

On the isomorphism classes of
Iwasawa modules

September 2015

Kazuaki Murakami

主 論 文 要 旨

報告番号	甲 乙 第	号	氏 名	村上 和明
主 論 文 題 目： On the isomorphism classes of Iwasawa modules (岩澤加群の同型類について)				
(内容の要旨)				
<p>岩澤理論においては Z_p 拡大に対してそのガロア群が作用する岩澤加群が重要な研究対象である。$\Lambda = Z_p[[T]]$ を Z_p 上一変数形式冪級数環とすると、ガロア群の完備群環は Λ と同型なので岩澤加群は Λ-加群とみなせる。有限生成ねじれ Λ-加群の構造定理により Λ-加群の構造はまず特性イデアルに現れ、有限生成ねじれ Λ-加群全体は有限のずれを無視して擬同型類に類別できる。この論文では「特性イデアルよりも詳しい情報が得られるか」、「構造定理を精密化して同型類までわかるか」という問題を研究する。この問題に関して、隅田・小池によって特性イデアルが2次以下の多項式で生成される場合は同型類が分類されている。また同じ条件下で、栗原によって高次 Fitting イデアルを用いて同型類の分類ができることがわかっている。</p> <p>本研究では特性イデアルの生成元が重根を持たない3次または4次の多項式で生成される場合に同型類の分類を行った。本研究の主結果は二つの加群が同型であるための必要十分条件を与えることである。以下主結果について述べる。3次の場合は、加群を二つの整数と一つの Z_p の元からなる三つ組で表し、それらの組全体に、ある同値関係を与える。4次の場合は、加群を3つの整数と3つの Z_p の元からなる六つ組で表し、それらの組全体に、ある同値関係を与える。このとき主結果は「Λ-加群の同型類全体と上述の組全体の同値類が一対一に対応すること」である。組全体の同値関係は、簡単ないくつかの関係式で表すことができ、これが加群の同型性を判定する必要十分条件となる。その結果、3次以上の場合は2次までのときと本質的に異なる現象が現れることがわかった。また主結果を用いて、特別な条件下で同型類をすべて書き上げた。</p> <p>さらに上記の結果を具体的な岩澤加群にも適用し、その同型類を決定する研究を行った。いくつかの虚二次体の数値例に対し、その円分 Z_p 拡大に付随する岩澤加群の構造を決定した。Mazur と Wiles によって岩澤加群の特性イデアルは p 進 L 関数で生成されることが証明されており、特性イデアルの生成元を求めることは容易である。しかしながら同型類を決定するためにはこれよりも深い情報が必要で、そのため計算例ではガロア群の作用の計算を行い、イデアル類群の高次 Fitting イデアルを用いることにより岩澤加群の同型類を決定した。</p>				

SUMMARY OF Ph.D. DISSERTATION

School Keio University	Student Identification Number	SURNAME, First name Murakami Kazuaki
Title On the isomorphism classes of Iwasawa modules		
Abstract <p>In Iwasawa theory, it is important to study Iwasawa modules on which the Galois group of a \mathbb{Z}_p-extension acts. Let $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ be the ring of formal power series in one variable over the ring of p-adic integers. By the structure theorem of finitely generated Λ-modules, we can classify such modules up to pseudo isomorphism. In this thesis, we study the problems whether one can derive more precise information on a Λ-module than its characteristic ideal and whether one can classify Λ-modules up to isomorphism. On these problems, Sumida and Koike classified Λ-modules whose characteristic ideals are generated by polynomials of degree 2. Under the same assumption, Kurihara classified Λ-modules using higher Fitting ideals.</p> <p>In this thesis, we classify Λ-modules whose characteristic ideals are generated by separable polynomials with degree 3 or 4. Our main theorem gives a necessary and sufficient condition whether two Λ-modules are isomorphic or not. In the case of degree 3, we express a Λ-module using a 3-tuple consisting of two integers and an element of \mathbb{Z}_p, and we give an equivalence relation on the set of such 3-tuples. In the case of degree 4, we express a Λ-module using a 6-tuple, consisting of three integers and three elements of \mathbb{Z}_p, and we give an equivalence relation on the set of such 6-tuples. Our main theorem says that there is one to one correspondence between the set of isomorphism classes of Λ-modules and the set of equivalence classes of the tuples. The equivalence relations on the sets of the tuples are defined by simple relations.</p> <p>We apply our theorem to the Iwasawa modules associated to the cyclotomic \mathbb{Z}_p-extensions of imaginary quadratic fields. In this case, the characteristic ideal is generated by a p-adic L-function which we can calculate easily. However, we need to know more precise information. We determine the isomorphism class, calculating the action of the Galois groups and using the Fitting ideals of ideal class groups for several numerical examples.</p>		