する擬ギャップ現象に影響を及ぼす。軽い原子と重い原子のフェルミ温度は、

$$T_F^L = \frac{k_F^2}{2m_L} > T_F^H = \frac{k_F^2}{2m_H}, \quad (4.15)$$

のように異なるため、フェルミ温度 T_F^σ でスケールされた温度は、

$$\frac{T}{T_F^L} < \frac{T}{T_F^H}, \quad (4.16)$$

となる。これがフェルミ縮退の度合いを決めるため、重い成分がより“高温”となる。このことは、

$$n_{p,\sigma} = \langle c_{p,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) A_\sigma(\mathbf{p}, \omega), \quad (4.17)$$

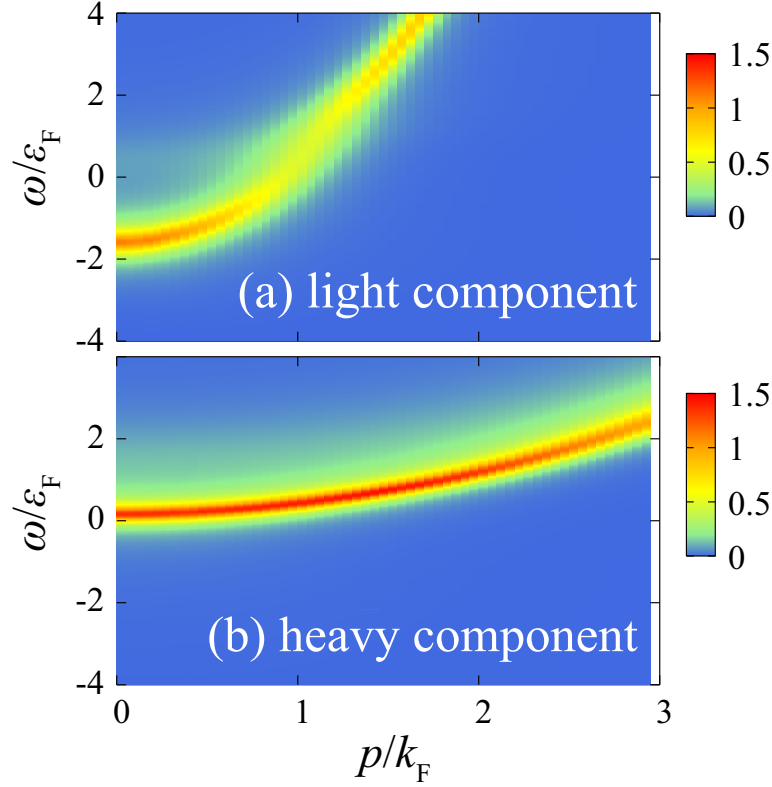


図 4.12 相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 、質量比 $m_L/m_H = 0.15$ 、 $T = 0.3T_F$ における 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ 。(a) 軽い成分 $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ 。(b) 重い成分 $A_H(\mathbf{p}, \omega)$ 。

で与えられる σ 成分の粒子の運動量分布に強く反映する。図 4.10 に超流動転移温度 T_c での質量比 m_L/m_H 依存性を示すように、軽い成分に比べ、重い成分のフェルミ面がぼけやすくなる。この傾向は、図 4.11 に示すように、高温になる程より顕著になる。

このような温度効果の効き方の違いは、粒子同士の散乱の性質に大きく影響する。図 4.12(a) は、質量比 $m_L/m_H = 0.15$ 、 $T = 0.3T_F$ における軽い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ である。また図 4.13(a1) には、いくつかの波数における $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ の ω 依存性を示してある。低波数領域 ($p \lesssim k_F$) では、図 4.13(a2) に示すように、軽い成分の波数分布 $n_{p,L}$ は 1 に近く、重い成分に比べ強くフェルミ縮退している。そのため、パウリの排他律により粒子間の散乱過程に制限が加わり、低波数 $p \lesssim k_F$ の散乱が抑制される (パウリブロッキング)。結果、図 4.13(a1) の $p = 0$ 、および $p = 0.5k_F$ などの低波数領域では、1 粒子スペクトル強度 $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ は鋭いピークを持つ。散乱はフェルミ面付近 $p \sim k_F$ で起こるため、 $p = k_F$ では $A_L(\mathbf{p}, \omega)$ がブロードになる。

一方、図 4.13(b2) に示すように、重い成分のフェルミ縮退はほとんど解けており、

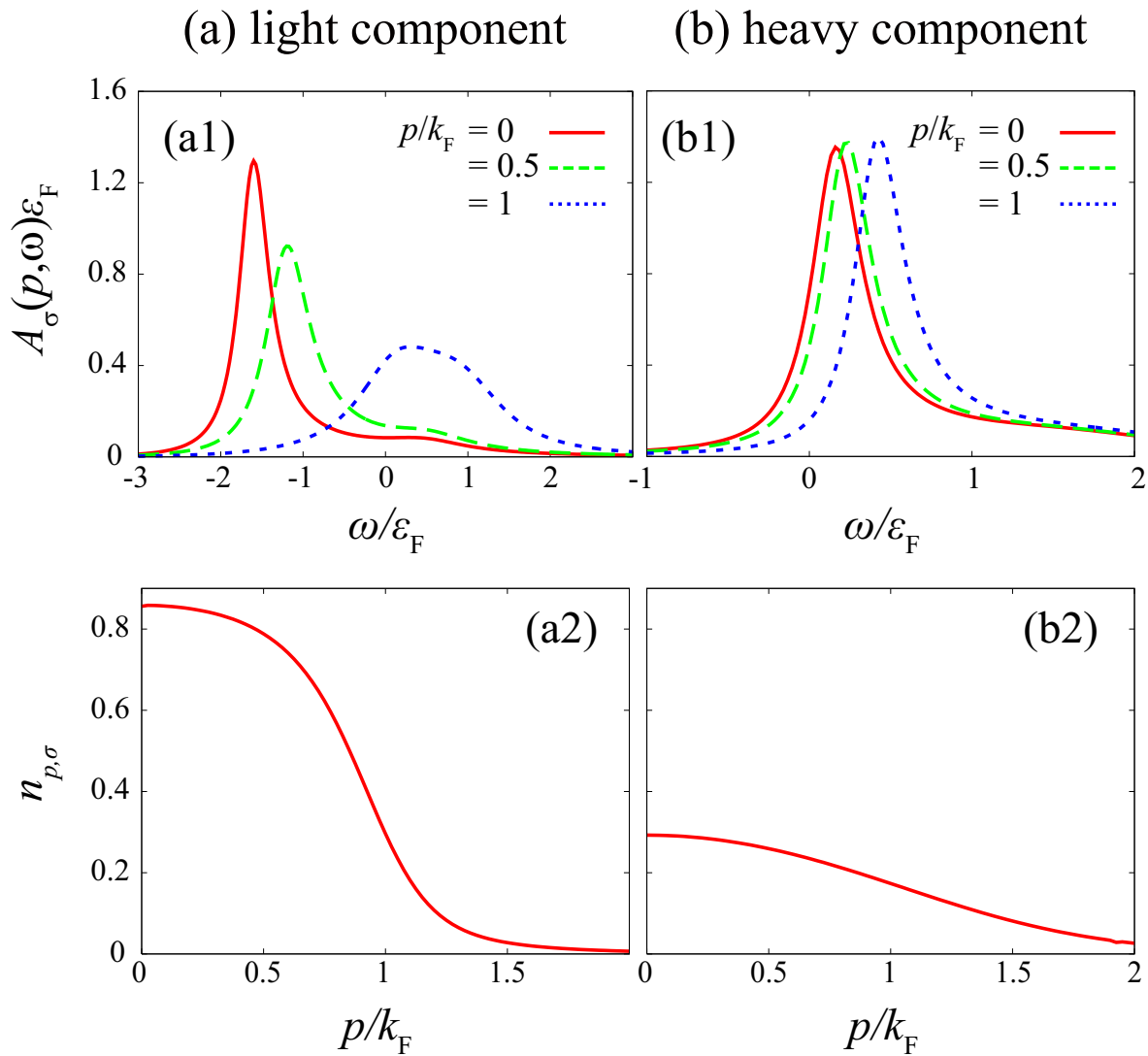


図 4.13 (a1) 軽い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_L(p, \omega)$ 、および (b1) 重い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_H(p, \omega)$ を ω の関数として断面をプロットしたもの。(a2) 軽い成分の粒子分布 $n_{p,L}$ 。(b2) 重い成分の粒子分布 $n_{p,H}$ 。図 4.12 と同じく、相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 、質量比 $m_L/m_H = 0.15$ 、 $T = 0.3T_F$ である。

$n_{p,H}$ の波数依存性は図 4.13(a2) に示した軽い成分 $n_{p,L}$ に比べて弱い。そのため、重い成分は低波数でも粒子間散乱が可能で、散乱頻度の波数依存性も小さいため、重い成分の 1 粒子スペクトル強度 $A_H(p, \omega)$ のピーク幅は、波数 p を変えてもほとんど変化しない(図 4.12(b)、図 4.13(b1))。擬ギャップ構造は、 $\omega = 0$ 付近の 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega \sim 0) = \sum_p A_\sigma(p, \omega \sim 0)$ が抑制されることで起こるため、このように重い成分の散乱領域が軽い成分に比べ広いことも、重い成分の擬ギャップが消失しやすい要因となっている。

