Title	有限次元の世界の「滑らかさ」：フレッシエ微分とガトー微分
Sub Title	"Smoothness" in the world of finite dimension: Fréchet and Gâteaux differentials
Author	尾崎, 裕之(Ozaki, Hiroyuki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2017
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.109, No.4 (2017. 1) ,p.681(127)- 702(148)
JaLC DOI	10.14991/001.20170101-0127
Abstract	
Notes	解説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20170101-0127

「三田学会雑誌」109 巻 4 号（2017 年 1 月）

解　説

有限次元の世界の「滑らかさ」

——フレッシェ微分とガトー微分——

尾崎裕之*

[Linear] Space: the final frontier . . . where no one has gone before.

Star Trek: The Next Generation

1.　はじめに

本稿は『三田学会雑誌』108 巻 1 号（2015 年 4 月，以下，「解説 108–1」と記す）「解説：行列の固有値と経済動学」の続編である。少なくとも，そのつもりで筆者は書いた。

数学を学習する順番としては，まず線形代数から始めるのが標準的である。線形代数とは，「線形性」という「特殊な」構造を持った世界を分析するための数学装置であるが，何故これから始めるのか。ここで，線形性とは，線形空間から線形空間への線形関数のことを言っている（関数の線形性については，2.5 節を参照）。ひとつには，線形性を仮定すると話が非常に簡単，かつ，綺麗になることがある。しかし，これよりも重要なのは，多くの関数は，もしそれが或るところで「滑らか」であるならば，その部分を拡大して見てみると線形性に非常に近い性質を持っていることであろう。したがって，少なくとも局所的には，線形代数の手法はすべて使えるので，この手法を用いて関数を分析することができる。

では，関数が「滑らか」であるとは，一体どのようなことであろうか。我々の住む 4 次元の世界（「空間」+「時間」）を例に取って考えてみよう。西暦何年何月何日何時何分何秒に慶應義塾大学三田キャンパス研究室棟 5 階の尾崎研究室の室内で尾崎がぼんやりと考えていることを，時間＋空間に，

＊　慶應義塾大学経済学部

その時その場所での尾崎の気分を対応させる「関数」と見做す。ほんの数分前，研究室のソファーでくつろぎながら，尾崎の気分は「半ば高揚し，半ば憂鬱であった」。それは，ひとつには，この「解説」の大体を書き終え，その内容の完成度に大変満足していたからであり，ひとつには，来るべき12 月 23 日から始まる 3 連休に何の予定も入っていないという寂寥感を覚えていたからである。この気分は，研究室の PC に向かってこの原稿をタイプしているたった今も，あまり変わっていない。筆者はそれ程には気分屋ではないと自覚しているので，突然にテンションが上がったり，下がったりすることはなく，こんな具合は珍しくない。すると，尾崎の気分関数は「連続である」，と言ってもよさそうである。空間座標と時間軸で非常に近接している 2 点では，気分は非常に似たものになる。急に気分が高揚したり，あるいは，急に気分が落ち込んだりする場合には，逆に，気分関数は「連続ではない」と言って良さそうだ。

では，このように気分が「連続的に」変化するときに，気分関数は「滑らかである」と言ってしまっても良いだろうか。ソファーでくつろいでいるときには，仮に気分が変化するとしても，それは「まったりと」変化していくように感じる。ところが，PC に向かっているときには必ずしもそうではない。というのは，突然，X さんからのメールを受信し，読んでしまう可能性があるからである。このことによって，気分が急激に変化することはないとしても，憂鬱が「加速する」ことは十分あり得る。「ソファーではまったり，しかし，デスクでは，何かをきっかけに憂鬱が加速する」といった状況を「滑らかではない」と記述しても，4 次元空間全体での尾崎の気分を考えている今の文脈では，それ程不自然ではないだろう。

数学で，我々の世界のこの「滑らかさ」を，まったく曖昧なところなく，厳密に定義するとどうなるか。この試みの 1 つが，「フレッシェ微分可能性」，あるいは，単に，「微分可能性」と呼ばれる関数の値の変化についての定義である(1)。本稿では，関数が「滑らかであること」を，それが「フレッシェ微分可能であること」と理解し，フレッシェ微分についての解説を行う。