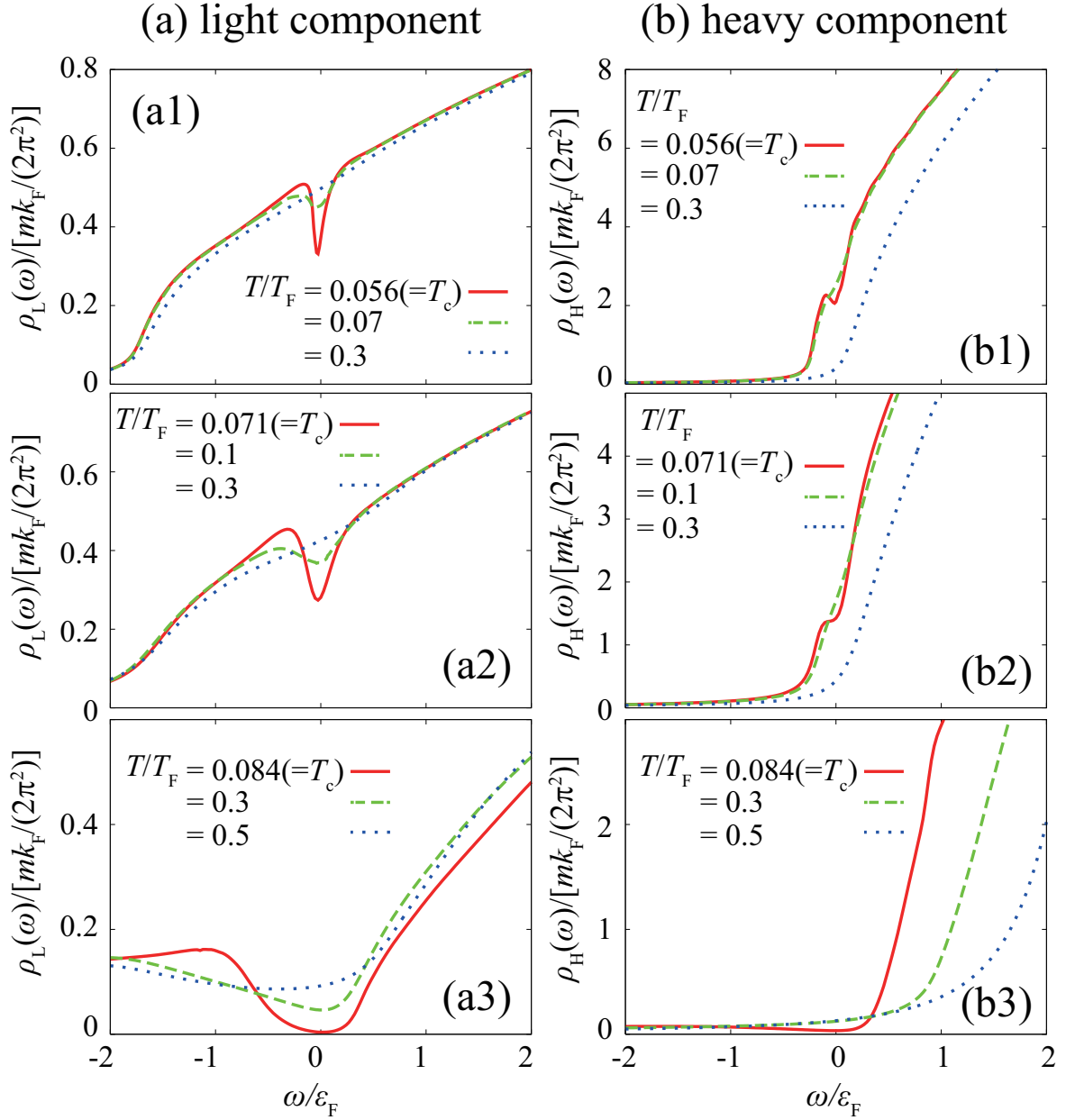


図 4.14 質量比 $m_L/m_H = 0.15$ における、(a1)-(a3) 軽い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_L(\omega)$ 。 (b1)-(b3) 重い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_H(\omega)$ の温度依存性。相互作用強度は、(a1), (b1) $(k_F a_s)^{-1} = -0.5$ 。 (a2), (b2) $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。 (a3), (b3) $(k_F a_s)^{-1} = 1$ 。

4.3 質量インバランスのあるフェルミ原子気体の相図

以上のような質量インバランス効果の結果、軽い成分と重い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ それぞれに現れる擬ギャップは、異なる温度で消失する。図 4.14 は様々な相互作用

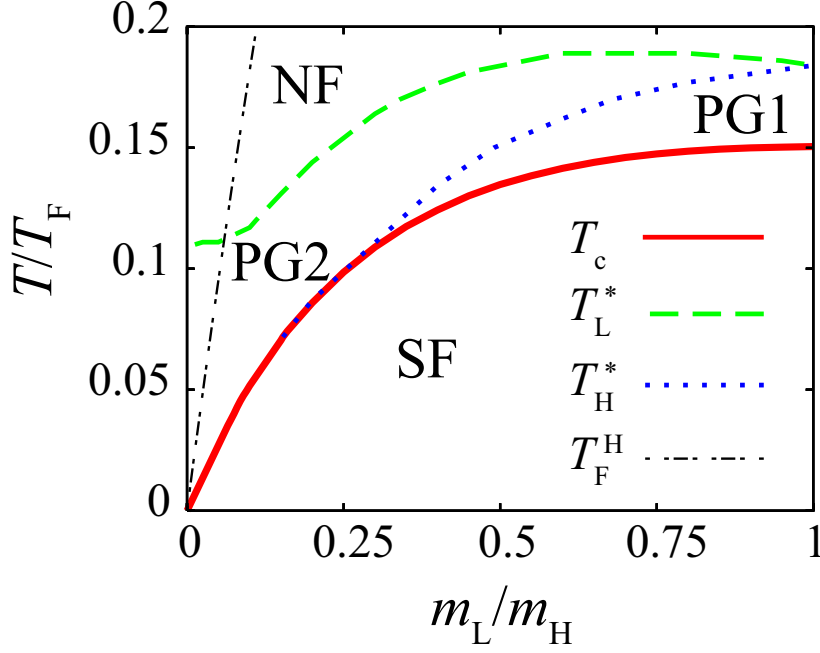


図 4.15 擬ギャップ温度 T_σ^* の質量比 m_L/m_H 依存性。相互作用強度は、 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。PG1：軽い成分、重い成分のそれぞれの 1 粒子状態密度 $\rho_L(\omega)$ 、 $\rho_H(\omega)$ に窪みが現れる領域。PG2：軽い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_L(\omega)$ にのみ擬ギャップ構造が現れる領域。NF：擬ギャップ構造の現れない常流動相のフェルミ気体。SF：超流動相。 T_F^H は重い原子のフェルミ温度。

用強度における 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ の温度依存性である。すべての相互作用領域で、軽い成分の方が、重い成分に比べ $\omega = 0$ 近傍の擬ギャップ構造がより高温まで残ることが分かる。このような成分に依存する擬ギャップ現象がどの領域で現れるのかを定量化するため、軽い成分、重い成分それぞれについて $\omega = 0$ 近傍の窪み構造が消失する温度 T_σ^* (擬ギャップ温度) を導入する。図 4.15 に、相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における擬ギャップ温度 T_σ^* の質量比 m_L/m_H 依存性を示す。このように、任意の質量比において常に $T_L^* > T_H^*$ が成り立つ。

2 種類の擬ギャップ温度 T_L^* 、 T_H^* が現れることにより、質量インバランス系には 2 種類の擬ギャップ領域が現れる。 $T_c \leq T \leq T_H^*$ (図 4.15 の“PG1”)では、擬ギャップ現象が軽い成分、重い成分の両成分に現れる。また、 $T_H^* \leq T \leq T_L^*$ の温度領域 (図 4.15 の“PG2”)では、軽い成分のみが擬ギャップ構造を持つ。図 4.15 に見られるように、 $0.15 \lesssim m_L/m_H (\leq 1)$ では PG1 と PG2 の両方の領域が存在する一方、質量インバランスの大きな領域 $m_L/m_H \lesssim 0.15$ では PG2 のみが存在する。PG2 のような片方の成分のみが擬ギャップ構造を持つ領域は、質量差がない限り存在し得ないため、これは質量インバランス系特有の現象であると言える。

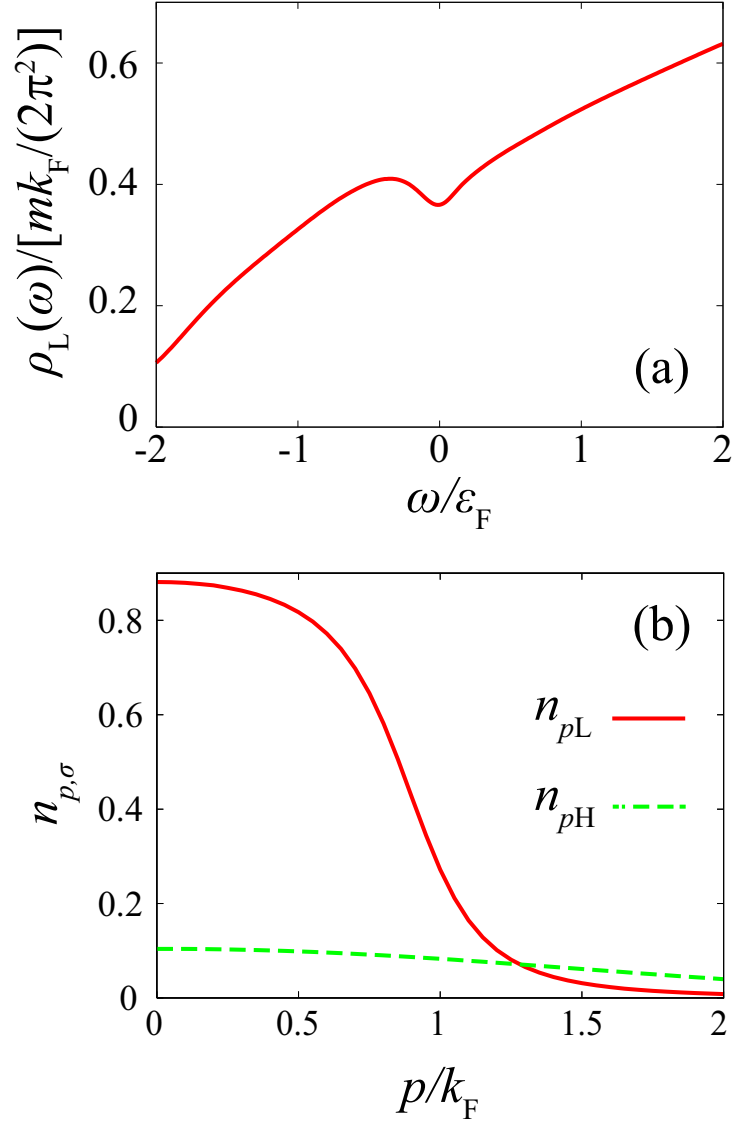


図 4.16 重い成分の古典領域 ($T > T_F^H$) において軽い成分 $\rho_L(\omega)$ に現れる擬ギャップ現象。(a) 軽い成分の 1 粒子状態密度 $\rho_L(\omega)$ 。(b) 軽い成分と重い成分の運動量分布 $n_{p,\sigma}$ 。質量比 $m_L/m_H = 0.0125$ 、 $T = 0.05T_F$ で、このパラメータは $T_F^H = 0.025T_F < T < T_L^* = 0.11T_F < T_F^L = 1.98T_F$ を満たす。相互作用強度は $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。

また、図 4.15 から分かるように、軽い成分の擬ギャップ温度 T_L^* が、重い成分のフェルミ温度 T_F^H を上回る領域が存在する ($m_L/m_H \ll 1$)。このことは、重い成分が古典領域 $T > T_F^H$ にあっても、軽い成分に擬ギャップ現象が起こる場合があることを示唆している。実際、質量比 $m_L/m_H = 0.0125$ 、 $T/T_F = 0.05$ ($T_F^H = 0.025T_F < T < T_L^*$ を満たす温度) において、軽い成分に擬ギャップが現れる (図 4.16)。

図 4.17 は、質量インバランス系フェルミ原子気体超流動の候補である ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合気

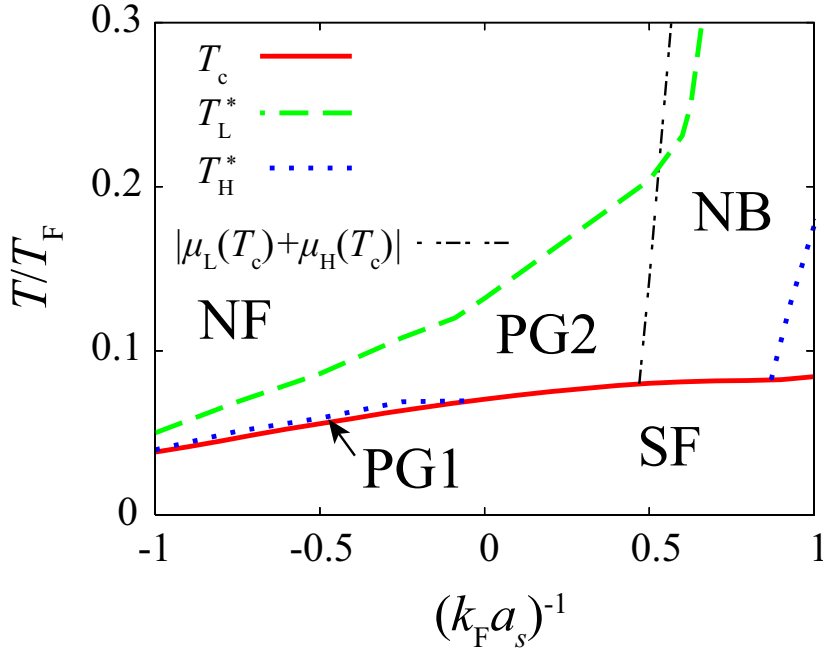


図 4.17 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系 ($m_L/m_H = 0.15$) の相図。PG1、PG2、NF、SF は、図 4.15 と同じ定義である。図中の強結合領域に、バランス系 (図 4.18) と同様、分子ボソンの結合エネルギーを表す $|\mu_L(T_c) + \mu_H(T_c)|$ を示した ($\mu_\sigma(T_c) < 0$)。この線より強結合側は、常流動の分子ボース気体とみなすことができると考えられる (NB)。

体 ($m_L/m_H = 0.15$) に対し、今回の理論の枠組みで作成した相図である。ほとんどの擬ギャップ領域は、軽い成分にのみが現れる PG2 である。これは、図 4.18 に示したバランス系の場合 (擬ギャップ領域がすべて PG1) とは対照的である。

強結合領域では、軽いフェルミ原子と重いフェルミ原子が対を組んだ分子ボース気体で記述される。構成された分子ボソンの結合エネルギーが式 (3.4) で与えられるため、図 4.17 に示された $|\mu_L(T_c) + \mu_H(T_c)|$ は、分子ボソンが形成され始める典型的な温度とみなすことができる。つまり、この線の右側 (“NB”) は、常流動相の分子ボース気体とみなすことができる領域である。

図 4.17 に示した計算結果は、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系の擬ギャップ現象の観測をする際、軽い成分の 1 粒子励起スペクトルを測定すべきであることを示している。この系における超流動転移実現は重要な課題であるが、この (軽い成分の) 擬ギャップ現象を観測することは、どの程度系が超流動相に近づいているかのよい指標となる。逆に、重い成分については、擬ギャップ現象が観測される領域は相図上の非常に狭い領域に限られている。そのため、重い成分にギャップ構造が現れた場合、それを超流動転移によって現れた超流動ギャップであると同定することができる。

中間結合領域で重い成分の擬ギャップ温度 T_H^* が消失している (図 4.18 に示すバランス

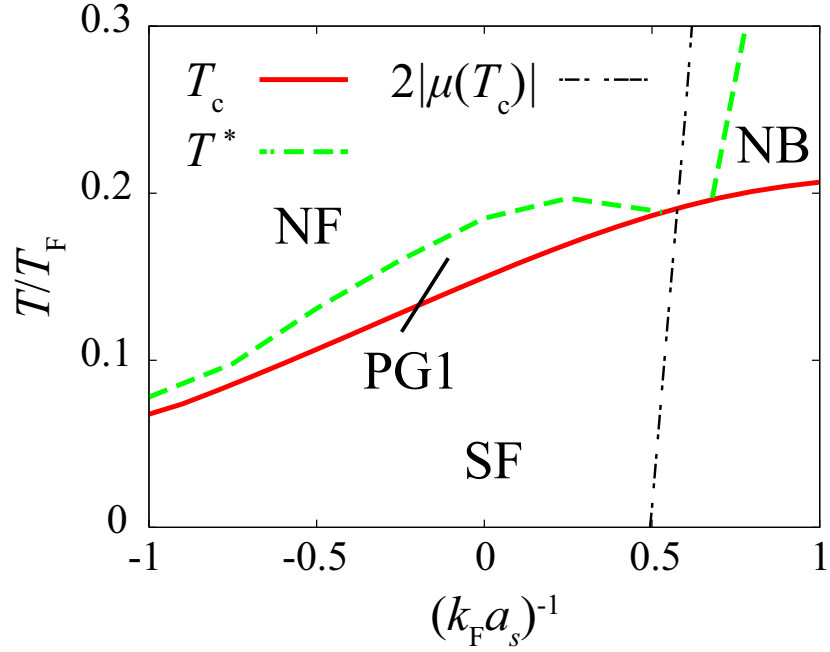


図 4.18 バランス系の相図。PG1、NF、SF は図 4.15 と同じ定義である。両成分に擬ギャップを持つ PG1 のみが存在する。また、強結合領域の $2|\mu(T_c)|$ は分子ボソンが形成する特徴的な温度であり（強結合領域では $\mu(T_c) < 0$ ）、その線の右側 (NB) は分子ボース気体とみなすことができる領域である。

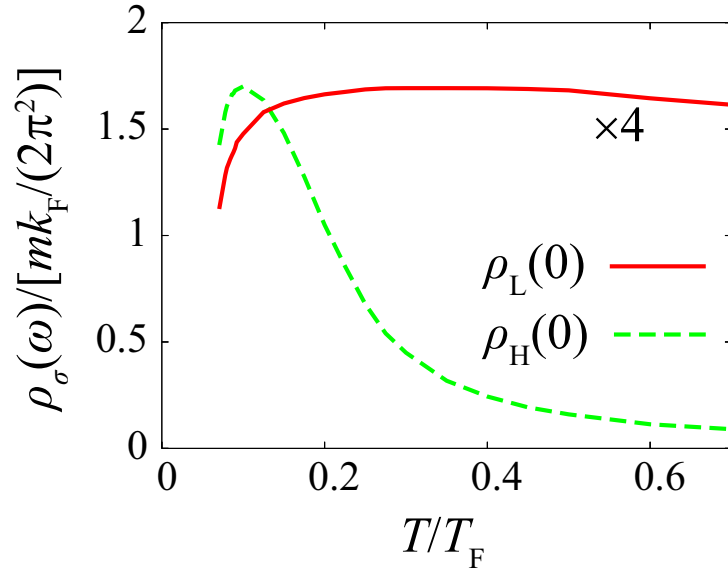


図 4.19 $\omega = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega = 0)$ の温度依存性。質量比は $m_L/m_H = 0.15$ 、相互作用強度は $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 。ただし、 $\rho_L(\omega = 0)$ は計算結果の 4 倍の値を示した。

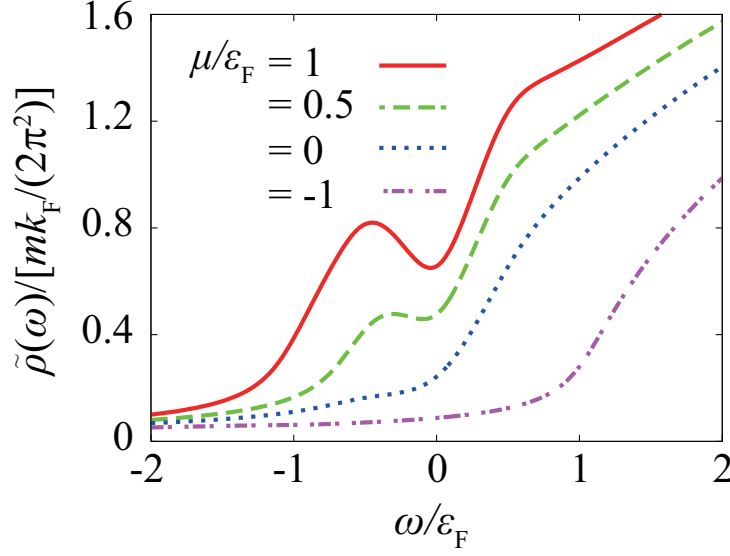


図 4.20 式 (4.11) で与えられる、現象論的な遅延グリーン関数 $\tilde{G}^R(\mathbf{p}, \omega)$ ($= \tilde{G}_L^R(\mathbf{p}, \omega) = \tilde{G}_H^R(\mathbf{p}, \omega)$) を用いて計算した 1 粒子状態密度 $\tilde{\rho}(\omega)$ ($= \tilde{\rho}_L(\omega) = \tilde{\rho}_H(\omega)$) の化学ポテンシャル μ 依存性。ここではバランス系を考えており、擬ギャップパラメータは $\Delta_{pg} = 0.3\varepsilon_F$ 、現象論的な線幅は $\gamma = 0.2\varepsilon_F$ と置いた。