「フレッシェ微分」，及び，それと密接に関係する「ガトー微分」は，本来，「無限」次元線形空間における滑らかさを定義し，分析するための用語であるが，本稿では，敢えてその用語を「有限」次元線形空間で用いる。これは，本稿の主目的が，経済学で相当に混乱して用いられている「微分」という単語の意味を明確にすることにあるからである。本稿には，新しい結果は一切含まれない。少しでもここに意義があるとすれば，それは，「フレッシェ微分可能性」で（有限次元であれ，無限次元であれ）関数の滑らかさの概念を統一して記述することにより，「微分可能性」が関数の滑らかさ「そ

---

(1)　ここで，数学における「転倒」現象が起こる。「フレッシェ微分可能性」が上で述べた我々の直観をどれだけ忠実に反映しているのかという問題とはまったく別に，一旦，「滑らかであること」を「フレッシェ微分可能であること」と定義してしまえば，フレッシェ微分可能であるならば，どれだけ不自然であろうとも，それは滑らかである。この「転倒」は，人文社会科学系の学問ではよく観察されることであるが，ここではこれ以上は立ち入らない。

のもの」を表し，「微分」（「微分可能性」ではない）で，滑らかな関数の「線型関数での近似」を，すなわち，「微分」が関数である点を明確にしていることだろう(2)。このことを知らない人は多いので，自画自賛で大変恐縮ではあるが，本稿にも多少は意味があると思う。

なお，定理 7 の証明を除いてすべての証明は，「解説 108–1」を読みさえすれば（他の文献を参照しなくても）追えるように書いた（つもりである）。証明も飛ばさずに読んでいただければ嬉しい。

2. 関数の連続性

本稿では，もっぱら，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数を考える。ここで，m と n は任意の自然数である。また，本稿では，有限次元のみを考察の対象とするが，ここで「次元」と言うのは，「線形空間としての次元」を指している(3)（線形空間の次元については「解説 108–1」に詳しいので，ここでは繰り返さない）。したがって，登場するベクトルはすべて有限次元のものであり，以下では「有限」といちいち断らない。また，ベクトルは，基本的に列ベクトル表記とする(4)。

以下では，例えば $\boldsymbol{x}$ のように，ベクトルは太字体で表す。これに倣い，本稿の関数は「ベクトル値」（値として，ベクトルをとる）なので，関数の値は，例えば $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のように，これも太字体で表す。ただし，実数値関数（すなわち，$m = 1$ のとき）については $f(\boldsymbol{x})$ と書くことにする。

2.1 ノルムの定義と諸性質

列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき，$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2}$ で定義される実数を，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の「ノルム」と言い，$\|\boldsymbol{x}\|$ で表す。つまり，ベクトルのノルムは，自分自身との内積の正の平方根として定義される(5)。ここで，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ は非負であるから，ノルムは常に非負の実数となる。ベクトルのノルムとは，実は，そのベクトルを座標軸上の点で表現したときの，原点からその点までの “距離” に他ならない（直観的には，平面上のベクトルとピタゴラスの定理を考えればよい）。これらのことから，$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である。また，c を任意の実数としたとき，$\|c\boldsymbol{x}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ となることも，ノルムの定義から直ぐに分かる。ただし，ここで，$c\boldsymbol{x}$ はベクトルのスカラー倍を，$|c|$ は c の絶対値を表す。

ノルムは，数学で「距離」と呼ばれる概念の 1 つの例になっているが，このことについて重要なのは次の不等式である。

(2)　ここで「関数」と言っているのは，いわゆる「導関数」のことでは決してない。
(3)　「次元」の概念はこの他にもあり，例えば，「フラクタル次元」などがよく知られている。
(4)　ベクトルや行列の概念については，「解説 108–1」を参照すること。
(5)　行列（ベクトル）の転置（$'$）や，ベクトルの内積については，「解説 108–1」を参照。

定理 1（ミンコフスキーの不等式）.　次が成立する：

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n) \quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

この定理を証明するために補題を用意する。

補題 1（シュワルツの不等式）.　転置記号を $(')$ とするとき，次が成立する：

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n) \quad \left|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\right| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|.$$

証明.　仮に，$\boldsymbol{x}$ か $\boldsymbol{y}$ のどちらか一方でもゼロ・ベクトルであったとすると，不等式は明らかに成立する。したがって，以下では，どちらもゼロ・ベクトルではないと仮定して証明を行う。今，実数 a, b が勝手に与えられたものとして，新しいベクトル $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{w} := a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}$ によって定義する（本稿では，記号「:=」を，「左辺を右辺で定義する」の意で用いている）。この小節の冒頭で述べたことから，$\|\boldsymbol{w}\| = (\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w})^{1/2} \geq 0$ である。故に，

$$\begin{aligned}
0 \leq \boldsymbol{w}'\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{w}'(a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}) \\
&= a\boldsymbol{w}'\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{w}'\boldsymbol{y} \\
&= a\left(a\boldsymbol{x}' - b\boldsymbol{y}'\right)\boldsymbol{x} - b\left(a\boldsymbol{x}' - b\boldsymbol{y}'\right)\boldsymbol{y} \\
&= a^2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} - ab\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} - ab\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} + b^2\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} \\
&= a^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2ab\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} + b^2\|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}$$

である。ここでは，ベクトルの積や転置の公式を多用しているが，これらについては，すべて「解説 108–1」にある。参照して欲しい。これより，

$$2ab\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \leq a^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + b^2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

が従う。実数 a, b は何でもよかったので，$a := \|\boldsymbol{y}\|$，$b := \|\boldsymbol{x}\|$ とおくと，この不等式より次を得る：

$$2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{y}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は，どちらもゼロ・ベクトルではないと仮定したので，この小節の第 1 段落で述べたことから，$\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ かつ $\|\boldsymbol{y}\| \neq 0$ である。よって，上式の両辺を $2\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ で割ることができて，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ を得る。さらに，この式の $\boldsymbol{x}$ は（ゼロ・ベクトルでない限り）何でもよかったので，ここに $-\boldsymbol{x}$ を代入すると，$-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \leq \|-\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| = |-1| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ となり，結果が従う。 □

ミンコフスキーの不等式の証明. 補題1（シュワルツの不等式）を用いると，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2+2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2\left|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\right|+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

を得る（シュワルツの不等式を，2番目の不等式を導くために使った）。両辺の正の平方根を取ると，それが証明したい不等式であったので，証明が完了した。 □

2.2 ノルム空間と開集合

これ迄に述べてきたノルムの性質，すなわち，ノルムは非負の実数で，それがゼロとなるのはゼロ・ベクトルについてだけであること，及び，ノルムがミンコフスキーの不等式を満たすことは，ノルムの性質の基本的なものである。逆に，$\mathbb{R}^n$ よりも抽象的な（一般的な）線型空間で，これらの性質を満たす実数値関数をその空間上で定義できるようなものを「ノルム空間」と呼び，その関数を「ノルム」と呼ぶ。この意味で，$\mathbb{R}^n$ は $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2}$ をノルムとするノルム空間である[(6)]。

ノルム空間では，ノルムを用いて，「開集合」と呼ばれる特別な部分集合を定義することができる。開集合は，ノルム空間全般に定義できる概念であるが，以下では，$\mathbb{R}^n$ 上のそれに限定して話をする。また，n 次元ベクトルのことを単に「点」と呼ぶことにする。点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n$ と，正の実数 $\varepsilon>0$ とが与えられたとき，

$$B(\boldsymbol{p},\varepsilon):=\{\,\boldsymbol{x}\ \in\mathbb{R}^n\mid\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{x}\|<\varepsilon\,\}$$

で定義される集合を，$\boldsymbol{p}$ を中心とする「ε-開球」と呼ぶ。ノルムは距離を測っているので，直観的には，ε-開球は，$n=2$ の場合には，$\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 ε の「円」の（円周を含まない）内側の部

(6)　ノルム空間のうち，ノルムを用いて「距離」と呼ばれる関数を定義したときに，距離が「完備性」という条件を満たすようなノルム空間を特に「バナッハ空間」と呼ぶ。空間 $\mathbb{R}^n$ がバナッハ空間であることは，比較的簡単に証明できるが，ここではしない。バナッハ空間は便利な性質を多く持っていて，経済学でもよく使われる空間の1つである。

もっと言うと，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$ の “$'$” を一般化したものを「内積」と呼び，内積が定義できる空間を「前ヒルベルト空間」と呼ぶ。内積を用いると，$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{1/2}$ と似たような仕方で常にノルムが定義できるため，前ヒルベルト空間はノルム空間である。こうして定義されたノルム空間がバナッハ空間になるときに，前ヒルベルト空間を「ヒルベルト空間」と呼ぶ。ヒルベルト空間は非常に一般的な空間であるが，直観的に言うと，それは「非常に一般的な空間ではあるものの，あたかも有限次元線形空間（つまり，$\mathbb{R}^n$）と同じように扱うことができる空間」と言ってよい。