系の擬ギャップ温度 T^* にも、同様の振る舞いが見られる) ことは、必ずしもこの領域の重い成分が自由粒子のように振る舞うことを意味しているわけではない。実際、図 4.19 に示すように、重い成分の $\omega = 0$ の 1 粒子状態密度 $\rho_H(\omega = 0)$ は T_c 付近で対形成揺らぎにより強く抑制されている。この領域で窪み構造が消失したのは、非凝縮対形成が抑制されたのではなく、強い引力相互作用により化学ポテンシャル μ_σ が減少したため (図 3.6)、1 粒子状態密度の $\omega = 0$ 付近の擬ギャップ構造が粒子同士の散乱により生じるスペクトルのぼやけの中に埋もれてしまったためである。図 4.20 に、静的近似をした上で現象論的に線幅 γ を取り入れた 1 粒子遅延グリーン関数 $\tilde{G}_\sigma^R(\mathbf{p}, \omega)$ (式 (4.11)) から得られる 1 粒子状態密度 $\tilde{\rho}_\sigma(\omega)$ の化学ポテンシャル μ_σ 依存性を示す (図 4.20 はバランス系の結果を示した)。ここで見られるように、対形成揺らぎのエネルギースケールを表す擬ギャップパラメータ Δ_{pg} を一定にしているにも関わらず、化学ポテンシャル μ_σ が小さくなると窪み構造が消失する。

擬ギャップ現象は、相転移を伴わないクロスオーバー現象であるため、その領域の決め方に任意性が存在する。例えば、別の擬ギャップ温度 T_σ^{**} を $\omega = 0$ における 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega = 0)$ が抑制され始める温度として定義することもできる。しかしながら、図 4.19 に示すように、仮にこのように擬ギャップ温度を定義しても、再び $T_L^{**} > T_H^{**}$ が得られ、軽い成分の方が重い成分に比べ対形成揺らぎの影響を受けやすいという結論は変わらない。

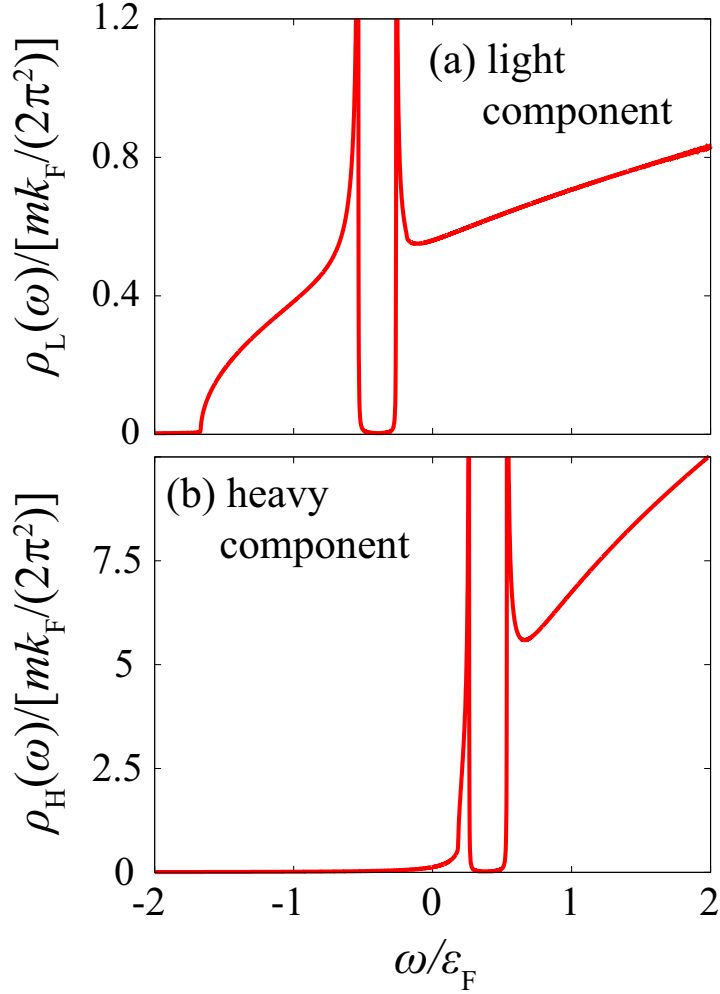


図 4.21 平均場理論で計算した、サルマ相における 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ (解析法は付録 B に述べた)。(a) 軽い成分。(b) 重い成分。質量比は $m_L/m_H = 0.15$ 、相互作用強度 $(k_F a_s)^{-1} = 0$ 、温度 $T = 0.35T_F (= 0.93T_c)$ 。

最後に、質量インバランスの大きな系の超流動相で予言されているサルマ相 [10, 12, 22, 92] について議論する。図 4.21 に示すようにこの超流動相の特徴は、超流動ギャップが $\omega = 0$ からずれた位置に現れ、 $\omega = 0$ に 1 粒子状態密度を有限に持つ点である (解析法は付録 B に述べた)。そのため、サルマ相は超流動相でありながら、ギャップレスの励起構造を持つ。

擬ギャップ現象は超流動ギャップの生じる前駆的な振る舞いであるため、超流動転移温度 T_c 以下の温度領域に仮にサルマ相が存在するのであれば、擬ギャップ現象も $\omega = 0$ からずれた位置に現れると期待できる。しかしながら、図 4.4 等にした擬ギャップは、 $\omega \sim 0$ 付近に現れている。そのため、サルマ相は (少なくとも $N_L = N_H$ の条件下では) 強結合効果によって大きく抑制されると考えられる。

第 5 章

まとめ

本論文では、質量インバランスを有する極低温フェルミ混合気体の BCS(Bardeen-Cooper-Schrieffer)-BEC(Bose-Einstein condensation) クロスオーバー領域における強結合物性を記述する理論の構築を行った。ここで構築した強結合理論を用いて 1 粒子状態の解析を行い、質量インバランス系特有の成分に依存する擬ギャップ現象が起こることを明らかにした。

本論文前半では、質量インバランスのあるフェルミ原子気体にも適用可能な強結合理論を構築した。強く相互作用する極低温フェルミ原子気体における BCS-BEC クロスオーバーや擬ギャップ現象を記述する理論として大きな成功を収めてきた非自己無撞着 T 行列近似が、質量インバランスのある系に適用すると超流動転移温度 T_c が 2 価性を持つなどの非物理的な振る舞いを示すことを明らかにした。そしてこの要因が、この理論が軽い成分と重い成分の強結合補正を自己無撞着に取り扱っていないことに起因することを見出した。これを受け、非自己無撞着 T 行列近似を拡張し、より高次の強結合補正を取り込んだ「自己無撞着 T 行列近似」の枠組みでこの問題が解決することを明らかにした。

3 つの強結合理論 (非自己無撞着 T 行列近似、拡張 T 行列近似、および自己無撞着 T 行列近似) の計算結果を比較することで、質量インバランスのあるフェルミ粒子系の強結合効果の解析には (1) 相互作用する相手の粒子に対する強結合補正、および (2) 軽い成分と重い成分のそれぞれのフェルミ面に対する強結合補正の両方を自己無撞着な形で取り込むことが重要となることを明らかにした。質量インバランスの小さい場合については、(1) のみを満たしている拡張 T 行列近似を用いることで (1)、(2) のどちらも満たしていない非自己無撞着 T 行列近似に現れた物理量の 2 値性を解消でき、なめらかな BCS-BEC クロスオーバーが得られる。しかし、質量インバランスが大きくなると、(2) の強結合補正が正しく取り込まれていないことに起因し弱結合領域で T_c が消失する。これらとは対照的に、(1)、(2) の両方を満たしている自己無撞着 T 行列近似を用い計算された T_c は、すべての相互作用領域、質量インバランス領域において有限の値を示す。この結果は、絶対

零度のユニタリー極限 ($(k_F a_s)^{-1} = 0$) において、 $0.1 \lesssim m_L/m_H (\leq 1)$ で超流動相が得られているモンテカルロ計算の結果と矛盾しない。このようにして、質量インバランスのあるフェルミ原子気体の強結合物性を記述する理論の構築に成功した。

本論文後半では、この自己無撞着 T 行列近似を用い質量インバランス系の 1 粒子状態を計算し、この系に現れる擬ギャップ現象を詳細に解析した。擬ギャップ構造をもたらす非凝縮対形成には軽い原子と重い原子が同数参加するのにもかかわらず、軽い成分と重い成分で異なる擬ギャップ現象を示すことを明らかにした。軽い成分と比較し、重い成分の 1 粒子状態密度に現れる $\omega = 0$ 付近の窪み構造は不明瞭となる。質量インバランスが大きい場合 ($m_L/m_H \ll 1$)、軽い成分には依然擬ギャップが残るものの、重い成分の擬ギャップ構造は消失する。質量インバランスのない極低温フェルミ原子気体では擬ギャップ現象は両成分で常に同時に現れるため、このような成分依存型の擬ギャップ現象は、質量インバランス系特有の現象である。さらに、1 粒子状態密度の温度、および相互作用依存性を解析し、軽い成分の擬ギャップが消失する温度 (擬ギャップ温度) T_L^* が常に重い成分の擬ギャップ温度 T_H^* に比べ高温となることを示し、両成分に擬ギャップが現れる領域 (PG1) と、軽い成分にのみ擬ギャップが現れる領域 (PG2) の 2 種類の擬ギャップ領域が現れることを明らかにした。

本論文の結果から、 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ フェルミ混合系 ($m_L/m_H = 0.15 \ll 1$) では、軽い ${}^6\text{Li}$ 気体の方が、重い ${}^{40}\text{K}$ 気体に比べより容易に擬ギャップ現象が観測されることを明らかにした。擬ギャップ現象は超流動転移の近傍で起こる現象であるため、この観測を通じ、超流動相に近いかな否かを判定することができる。また、重い成分 (${}^{40}\text{K}$) にはほとんど擬ギャップ現象が現れないことを示し、 ${}^{40}\text{K}$ の 1 粒子励起ギャップの観測は超流動転移のシグナルとみなすことができることを明らかにした。さらに擬ギャップ構造の解析から、平均場近似の範囲で予言されているサルマ相が強結合効果によって強く抑制される可能性が高いことを示した。

本論文では簡単のため、軽い成分と重い成分の粒子数が同数の場合の一様な原子気体を解析した。しかし、仮に両成分の原子を同数トラップ中に用意したとしても、各成分が感じるトラップの周波数はそれぞれ異なるため、2 成分の原子数に局所的な差が生じる。また、光電子分光型測定は、トラップに関する空間平均が取られた 1 粒子占有スペクトル強度が観測される。このような現実的な状況を記述するため、トラップの影響を加味した理論に本研究を拡張することは、今後の重要な課題である。

質量の異なるフェルミ対凝縮は、半導体物理における電子正孔系や電子正孔光子系、あるいは高エネルギー物理におけるカラー超伝導など、幅広い分野で議論されている。 ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$ 混合系で超流動状態が実現されれば、フェッシュバハ共鳴機構を用いた相互作用強度の高い操作性を生かして、系統的にこれらの超流動状態の物性を調べることが可能である。本論文で解析した擬ギャップ現象が超流動転移と強く関連している。そのため、