分を，$n=3$ の場合には，$\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 ε の「球」の（表面を含まない）内側の部分をそれぞれ表していると考えてよい。次元が 3 を超えるときにも，それは，円や球の一般化と考えられる。

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，ε-開球を使って次の集合を定義する：

$$\mathrm{int}\ X := \{\, \boldsymbol{x}\ \in \mathbb{R}^n \,|\, (\exists \varepsilon > 0)\ \ B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq X \,\}\,.$$

ここで定義された int X を集合 X の「内部」と言い，「開集合」とは，int $X = X$ であるような集合と定義される。開集合と内部の定義から，集合 X が開集合であることと次の条件が同値であることが直ぐに分かる：

$$(\forall \boldsymbol{x} \in X)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq X\,.$$

集合 N と点 $\boldsymbol{x}$ について，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}\ N$ となっているときに，N を $\boldsymbol{x}$ の「近傍」と言う。点 $\boldsymbol{x}$ のどのような（小さな）近傍を考えても，その中に集合 X の要素が無限個含まれるときに，$\boldsymbol{x}$ を X の「集積点」と呼ぶ。

2.3　関数値の極限

2 つの集合 X，Y で，$X \subseteq \mathbb{R}^n$，$Y \subseteq \mathbb{R}^m$ となるものについて，X から Y への関数 $\boldsymbol{f} : X \to Y$ が存在したとする。このとき，X を $\boldsymbol{f}$ の「定義域（domain）」，Y を $\boldsymbol{f}$ の “co-domain”（和訳不明）と言う。関数 $\boldsymbol{f} : X \to Y$ と集合 X の集積点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，次の条件を満たす点 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$ が仮に存在したとする：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \ [\, \boldsymbol{x} \in X\ \ and\ \ 0 < \|\, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \,\| < \delta \ \ \Rightarrow\ \ \|\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L} \,\| < \varepsilon \,] \tag{1}$$

この条件式（1）で，前件のノルムは $\mathbb{R}^n$ のノルムで，後件のそれは $\mathbb{R}^m$ のノルムである。ここで，前件にある「ノルムが正である」という条件は重要で，ノルムの性質から，これは $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ を要請していることに注意が必要である。また，このことから，点 $\boldsymbol{x}_0$ は定義域の集積点でありさえすればよく，それ自身が定義域に含まれている必要はないことも分かる。

また，集積点ではない定義域上の点（「孤立点」(7)と呼ばれる）を考えると，十分小さな δ について，定義式（1）の前件を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在しなくなるので，定義式（1）そのものは，どのようなベクトル $\boldsymbol{L}$ を考えても成立してしまう。この状況を排除したいので，孤立点を極限の定義から除いておく。

集積点 $\boldsymbol{x}_0$ について，条件式（1）を満たすような点 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$ が存在したときに，それを関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「極限」と呼び，$\boldsymbol{L} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と書く。ノルムの性質から，極限が存在するときには，それは一意に定まることも直ぐに分かる。

この定義に見られるような，「どのような（気分としては，どのように小さな）ε に対しても，或る（気分としては，非常に小さな）δ が存在して ......」で始まる定義を，「 ε-δ の方法」による定義と

---

(7)　「孤立点」とは，例えば，$X = [0, 1] \cup \{2\}$ であったときの $\{2\}$ である。

言うが，これは，「無限に近づく」という状況を数学的に厳密に記述する際に用いられる典型的な方法である。

それでは以下で，関数の極限についての幾つかの例を見てみよう。

例 1.　$m = n = 1$ とし，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次によって定義する：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \neq 1 \\ 100 & \text{if} \quad x = 1 \end{cases}$$

このとき，$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ であり，100 ではないことは明らかであろう。 □

例 2.　$m = n = 1$ とし，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次によって定義する：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \text{ は有理数} \\ 1 & \text{if} \quad x \text{ は無理数} \end{cases}$$

このとき，$\lim_{x \to 1} f(x)$ は存在しない。これは，$f(1) = 0$ であるが，1 のどんな近くを見ても，必ず無理数が紛れ込んでいる（無理数，および，有理数の「稠密性」と呼ばれる性質）ためである。 □

例 3.　$m = 1$，$n = 2$ とし，関数 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ を次によって定義する[(8)]：

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

このとき，$\lim_{(x,y)' \to (0,0)'} f(x, y) = 0$ である。$(0, 0)'$ は関数の定義域には含まれないが，その集積点になっている。したがって，極限は定義可能であることを注意しておく。それでは，極限がこうなることを確認してみよう。実際，

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

であることと，最後の式がベクトル $(x, y)'$ のノルムであることに注意すると，極限の定義からこのことが直ちに従う。 □

例 4.　$m = 1$，$n = 2$ とし，関数 $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ を次によって定義する：

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

（8）　記号 “$\backslash$” は「集合の差」を意味し，よって，$\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ は，平面から原点を除いた全部の点を表す。

例 3 と同様に，原点は定義域の集積点なので，関数値の原点における極限を考えることはできるが，実は，$\lim_{(x,y)'\to(0,0)'} f(x,y)$ は存在しない。ベクトル $(x,y)'$ が $(x,x)'$ という形をしていると想定してみよう。すると，x を小さくすることによって，このベクトルのノルムをいくらでもゼロに近づけることができる。ところがその一方で，このとき，$xy\,/\big(x^2+y^2\big)=1/2$ であるので，$\varepsilon<1/2$ とすれば，条件式（1）が満たされることはない。これで主張が示せた。 □

2.4　関数の連続性

前小節同様に，$X\subseteq\mathbb{R}^n$，$Y\subseteq\mathbb{R}^m$ としたとき，関数 $\boldsymbol{f}:X\to Y$ と点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ について，$\boldsymbol{f}$ が「点 $\boldsymbol{x}_0$ で連続」であるというのは，次の条件が成立するときを言う：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \ [\,\boldsymbol{x}\in X\ \ and\ \ \|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\,\|<\delta\ \ \Rightarrow\ \ \|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,\|<\varepsilon\,] \tag{2}$$

条件式（2）は，極限のそれと非常に似ているが，$\boldsymbol{x}_0$ は定義域上の点でなければならない，つまり，連続性は定義域上の点についてのみ定義される概念である。また，関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ でそもそも極限を持たないのであるならば，$\boldsymbol{x}$ はその点では連続ではあり得ないことも，この定義から直ぐに分かる。

例 1 の関数が $x=1$ で連続でないことは定義から，例 2 の関数が $x=1$ で（実は，どの点を考えても，そこで）連続でないことは，直ぐ上で述べたことから分かる。

定義域 X 上の「すべて」の点で関数 $\boldsymbol{f}$ が連続であるときに，関数 $\boldsymbol{f}$ は「連続」であると言う。

連続性や，後段登場する微分可能性は，関数の「局所的」な性質で,「ある点」で成立するかしないかを問うものである。また，定義域上のすべての点でこれらの性質が成立するときに，単に，関数は連続である，などと言う。このような断り書きをいちいち付けるのは面倒なので，以下，大域的な定義（定義域全域で成立する場合の言葉の定義）は，一切これを省略する。

例 5.　例 3 を少し修正して，$\mathbb{R}^2$ 上の関数を次のように定義する：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & if\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & if\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

すると，関数 f は点 $(0,0)'$ で明らかに連続となる。 □

次の定理は，2 つの条件式（1）と（2）から直ぐに従う。

定理 2.　関数 $\boldsymbol{f}:X\to Y$ と点 $\boldsymbol{x}_0\in X$ が与えられ，$\boldsymbol{x}_0$ は X の集積点であるとする。このとき，$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{x}_0$ で連続であることと，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})$ が存在し，かつ，それが $f(\boldsymbol{x}_0)$ と等しくなることとは同値である。

2.5　線型関数とその連続性

集合 C をスカラー体（例えば，実数の集合。以下では，「スカラー」と言えば実数を表していると考えて差し支えない。詳しくは，「解説 108–1」を参照）とする。このとき，関数 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が「線形関数」であるということを，次で定義する：

$$(\forall a,b\in C)(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n)\quad \boldsymbol{f}(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+b\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}).$$

言うまでもなく，等号はベクトルの意味での等号である。線形関数が定義できるためには，定義域と co-domain が線形空間であることが必要なことが分かる。

任意の $m\times n$ 行列 A が与えられたとき，関数 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ によって定義すると，これが線形関数になることは，行列の積の定義などから直ぐに分かる。この逆も正しい。つまり，任意の線形関数 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は，ある $m\times n$ 行列 A を用いて，必ず，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と書ける。このことを証明してみよう。空間 $\mathbb{R}^n$ の第 j 単位ベクトル，すなわち，$(0,\dots,0,1,0,\dots,0)'$（ただし，“1” は第 j 座標の要素とする）を $\boldsymbol{e^j}$ と書くことにすると（$j=1,\dots,n$），任意の $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ は，$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{e^j}$ と書くことができる。線型性より，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e^j})$ であるから，行列 A として，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e^j})\in\mathbb{R}^m$ を第 j 列として持つ $m\times n$ 行列を取ればよい。