本研究で得られた結果は、今後の質量インバランスフェルミ混合系の研究の発展に大きく貢献するものと期待される。

謝辞

本研究を行うにあたり、担当教員の大橋洋士教授には、学部4年生からの6年の間、熱心なご指導をいただきました。多くの専門知識はもちろん、研究の仕方について、どのような問題に着目し、どのように研究を進め、そしてどのようにその成果をまとめるべきかを学ぶことができました。また、数値計算機等、快適な研究環境を提供していただきました。このような形で研究成果をまとめることができたのは、先生のご指導のおかげです。ここに篤くお礼申し上げます。

本学位論文の副査を引き受けていただいた、物理学専修の白濱圭也教授、齊藤圭司准教授、物理情報専修の伊藤公平教授には、大変有意義な助言をいただき、感謝いたします。

シカゴ大学・アルゴンヌ国立研究所の Peter B. Littlewood 教授には、私が 2014 年 1 月からシカゴ大学に短期留学した際、受け入れていただきました。また、Alexander Edelman 氏をはじめとする同研究室の皆さまには、研究の面のみならず、慣れないシカゴでの生活を助けていただきました。ここに深く感謝申し上げます。

大橋研究室では、多くの諸先輩方、後輩達に恵まれ、大変活発な議論を行うことができました。PD 研究員として大橋研究室に在籍された渡部昌平氏、遠藤有希氏には研究室のゼミを通して多くの助言をいただきました。猪谷太輔氏、柏村孝氏、渡邊亮太氏には、研究の進め方、数値計算の基礎等、多くのことを教えていただきました。また、田島裕之氏、馬嶋良氏、松浦辰威氏、Pieter van Wyk 氏、松本杜青氏、Digvijay Kharga 氏、Soumita Mondal 氏、鏡原大地氏、太田幹氏、武藤悠輔氏には、ゼミ等で議論する中で新たな刺激と示唆を得ることができました。ありがとうございました。

慶應義塾大学物理学科の先生方には、コロキウムや授業を通して多くのことをご教授いただきました。また、物理学科配属以来、同期の松島直輝氏をはじめとする多くの気の置けない仲間と出会いました。私の学生生活、研究生活が充実したものになったのは、多大な恩恵を与えてくれた皆様のおかげです。ありがとうございました。

最後に、私が後期博士課程に進学することを理解し、ここまで応援してくれてきた父母をはじめとする家族に感謝します。

付録 A

光電子分光型測定による 1 粒子スペクトル強度の測定法

電子系では、1 粒子状態を測定する方法として、角度分解型光電子分光 (Angle-resolved photoemission spectroscopy, ARPES) 実験が広く用いられている [57]。ここでは、ARPES 実験を極低温原子気体に応用した測定法で、Jin のグループによって確立された測定法について説明する [60–62]。

電子系における ARPES 実験では、図 A.1(a) に模式的に示すように、試料にエネルギー $h\nu$ の光を照射し、光電効果で電子を物質から弾き飛ばす。飛ばされた電子のエネルギー

$$\omega_k = \varepsilon_k + \varphi, \quad (\text{A.1})$$

を測定することで ($\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ は質量 m を持つ電子の運動エネルギー、 φ は固体表面の仕事関数)、エネルギー保存則から得られる関係式

$$E_k = \omega_k - h\nu, \quad (\text{A.2})$$

から、系の 1 粒子励起エネルギー E_k を測定することができる。また、電子が飛び出る角度から、電子の運動量 $\hbar k$ も測定することができる。この操作を繰り返し行うことで、どの波数およびエネルギーにどの程度電子が占有しているのかを表す 1 粒子占有スペクトル強度

$$L(\mathbf{p}, \omega) = A(\mathbf{p}, \omega) f(\omega), \quad (\text{A.3})$$

を測定することができる。

極低温フェルミ原子気体の実験では、電磁波 (エネルギー $h\nu$) を原子気体に照射することで、用意した 2 つの擬スピン状態 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ のいずれか一方を、他の準位と相互作用しな

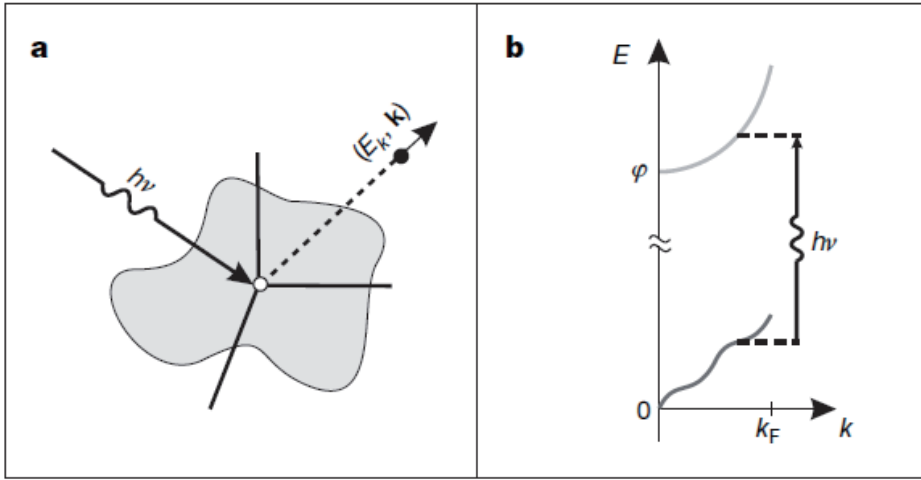


図 A.1 極低温フェルミ原子気体に対する光電子分光型測定 [60]。(a) 光電子分光型測定の概念図。電子系では、エネルギー $h\nu$ の光を照射すると、光電効果によって電子が系から飛び出す。そのエネルギーを測定し、エネルギー保存則 (A.2) を用いることで、元の電子の励起エネルギーを測定する。原子系に対しても同様で、エネルギー $h\nu$ を持つ電磁波を原子気体に照射し第 3 の状態に移することで原子の励起エネルギーを測定する。(b) 原子気体に電磁波を照射することで、(運動量をほとんど変えずに) 第 3 の状態に移する。上の分散で表される飛び出す原子のエネルギーと運動量を測定することにより、下の分散に模式的に書かれた 1 粒子励起分散を決定することができる。Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: Nature, J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, 454, 744 (2008), copyright (2008). doi:10.1038/nature07172.

い第 3 の状態に移させることができる。その際、電磁波の光子は無視できるほどの運動量しか持たないので、この遷移過程ではほとんど運動量変化がなく、飛び出す原子の運動量をそのまま元の原子の運動量とみなすことができる (図 A.1(b))。さらにこの第 3 の状態は、 $\omega_k = \varepsilon_k + \varphi$ の分散関係を持つことが分かっているので ($\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ は質量 m を持つ原子の運動エネルギー、 φ はゼーマンエネルギー)、ARPES 実験と同様、飛び出した原子のエネルギーを測定し、エネルギー保存則 (式 (A.2)) を用いることで、もとの原子の励起エネルギー E_k を測定することが可能である。このようにして、フェルミ原子気体の 1 粒子占有スペクトル強度を測定することができる。ただし、この実験で用いられる電磁波は原子気体全体に照射されるため、トラップポテンシャル中の原子気体に関する空間平均が取られたスペクトル強度が観測されることになる。

付録 B

質量インバランスのあるフェルミ原子気体に対する平均場近似

ここでは、質量インバランスを有する極低温フェルミ原子気体に対する、平均場理論 (BCS-Leggett 理論) の枠組みを説明する。この解析法を用い、1.4 節の図 1.18 に示した相図、および 4.3 節の図 4.21 に示したサルマ相の 1 粒子状態密度 $\rho_\sigma(\omega)$ を計算した。

第 2 章以降と同様に、式 (2.1) で与えられる、質量の異なるフェルミ粒子系を記述するハミルトニアンを考える。再録すると、

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}, \sigma} c_{\mathbf{p}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}, \sigma} - U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \text{H}}^\dagger c_{-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2, \text{H}} c_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2, \text{L}}. \quad (\text{B.1})$$

式 (B.1) の第 2 項の相互作用項において、相互作用する 2 粒子の重心運動量に対応する波数 $\mathbf{q}$ がゼロの寄与のみを考え、さらに

$$\begin{aligned} & -U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}} \\ &= -U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \left[\langle c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger \rangle + \delta(c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger) \right] \left[\langle c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}} \rangle + \delta(c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}}) \right] \\ &\simeq -U \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \left[\langle c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger \rangle \langle c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \delta(c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger) \langle c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}} \rangle + \langle c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger \rangle \delta(c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}}) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \left[\Delta c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger + \Delta^* c_{-\mathbf{p}, \text{H}} c_{\mathbf{p}, \text{L}} \right] + \text{const.}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

と近似する (平均場近似)。ただし、 $\delta(c_{-\mathbf{p}, \text{H}} c_{\mathbf{p}, \text{L}}) \equiv c_{-\mathbf{p}, \text{H}} c_{\mathbf{p}, \text{L}} - \langle c_{-\mathbf{p}, \text{H}} c_{\mathbf{p}, \text{L}} \rangle$ は、平均値からの揺らぎを表す演算子で ($\langle \dots \rangle$ は統計平均)、 $O(\delta(c_{\mathbf{p}, \text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p}, \text{H}}^\dagger) \delta(c_{-\mathbf{p}', \text{H}} c_{\mathbf{p}', \text{L}}))$ は無

視した。また、

$$\Delta \equiv -U \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{-\mathbf{p},\text{H}} c_{\mathbf{p},\text{L}} \rangle, \quad (\text{B.3})$$

は超流動秩序パラメータで、 $\Delta \neq 0$ が超流動相、 $\Delta = 0$ が常流動相であることを表す。以後、この量は実数で、 $\Delta \geq 0$ とする (この仮定をしても、一般性を失わない)。

このような近似の結果、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H^{\text{MF}} &= \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi_{\mathbf{p},\sigma} c_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p},\sigma} + \sum_{\mathbf{p}} [\Delta c_{\mathbf{p},\text{L}}^\dagger c_{-\mathbf{p},\text{H}}^\dagger + \Delta c_{-\mathbf{p},\text{H}} c_{\mathbf{p},\text{L}}] + \text{const.} \\ &= \sum_{\mathbf{p}} [E_{\mathbf{p},+} \gamma_{\mathbf{p},+}^\dagger \gamma_{\mathbf{p},+} + E_{\mathbf{p},-} \gamma_{\mathbf{p},-}^\dagger \gamma_{\mathbf{p},-}] + \text{const.}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

のように、2 次形式となる。ここで、

$$E_{\mathbf{p},\pm} = \pm \Delta \xi_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}}, \quad (\text{B.5})$$

は $\pm$ 成分の準粒子の励起エネルギー、 $\gamma_{\mathbf{p},\pm}$ はその消滅演算子である。ただし、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}$, $\xi_{\mathbf{p}} = [\xi_{\mathbf{p},\text{L}} + \xi_{\mathbf{p},\text{H}}]/2$, $\Delta \xi_{\mathbf{p}} = [\xi_{\mathbf{p},\text{L}} - \xi_{\mathbf{p},\text{H}}]/2$ で、準粒子の場の演算子は

$$\gamma_{\mathbf{p},+} = u_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\text{L}} - v_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p},\text{H}}^\dagger, \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_{\mathbf{p},-}^\dagger = v_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p},\text{L}} + u_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p},\text{H}}^\dagger, \quad (\text{B.7})$$

で与えられる。ここで $u_{\mathbf{p}}, v_{\mathbf{p}}$ は、式 (B.4) の 1 行目を対角化する際に用いられるパラメータで、

$$u_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} = \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{p}}}, \quad (\text{B.10})$$

の関係を満たす。これらの関係式から、種々の物理量が

$$\begin{aligned} \langle c_{-\mathbf{p},\text{H}} c_{\mathbf{p},\text{L}} \rangle &= u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} [1 - f(E_{\mathbf{p},+}) - f(E_{\mathbf{p},-})] \\ &= \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{p}}} [1 - f(E_{\mathbf{p},+}) - f(E_{\mathbf{p},-})], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\langle c_{\mathbf{p},\text{L}}^\dagger c_{\mathbf{p},\text{L}} \rangle = u_{\mathbf{p}}^2 f(E_{\mathbf{p},+}) + v_{\mathbf{p}}^2 [1 - f(E_{\mathbf{p},-})], \quad (\text{B.12})$$

$$\langle c_{\mathbf{p},\text{H}}^\dagger c_{\mathbf{p},\text{H}} \rangle = u_{\mathbf{p}}^2 f(E_{\mathbf{p},-}) + v_{\mathbf{p}}^2 [1 - f(E_{\mathbf{p},+})], \quad (\text{B.13})$$

と計算される。ただし、 $\langle \gamma_{\mathbf{p},\pm}^\dagger \gamma_{\mathbf{p},\pm} \rangle = f(E_{\mathbf{p},\pm})$ を用いた。これから、式 (B.3) で与えられる超流動秩序パラメータ Δ に関する自己無撞着方程式 (ギャップ方程式)

$$1 = \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{p},+}) - f(E_{\mathbf{p},-})}{E_{\mathbf{p}}}, \quad (\text{B.14})$$

および、軽い粒子 ($\sigma = \text{L}$)、重い粒子 ($\sigma = \text{H}$) の粒子数に関する方程式 (粒子数方程式)

$$N_{\text{L}} = \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{\mathbf{p},\text{L}}^\dagger c_{\mathbf{p},\text{L}} \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \left[u_{\mathbf{p}}^2 f(E_{\mathbf{p},+}) + v_{\mathbf{p}}^2 [1 - f(E_{\mathbf{p},-})] \right], \quad (\text{B.15})$$

$$N_{\text{H}} = \sum_{\mathbf{p}} \langle c_{\mathbf{p},\text{H}}^\dagger c_{\mathbf{p},\text{H}} \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \left[u_{\mathbf{p}}^2 f(E_{\mathbf{p},-}) + v_{\mathbf{p}}^2 [1 - f(E_{\mathbf{p},+})] \right], \quad (\text{B.16})$$

を立てることができる。ギャップ方程式 (B.14) および粒子数方程式 (B.15)、(B.16) を $N_{\text{L}} = N_{\text{H}} = N/2$ の条件下で自己無撞着に解くことによって、超流動秩序パラメータ Δ および、化学ポテンシャル $\mu_{\text{L}}, \mu_{\text{H}}$ を決定する。

図 1.18 に示した相図において、実線に示した超流動転移温度 T_{c} は、超流動秩序パラメータ Δ がゼロとなる温度である。また、1.4 節にも述べたが、軽い原子と重い原子の間には、温度効果の効き方に違いがあるため、有限温度において実効的なフェルミ面がずれることになる。その結果、 $\Delta \xi_{\mathbf{p}}$ が大きくなっていき、片方の分散 ($E_{\mathbf{p},-}$) が負になる波数が存在する領域が現れる。そのようなギャップレス励起が現れる領域を、図 1.18 中に“Sarma” と示した。

図 4.21 に示した 1 粒子状態密度は、

$$\rho_{\text{L}}(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} \left[u_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{p},+}) + v_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p},-}) \right], \quad (\text{B.17})$$

$$\rho_{\text{H}}(\omega) = \sum_{\mathbf{p}} \left[u_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{p},-}) + v_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p},+}) \right], \quad (\text{B.18})$$

で与えられる。

付録 C

強結合極限

ここでは、強結合極限が理想分子ボース気体で記述されることを示し、その過程で式 (2.29)、(2.32)、(3.3)、(3.4) を導出する。以下では、一般の質量比 m_L/m_H について考える。相互作用が強いとき $\mu_\sigma (< 0)$ の絶対値は分子ボソンの束縛エネルギー $E_{\text{bind}} = 1/(ma_s^2)$ 程度となるため、強結合極限では $|\mu_\sigma| \gg T$ が満たされる。

まず、非自己無撞着 T 行列近似の強結合極限を導出する。そのための準備として、強結合極限では対形成揺らぎを表すヴァーテックス関数 $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ (式 (2.10)) が

$$\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) = \frac{-U}{1 - U\Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n)} = \frac{1}{\frac{m}{4\pi a_s} + \Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n) - \sum_{\mathbf{p}}^{k_c} \frac{m}{p^2}} \quad (\text{C.1})$$

$$\simeq -\frac{8\pi}{m^2 a_s} \frac{1}{i\nu_n - \frac{q^2}{2M} + \mu_B}, \quad (\text{C.2})$$

のように、軽い原子と重い原子とで構成される質量 $M = m_L + m_H$ を持つ分子ボソンの 1 粒子温度グリーン関数となることを示す (この表式 (C.2) は、 $m_L = m_H$ で式 (2.29) に帰着する)。

フェルミ分布関数 $f(\varepsilon) = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1}$ は $\varepsilon \gg T$ において $f(\varepsilon) \simeq 0$ となるため、化学ポテンシャルが $|\mu_\sigma| \gg T(\mu_\sigma < 0)$ を満たす強結合領域では 2 体相関関数 (式 (2.11)) が

$$\begin{aligned} \Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n) &\simeq -\sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{i\nu_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, L} - \xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, H}} \\ &= \frac{m}{2\pi^2} k_c - \frac{m}{8\pi} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{I_1(\theta)}{I_2(\theta)}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

と計算される。ただし、

$$I_1(\theta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{m_L - m_H}{m_L + m_H} \right)^2 q^2 \cos^2 \theta + \frac{q^2}{4} - 2m(\mu_L + \mu_H) - 2m \frac{i\nu_n}{2}, \quad (\text{C.4})$$

$$I_2(\theta) = \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\frac{m_L - m_H}{m_L + m_H} \right)^2 q^2 \cos^2 \theta + \frac{q^2}{4} - 2m(\mu_L + \mu_H) - 2m \frac{i\nu_n}{2}}. \quad (\text{C.5})$$

式 (C.3) の 2 項目の被積分関数を q および $i\nu_n$ について展開すると、

$$\begin{aligned}\Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n) &\simeq \frac{m}{2\pi^2} k_c - \frac{m\sqrt{mE_{\text{bind}}}}{8\pi} \\ &\times \int_{-1}^1 d\cos\theta \left[1 + \frac{1}{2E_{\text{bind}}} \left[\frac{q^2}{4m} \left[1 - 3\left(\frac{m_L - m_H}{m_L + m_H}\right)^2 \cos^2\theta \right] - \mu_B - i\nu_n \right] \right] \\ &= \frac{m}{2\pi^2} k_c - \frac{m\sqrt{mE_{\text{bind}}}}{4\pi} \left[1 + \frac{1}{2E_{\text{bind}}} \left[\frac{q^2}{2(m_L + m_H)} - \mu_B - i\nu_n \right] \right]. \quad (\text{C.6})\end{aligned}$$

これを式 (C.1) に代入することで、式 (C.2) (および、バランス系 $m_L = m_H$ での表式 (2.29)) が示される。超流動転移温度 $T = T_c$ ではサウレスの判定条件 (2.13) を満たすので $\mu_B = 0$ となり、式 (3.4) が導かれる。

さらに、式 (C.2) を用い、全フェルミ原子数 N が分子ボソンの数の 2 倍となり原子気体が理想分子ボソンで表されることを示す。 σ 成分のフェルミ原子数 N_σ は、自由フェルミ粒子の項 N_σ^0 と対形成揺らぎに由来する項 N_σ^{fluc} に、以下のように分離できる [108, 109] :

$$N_\sigma = N_\sigma^0 + N_\sigma^{\text{fluc}}, \quad (\text{C.7})$$

$$N_\sigma^0 = \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{i\omega_n \delta} = \sum_{\mathbf{p}} f(\xi_{\mathbf{p}, \sigma}), \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned}N_\sigma^{\text{fluc}} &= \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} [G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) - G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n)] e^{i\omega_n \delta} \\ &= T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n \delta} \\ &\times T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}^0(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n) G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) e^{(i\omega_n - i\nu_n)\delta}. \quad (\text{C.9})\end{aligned}$$

自由フェルミ粒子数 N_σ^0 は $f(\xi_{\mathbf{p}, \sigma}) \simeq 0$ と近似できるため無視できる。そのため、 N_σ は対形成揺らぎ由来の項 N_σ^{fluc} のみで与えられることになる。 N_σ^{fluc} について 2.2 節で議論したのと同様の静的近似を行うと、 $n_B(\varepsilon) = [e^{\varepsilon/T} - 1]^{-1}$ をボース分布関数として、

$$\begin{aligned}N_\sigma^{\text{fluc}} &\simeq \left[T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n \delta} \right] \left[T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}^0(-\mathbf{p}, -i\omega_n) G_\sigma^0(\mathbf{p}, i\omega_n) G_\sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) \right] \\ &= -\frac{8\pi}{m^2 a_s} \sum_{\mathbf{q}} n_B\left(\frac{q^2}{2M} - \mu_B\right) T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &\times A_{-\sigma}^0(-\mathbf{p}, \omega_1) A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega_2) A_\sigma(\mathbf{p}, \omega_3) \frac{1}{-i\omega_n - \omega_1} \frac{1}{i\omega_n - \omega_2} \frac{1}{i\omega_n - \omega_3} \\ &= \frac{8\pi}{m^2 a_s} \sum_{\mathbf{q}} n_B\left(\frac{q^2}{2M} - \mu_B\right) \sum_{\mathbf{p}} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &\times A_{-\sigma}^0(-\mathbf{p}, \omega_1) A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega_2) A_\sigma(\mathbf{p}, \omega_3) \left[\frac{1 - f(\omega_1)}{(-\omega_1 - \omega_2)(-\omega_1 - \omega_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(\omega_2)}{(\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} + \frac{f(\omega_3)}{(\omega_3 + \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} \right]. \quad (\text{C.10})\end{aligned}$$