さらに，このような行列 A は一意に定まる。行列 A_1 と A_2 について，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=A_1\boldsymbol{x}=A_2\boldsymbol{x}$ と書けたとすると，$\|A_1\boldsymbol{x}-A_2\boldsymbol{x}\|=\|(A_1-A_2)\boldsymbol{x}\|=0$ であるが，これが任意の $\boldsymbol{x}$ について成立しなければならないこととノルムの性質から，$A_1=A_2$ が従うからである。

以上のことは，<u>線型</u> 関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を 1 つ定めることと $m\times n$ 行列 A を 1 つ定めることが，「一対一対応」していることを示している。[(9)]

当面，最も重要なのは次の定理である。

定理 3.　線形関数 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は連続である。

証明.　任意の $m\times n$ 行列 A が与えられたとき，これを $A=[\boldsymbol{a_1},\cdots,\boldsymbol{a_m}]'$ と書くことにする。ここで，$\boldsymbol{a_i}$ は，A の第 i 行ベクトルを（$i=1,\dots,m$）列ベクトル表記したものを表している。このとき，以下の一連の等式と不等式が成立する：

$$\begin{aligned}&\|A\boldsymbol{x_1}-A\boldsymbol{x_2}\|\\ =\ &\|A(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2})\|\\ =\ &\left\|[\boldsymbol{a_1},\cdots,\boldsymbol{a_m}]'(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2})\right\|\end{aligned}$$

(9)　このことは，$\mathbb{R}^n$ の線形「部分」空間上で定義された線形関数の話に拡張できるが，今はしない。

$$
\begin{aligned}
&= \left\|\left(\boldsymbol{a_1}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right), \cdots, \boldsymbol{a_m}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right)\right)'\right\| \\
&= \left[\left(\boldsymbol{a_1}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right), \cdots, \boldsymbol{a_m}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right)\right)\left(\boldsymbol{a_1}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right), \cdots, \boldsymbol{a_m}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right)\right)'\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\boldsymbol{a_i}'\left(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right)\right)^2\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\|\boldsymbol{a_i}\| \cdot \|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|\right)^2\right]^{1/2} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a_i}\|^2\right) \cdot \|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|^2\right]^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a_i}\|^2\right)^{1/2} \cdot \|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\| \;.
\end{aligned}
$$

等式はすべて，ノルムの定義と行列の直截的な演算により従う。不等式は，シュワルツの不等式（補題 1）そのものである。

最後の式の $\|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|$ の係数は実数，すなわち，有限の値であるから，関数の連続性の定義から直ちに結果が従う（素晴らしい）。 □

今の証明においては，m と n が有限の値であるために，線型関数が（行の数も，列の数も有限な）行列で表現されることを思いっ切り使っている。したがって，話が無限次元のことになるとこの証明は使えない。実際，「無限」次元線形ノルム空間では，線型性は連続性を含意「しない」。これにより，無限次元の話は格段に難しくなるのであるが，ここではそれには立ち入らない。

と言いつつ，1 つだけ簡単な例を挙げておく（本段落は，読み飛ばしてしまっても，後段にはまったく影響しない）。極限を持つ実数列の集合を X と書く。任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X$ が与えられたとき，$\boldsymbol{x}$ にその極限を対応させる写像を考えると，これは線形関数である。「極限の和は，和の極限」と，高校数学でも習うかもしれない。集合 X 上には，上で述べた意味の様々なノルムを定義できるが，そのうちの 1 つが「割り引きスープリーマム・ノルム」であり，これは直感的に言うと，極限を持つ実数列に対して，その要素の中で，将来を割り引くことを考慮に入れて，一番“大きな”要素を対応させる実数値関数である。実数列 $\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y} \in X$ が，$\boldsymbol{x_n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 1, 1, \ldots)$ と $\boldsymbol{y} = (2, 2, 2, \ldots)$ で定義されているものとしよう。すべての n について，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$ とし，$\boldsymbol{n}$ を大きくしていくと，$\boldsymbol{x_n}$ と $\boldsymbol{y}$ の間の割り引きスープリーマム・ノルムで測った距離は 0 に近づいていく。しかし，極限は，それぞれ 1 と 2 のままである。つまり，「極限をとる」という関数は線形であるが，連続ではない。

3.　関数の「滑らかさ」と微分

3.1　フレッシェ（Frèchet）微分

関数 $\boldsymbol{f}: X \to Y$ を考える。また，点 $\boldsymbol{x}_0$ を X の内部の点とする。すなわち，$\boldsymbol{x}^0 \in \mathrm{int}\ X$ を仮定する。この仮定により，ベクトル $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ で，そのノルム $\|\boldsymbol{h}\|$ が十分にゼロに近いものだけを考えると，$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}$ は，内部の定義から関数 $\boldsymbol{f}$ の定義域上の点となり，関数の値はしっかりと定義できる。

このことに注意し，次の式が成立するような $m \times n$ 行列 A が存在したと仮定する：

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - A\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0\,. \tag{3}$$

このとき，関数 $\boldsymbol{f}$ は「点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能」であるという[(10)]。またこのとき，A を，関数 $\boldsymbol{f}$ の「点 $\boldsymbol{x}_0$ におけるフレッシェ微分」と呼ぶ[(11)]。

次の定理は，フレッシェ微分が曖昧なく定義できることを保証してくれる。

定理 4.　関数 f が点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であったとする。このとき，式（3）を満たす行列 A は一意に定まる。

証明.　式（3）を行列 A_1 と行列 A_2 が満たしているものとする。行列の積の分配法則，ミンコフスキーの不等式，第 2.1 節，第 1 段落の最後で述べたことから，

$$\begin{aligned}
\|(A_1 - A_2)\,\boldsymbol{h}\| &= \|A_1\boldsymbol{h} - A_2\boldsymbol{h}\| \\
&= \|-f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) + f(\boldsymbol{x}_0) + A_1\boldsymbol{h} + f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - A_2\boldsymbol{h}\| \\
&\leq \|-f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) + f(\boldsymbol{x}_0) + A_1\boldsymbol{h}\| + \|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - A_2\boldsymbol{h}\| \\
&= \|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - A_1\boldsymbol{h}\| + \|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - A_2\boldsymbol{h}\|
\end{aligned}$$

となるので，証明冒頭の仮定から，$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \|(A_1 - A_2)\,\boldsymbol{h}\| / \|\boldsymbol{h}\| = 0$ である。

次に，前段の最後の事実は，$(\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n)\ \|(A_1 - A_2)\,\boldsymbol{z}\| = 0$ を意味することを証明する。ベクトル $\boldsymbol{z}$ がゼロ・ベクトルであるときは主張は明らかなので，そうではないと仮定しておく。すると，

（10）この名称は，フランスの数学者 René Maurice Frèchet (1878-1973) にちなむ。

（11）有限次元の話をしているときには，フレッシェ微分可能性，及び，フレッシェ微分のことを，それぞれ単に，「微分可能性」，及び，「微分」と呼ぶことが多いが（例えば，三村（1973）を参照），本稿では，敢えて「フレッシェ」を冠して呼ぶことにする。これは，「はじめに」でも述べたように，「微分」という用語が多用・誤用されているからである。なお，「微分可能性」は differentiability，「微分」は differential の訳語である。

ε を十分に小さくすることによって，$\|\varepsilon \boldsymbol{z} - \boldsymbol{0}\|$ をいくらでも小さくできるので，前段で証明したことと，関数の極限の定義から，$|\,\|(A_1 - A_2)\,\varepsilon \boldsymbol{z}\|/\,\|\varepsilon \boldsymbol{z}\| - 0\,|$ をいくらでも小さくすることができる。他方，上でも使ったノルムの性質から $|\,\|(A_1 - A_2)\,\varepsilon \boldsymbol{z}\|/\,\|\varepsilon \boldsymbol{z}\| - 0\,| = \|(A_1 - A_2)\,\boldsymbol{z}\|/\,\|\boldsymbol{z}\|$ となるが，右辺が ε と無関係であることから，今述べたことが正しいのは，右辺がゼロである場合しかあり得ない。これで，言いたかったことが言えた。

最後に，前段の結論は $\boldsymbol{z}$ の選び方に依らないので，$A_1 = A_2$ でなければならず，証明が完了した。 □

線型関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は，至るところでフレッシェ微分可能で，フレッシェ微分は常に A となる。このことは，式 (3) から明らかである。というのも，この場合，同式は $\boldsymbol{x}_0$ や $\boldsymbol{h}$ の値に依らず，常に

$$\frac{\|A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - A\boldsymbol{x}_0 - A\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\|A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{h} - A\boldsymbol{x}_0 - A\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