ただし、 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega) = -\text{Im}G_\sigma(\mathbf{p}, \omega_n \rightarrow \omega + i\delta)/\pi$ は 1 粒子スペクトル強度、 $A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega) = -\text{Im}G_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega_n \rightarrow \omega + i\delta)/\pi = \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p},\sigma})$ は自由粒子の 1 粒子スペクトル強度である。式 (C.10) の最後の行における $f(\omega_1)$ および $f(\omega_2)$ は、被積分関数に含まれる $A_{-\sigma}^0(-\mathbf{p}, \omega_1)$ および $A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega_2)$ のため $\omega_1 = \xi_{-\mathbf{p},-\sigma}, \omega_2 = \xi_{\mathbf{p},\sigma}$ のみが積分に寄与することに注意すると、 $f(\xi_{-\mathbf{p},-\sigma}) \simeq f(\xi_{\mathbf{p},\sigma}) \simeq 0$ と近似できることが分かる。

さらに、以下の議論から、 $f(\omega_3)$ も無視できることが分かる。1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ を、2.2 節で議論した静的近似の範囲で評価すると、

$$A_L(\mathbf{p}, \omega) \simeq u_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{p},+}^{\text{pg}}) + v_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p},-}^{\text{pg}}), \quad (\text{C.11})$$

$$A_H(\mathbf{p}, \omega) \simeq u_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{p},-}^{\text{pg}}) + v_{\mathbf{p}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{p},+}^{\text{pg}}). \quad (\text{C.12})$$

ここで、 $\xi_{\mathbf{p}} = [\xi_{\mathbf{p},L} + \xi_{\mathbf{p},H}]/2$, $\Delta\xi_{\mathbf{p}} = [\xi_{\mathbf{p},L} - \xi_{\mathbf{p},H}]/2$, $E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\text{pg}}^2}$ と置いたとき、準粒子分散は

$$E_{\mathbf{p},\pm}^{\text{pg}} = \pm\Delta\xi_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}}, \quad (\text{C.13})$$

与えられる ($u_{\mathbf{p}}^2 = [1 + (\xi_{\mathbf{p}}/E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}})]/2$, $v_{\mathbf{p}}^2 = [1 - (\xi_{\mathbf{p}}/E_{\mathbf{p}}^{\text{pg}})]/2$)。これは、付録 B で議論した平均場理論の分散関係 (B.5) における超流動秩序パラメータ Δ を形式的に擬ギャップパラメータ Δ_{pg} に置き換えた形となっている。強結合極限では $\Delta_{\text{pg}} \ll |\mu_\sigma|$ を満たすため、

$$u_{\mathbf{p}}^2 \simeq 1, \quad (\text{C.14})$$

$$v_{\mathbf{p}}^2 \simeq 0, \quad (\text{C.15})$$

などを用いることで、式 (C.12) をさらに

$$A_\sigma(\mathbf{p}, \omega) \simeq \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p},\sigma}) = A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega), \quad (\text{C.16})$$

と近似できる。その結果、式 (C.10) の最後の行にある $f(\omega_3)$ も $f(\omega_1), f(\omega_2)$ と同様、無視することができる。

結局、 σ 成分のフェルミ原子数は、

$$\begin{aligned} N_\sigma &\simeq N_\sigma^{\text{fluc}} \simeq \frac{8\pi}{m^2 a_s} \sum_{\mathbf{q}} n_{\text{B}} \left(\frac{q^2}{2M} - \mu_{\text{B}} \right) \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{(-\xi_{\mathbf{p},L} - \xi_{\mathbf{p},H})^2} \\ &\simeq \sum_{\mathbf{q}} n_{\text{B}} \left(\frac{q^2}{2M} - \mu_{\text{B}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

となり、式 (2.32) が導出される。このように非自己無撞着 T 行列近似の強結合極限では、フェルミ原子気体が $N/2 (= N_L = N_H)$ 個の理想分子ボソンで記述されることが示される。超流動転移温度では $\mu_{\text{B}} = 0$ であり、その条件下で式 (C.17) を温度 T について解くことにより、ボース・アインシュタイン凝縮温度 T_c^{BEC} (式 (3.3)) が導出される。

この結果は、第3章で議論した、拡張 T 行列近似や自己無撞着 T 行列近似を用いた場合でも変更を受けない。ここでは、自己無撞着 T 行列近似の強結合極限が、非自己無撞着 T 行列近似と同じ結果を与えることを示す (拡張 T 行列近似の場合もここで行う議論とほぼ同じであるため、割愛する)。

非自己無撞着 T 行列近似のときと同様に、 σ 成分のフェルミ原子数を式 (C.7) のように自由粒子の項と対形成揺らぎに由来する項に分けると、自己無撞着 T 行列近似における対形成揺らぎに由来する項は

$$N_{\sigma}^{\text{fluc}} = T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, i\nu_n - i\omega_n) [G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n)]^2, \quad (\text{C.18})$$

で与えられることになる。自由粒子からの寄与は無視できるため、式 (C.18) が σ 成分のフェルミ原子数 N_{σ} となる。これに対し静的近似を行うと、

$$\begin{aligned} N_{\sigma}^{\text{fluc}} &\simeq \left[T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n \delta} \right] \left[T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} G_{-\sigma}(-\mathbf{p}, -i\omega_n) G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) G_{\sigma}(\mathbf{p}, i\omega_n) \right] \\ &= \left[T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n \delta} \right] T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &\quad \times A_{-\sigma}(-\mathbf{p}, \omega_1) A_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_2) A_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_3) \frac{1}{-i\omega_n - \omega_1} \frac{1}{i\omega_n - \omega_2} \frac{1}{i\omega_n - \omega_3} \\ &= - \left[T \sum_{\mathbf{q}, \nu_n} \Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) e^{i\nu_n \delta} \right] \sum_{\mathbf{p}} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &\quad \times A_{-\sigma}(-\mathbf{p}, \omega_1) A_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_2) A_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega_3) \left[\frac{1 - f(\omega_1)}{(-\omega_1 - \omega_2)(-\omega_1 - \omega_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(\omega_2)}{(\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} + \frac{f(\omega_3)}{(\omega_3 + \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} \right]. \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

非自己無撞着 T 行列近似の表式 (C.10) との違いは、 ω_1, ω_2 に関する1粒子スペクトル強度が相互作用の繰り込まれたものに置き換えられた点と、ヴァーテックス関数が式 (2.10) で与えられる $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ から、式 (3.6) で与えられる $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n)$ に置き換えられた点である。

前者については、4.2節で議論したように、自己無撞着 T 行列近似の下で静的近似した1粒子遅延グリーン関数を Δ_{pg} で展開すると、非自己無撞着 T 行列近似の静的近似したそれと一致する。 $|\mu_{\sigma}| \gg T (\mu_{\sigma} < 0)$ の条件下ではこの展開が正当化されるため、非自己無撞着 T 行列近似のときと同様に $A_{\sigma}(\mathbf{p}, \omega)$ を自由粒子のもの $A_{\sigma}^0(\mathbf{p}, \omega)$ に置き換えることができることが分かる。

また、後者についても、以下の議論から、強結合極限のヴァーテックス関数 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n)$ が $\Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ と同一視できることを示すことができる。式 (3.7) で与えられる2体相関関

数をスペクトル表示すると、

$$\begin{aligned}
 \Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) &= T \sum_{\mathbf{p}, \omega_n} \int d\omega_1 d\omega_2 \\
 &\times A_L(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \omega_1) A_H(-\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \omega_2) \frac{1}{i\nu_n + i\omega_n - \omega_1} \frac{1}{-i\omega_n - \omega_2} \\
 &= - \sum_{\mathbf{p}} \int d\omega_1 d\omega_2 A_L(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \omega_1) A_H(-\mathbf{p} + \mathbf{q}/2, \omega_2) \frac{1 - f(\omega_1) - f(\omega_2)}{i\nu_n - \omega_1 - \omega_2}.
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

ここでも 1 粒子スペクトル強度 $A_\sigma(\mathbf{p}, \omega)$ を $A_\sigma^0(\mathbf{p}, \omega) = \delta(\omega - \xi_{\mathbf{p}, \sigma})$ に置き換えることが正当化されるため、 $f(\omega_1) \simeq f(\omega_2) \simeq 0$ より、

$$\Pi(\mathbf{q}, i\nu_n) \simeq - \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{i\nu_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, L} - \xi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, H}} \simeq \Pi^0(\mathbf{q}, i\nu_n). \tag{C.21}$$

このため、式 (3.6) および式 (2.10) から、 $\Gamma(\mathbf{q}, i\nu_n) \simeq \Gamma^0(\mathbf{q}, i\nu_n)$ と近似される。

これらの結果から、自己無撞着 T 行列近似の N_σ^{fluc} (式 (C.19)) と非自己無撞着 T 行列近似の N_σ^{fluc} (式 (C.9)) が強結合極限で一致することが分かる。最終結果である式 (C.17) から明らかのように強結合極限では、系は $N_L = N_H = N/2$ 個の理想分子ボース気体として記述される。

参考文献

- [1] M. Taglieber, A.-C. Voigt, T. Aoki, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, Phys. Rev. Lett. **100**, 010401 (2008).
- [2] E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner, D. Naik, A. Trenkwalder, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, S. J. J. M. F. Kokkelmans, E. Tiesinga, and P. S. Julienne, Phys. Rev. Lett. **100**, 053201 (2008).
- [3] L. Costa, J. Brachmann, A.-C. Voigt, C. Hahn, M. Taglieber, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, Phys. Rev. Lett. **105**, 123201 (2010).
- [4] T. G. Tiecke, M. R. Goosen, A. Ludewig, S. D. Gensemer, S. Kraft, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **104**, 053202 (2010).
- [5] D. Naik, A. Trenkwalder, C. Kohstall, F. M. Spiegelhalder, M. Zaccanti, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. M. Hanna, and P. S. Julienne, Eur. Phys. J. D **65**, 55 (2011).
- [6] F. M. Spiegelhalder, A. Trenkwalder, D. Naik, G. Hendl, F. Schreck, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **103**, 223203 (2009).
- [7] F. M. Spiegelhalder, A. Trenkwalder, D. Naik, G. Kerner, E. Wille, G. Hendl, F. Schreck, and R. Grimm, Phys. Rev. A **81**, 043637 (2010).
- [8] A.-C. Voigt, M. Taglieber, L. Costa, T. Aoki, W. Wieser, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, Phys. Rev. Lett. **102**, 020405 (2009).
- [9] A. Trenkwalder, C. Kohstall, M. Zaccanti, D. Naik, A. I. Sidorov, F. Schreck, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **106**, 115304 (2011).
- [10] W. V. Liu and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **90**, 047002 (2003).
- [11] S.-T. Wu and S.-K. Yip, Phys. Rev. A **67**, 053603 (2003).
- [12] M. M. Forbes, E. Gubankova, W. V. Liu, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **94**, 017001 (2005).
- [13] H. Caldas, C. W. Morais, and A. L. Mota, Phys. Rev. D **72**, 045008 (2005).
- [14] L. He, M. Jin, and P. Zhuang, Phys. Rev. B **74**, 024516 (2006).

- [15] S.-T. Wu, C.-H. Pao, and S.-K. Yip, Phys. Rev B **74**, 224504 (2006).
- [16] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. Lett. **97**, 100404 (2006).
- [17] M. Iskin and C. A. R. Sá de Melo, Phys. Rev. A **76**, 013601 (2007).
- [18] M. M. Parish, F. M. Marchetti, A. Lamacraft, and B. D. Simons, Phys. Rev. Lett. **98**, 160402 (2007).
- [19] C.-H. Pao, S.-T. Wu, and S.-K. Yip, Phys. Rev. A **76**, 053621 (2007).
- [20] G. J. Conduit, P. H. Conlon, and B. D. Simons, Phys. Rev. A **77**, 053617 (2008).
- [21] K. B. Gubbels, J. E. Baarsma, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. Lett. **103**, 195301 (2009).
- [22] J. E. Baarsma, K. B. Gubbels, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A **82**, 013624 (2010).
- [23] I. Bausmerth, A. Recati, and S. Stringari, Phys. Rev. A **79**, 043622 (2009).
- [24] D. S. Petrov, G. E. Astrakharchik, D. J. Papoular, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **99**, 130407 (2007).
- [25] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [26] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
- [27] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004).
- [28] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
- [29] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [30] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [31] K. Dieckmann, C. A. Stan, S. Gupta, Z. Hadzibabic, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **89**, 203201 (2002).
- [32] T. Loftus, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **88**, 173201 (2002).
- [33] C. A. Regal and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003).
- [34] M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, and R. Walser, Phys. Rev. Lett. **87**, 120406 (2001).
- [35] E. Timmermans, K. Furuya, P. W. Milonni, A. K. Kerman, Phys. Lett. A **285**, 228 (2001).
- [36] Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002).

-
- [37] H. Stolz, R. Schwartz, F. Kieseling, S. Som, M. Kaupsch, S. Sobkowiak, D. Semkat, N. Naka, T. Koch, and H. Fehske, *New J. Phys.* **14**, 105007 (2012).
 - [38] K. Yoshioka, Y. Morita, K. Fukuoka, and M. Kuwata-Gonokami, *Phys. Rev. B* **88**, 041201(R) (2013).
 - [39] J. M. Blatt, K. W. Böer, and W. Brandt, *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962).
 - [40] L. V. Keldysh and A. N. Kozlov, *Sov. Phys. JETP* **27**, 521 (1968).
 - [41] R. Zimmermann, *Phys. Status Solidi B* **76**, 191 (1976).
 - [42] C. Comte and P. Nozières, *J. Phys. (Paris)* **43**, 1069 (1982).
 - [43] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
 - [44] R. Hanai, P. B. Littlewood, and Y. Ohashi, arXiv: 1506.08983.
 - [45] B. C. Barrois, *Nucl. Phys. B* **129**, 390 (1977).
 - [46] D. Bailin and A. Love, *Phys. Rep.* **107**, 325 (1984).
 - [47] W. Ketterle and M. W. Zwierlein, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CLXIV*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (IOS Press, Amsterdam, 2008).
 - [48] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
 - [49] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Westview Press, Colorado, 1999).
 - [50] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Westview Press, Colorado, 1999).
 - [51] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity: Second Edition* (Dover Publications, New York, 2004).
 - [52] F. Pistolesi and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **49**, 6356 (1994).
 - [53] D. M. Eagles, *Phys. Rev.* **186**, 456 (1969).
 - [54] A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, edited by A. Pekalski and J. Przystawa (Springer Verlag, Berlin, 1980), p. 14.
 - [55] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
 - [56] A. Perali, P. Pieri, G. C. Strinati, and C. Castellani, *Phys. Rev. B* **66**, 024510 (2002).
 - [57] A. Damascelli, Z. Hussain, Z.-X. Shen, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 473 (2003).
 - [58] P. Lee, N. Nagaosa, and X. Wen, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17 (2006).
 - [59] Ø. Fischer, M. Kugler, I. Maggio-Aprile, C. Berthod, and Ch. Renner, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 353 (2007).
 - [60] J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, *Nature* **454**, 744 (2008).
 - [61] J. P. Gaebler, J. T. Stewart, T. E. Drake, D. S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G.

- C. Strinati, Nat. Phys. **6**, 569 (2010).
- [62] Y. Sagi, T. E. Drake, R. Paudel, R. Chapurin, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **114**, 075301 (2015).
- [63] M. Kugler, Ø. Fischer, Ch. Renner, S. Ono, and Y. Ando, Phys. Rev. Lett. **86**, 4911 (2001).
- [64] B. Jankò, J. Maly, and K. Levin, Phys. Rev. B **56**, R11407 (1997).
- [65] Y. Yanase and K. Yamada, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 1659 (2001).
- [66] A. Kanigel, U. Chatterjee, M. Randeria, M. R. Norman, G. Koren, K. Kadowaki, and J. C. Campuzano, Phys. Rev. Lett. **101**, 137002 (2008).
- [67] D. Pines, Z. Phys. B **103**, 129 (1997).
- [68] S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, and C. Nayak, Phys. Rev. B **63**, 094503 (2001).
- [69] Q. Chen and K. Levin, Phys. Rev. Lett. **102**, 190402 (2009).
- [70] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **80**, 033613 (2009).
- [71] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **82**, 033629 (2010).
- [72] S. Tsuchiya, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **84**, 043647 (2011).
- [73] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **82**, 043630 (2010); **85**, 039908(E) (2012).
- [74] H. Hu, X.-J. Liu, P. D. Drummond, and H. Dong, Phys. Rev. Lett. **104**, 240407 (2010).
- [75] F. Palestini, A. Perali, P. Pieri, and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **85**, 024517 (2012).
- [76] 久我隆弘著, 「量子光学」(朝倉書店, 東京, 2009).
- [77] N. F. Mott, Rev. Mod. Phys. **40**, 677 (1968).
- [78] S. Schmitt-Rink, J. Löwenau, and H. Haug, Z. Phys. B **47**, 13 (1982).
- [79] P. Y. Yu and M. Cardona, *Fundamentals of Semiconductors, Physics and Materials Properties*, (Springer, Berlin, 2010).
- [80] H. Ehrenreich, Phys. Rev. **120**, 1951 (1960).
- [81] K. J. Button, D. R. Cohn, M. von Ortenbert, B. Lax, E. Mollwo, and R. Helbig, Phys. Rev. Lett. **28**, 1637 (1972).
- [82] K. Hümmer, Phys. Status Solidi B **56**, 249 (1973).
- [83] T. Schmielau, G. Manzke, D. Tamme, and K. Henneberger, Phys. Status Solidi B **221**, 215 (2000).
- [84] N. H. Kwong, G. Rupper, and R. Binder, Phys. Rev. B **79**, 155205 (2009).
- [85] A. Imamoglu, R. J. Ram, S. Pau, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **53**, 4250

- (1996).
- [86] F. Tassone and Y. Yamamoto, Phys. Rev. B **59**, 10830 (1999).
 - [87] H. Deng, G. Weihs, C. Santori, J. Bloch, and Y. Yamamoto, Science **298**, 199 (2002).
 - [88] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang, Nature **443**, 409 (2006).
 - [89] M. H. Szymańska, J. Keeling, and P. B. Littlewood, Phys. Rev. Lett. **96**, 230602 (2006).
 - [90] M. Yamaguchi, K. Kamide, T. Ogawa, and Y. Yamamoto, New J. Phys. **14**, 065001 (2012).
 - [91] S. Christopoulos, G. B. H. von Högersthal, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butté, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, Phys. Rev. Lett. **98**, 126405 (2007).
 - [92] G. Sarma, J. Phys. Chem. Solids **24**, 1029 (1963).
 - [93] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart, and Winston, Philadelphia, 1976).
 - [94] R. Haussmann, Z. Phys. B **91**, 291 (1993).
 - [95] R. Haussmann, Phys. Rev. B **49**, 12975 (1994).
 - [96] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, and W. Zwerger, Phys. Rev. A **75**, 023610 (2007).
 - [97] T. Enss and R. Haussmann, Phys Rev. Lett. **109**, 195303 (2012).
 - [98] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, (Dover, New York, 1963).
 - [99] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York, 2000).
 - [100] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (Dover Publications, New York, 2003).
 - [101] D. J. Thouless, Ann. Phys. (NY) **10**, 553 (1960).
 - [102] S. A. Morgan, M. D. Lee, and K. Burnett, Phys. Rev. A **65**, 022706 (2002).
 - [103] T. Kashimura, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **86**, 043622 (2012).
 - [104] 清水明, 「熱力学の基礎」, (東京大学出版会, 東京, 2007), 第 14 章.
 - [105] T. Kashimura, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **89**, 013618 (2014).
 - [106] H. Tajima, T. Kashimura, R. Hanai, R. Watanabe, and Y. Ohashi, Phys. Rev. A **89**, 033617 (2014).

- [107] C. Sanner, E. J. Su, A. Keshet, W. Huang, J. Gillen, R. Gommers, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **106**, 010402 (2011).
- [108] M. Matsumoto, D. Inotani, and Y. Ohashi, arXiv: 1507.05149.
- [109] M. Matsumoto, D. Inotani, and Y. Ohashi, arXiv: 1511.00421.