となるからである。

式 (3) は，より直観的なかたちに書き換えることができる。このために，記号をひとつ導入する。実数 x を変数と看做して，$o(x)$ は，x についての或る実数値関数で，次の条件を満たしているものとする：

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{o(x)}{x} = 0\,. \tag{4}$$

また逆に，この条件を満たす x についてのどんな式も $o(x)$ と書く。簡単な o の例としては，$o(x) = x^2$ のようなものを考えればよい。これを，「ランダウの表記法」と呼ぶ。式 (4) は，x がゼロに近づくときに，$o(x)$ が x よりも「速い速度」でゼロに近づくことを意味し，x が十分ゼロに近いときには $o(x)$ で書かれた項はほとんど無視できる，ということを表している。

ランダウの表記法を用いると，式 (3) は次のようになる：

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - A\boldsymbol{h}\| = o(\|\boldsymbol{h}\|)\,. \tag{5}$$

今，$\boldsymbol{h}$ が十分ゼロに近いと仮定しよう。すると，ノルムの定義から，式 (5) をさらに次のように書き換えることができる：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + A\boldsymbol{h}\,. \tag{6}$$

ただし，記号 “≈” は，ベクトル同士の近似を表している。式 (6) の右辺は，$\mathbb{R}^{m+n}$ 上の点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$ で関数 $\boldsymbol{f}$ に接する「超平面」を表している。「超平面」とは，非常に大雑把に言うと，n 本の m 次元ベクトル達で貼られた空間（それらの線形結合の集合で，$(n + m - 1)$ - 次元線形部分空間）を平行移動したものであり，例えば，$m = 1$，$n = 2$ の場合には，3 次元空間に書かれた f のグラフに，点 $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ で接する（普通の意味での）平面を表していることが分かる。[12]

（12） 一般に，線形（部分）空間を平行移動した空間を「アファイン空間」と呼ぶ。

以上のことは，関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ においてフレッシェ微分可能という意味で滑らかであるならば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ のごくごく近くだけを観察すると，そこでの関数 $\boldsymbol{f}$ の振る舞いは，$\boldsymbol{h}$ を変数とする線型関数でかなり正確に近似できることを意味している。また，観察するところをより近くだけに限定すれば，いくらでもこの近似を正確にすることができる。

このように，「はじめに」で述べた直観的な関数の滑らかさの概念は，フレッシェ微分可能性の概念を導入することにより，局所的に線形関数で近似することが可能であるという，数学的に厳密な定義を与えられたのである。

次の定理は当たり前のように見えるが，それでも証明は必要である。

定理 5. 関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であるならば，$\boldsymbol{f}$ はその点で連続である。

証明. まず，以下の等式と不等式が成立することに注意する：

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\| \\
&\le \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\|A\boldsymbol{h}\| \\
&= \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\left\|(\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{h},\cdots,\boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{h})'\right\| \\
&= \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\left((\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{h},\cdots,\boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{h})(\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{h},\cdots,\boldsymbol{a}_m'\boldsymbol{h})'\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\left(\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{h})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\sum_{i=1}^{m}|\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{h}| \\
&\le \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a}_i'\|\cdot\|\boldsymbol{h}\| \\
&\le \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\boldsymbol{h}\|+\left(\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a}_i'\|\right)\cdot\|\boldsymbol{h}\|\,.
\end{aligned}
$$

ここで，2 番目の不等式は，ミンコフスキーの不等式（定理 1）による。最初の等式では，A の第 i 行を（行ベクトル表記で）$\boldsymbol{a}_i'$ $(i=1,2,\ldots,m)$ と書いている。また，4 番目の不等式では，シュワルツの不等式（補題 1）を使った。

3 番目の不等式は簡単な計算から従うが，ここでは $m=2$ の場合だけを示す。任意の実数 x_1 と x_2 が与えられたとき，$(|x_1|+|x_2|)^2=|x_1|^2+2|x_1|\cdot|x_2|+|x_2|^2\ge {x_1}^2+{x_2}^2$ となるが，両辺の正の平方根をとれば良い。

最後の式の $\|\boldsymbol{h}\|$ を限りなく 0 に近づけていくことによって，式（5）から，式全体も限りなく 0 に近づく。連続性の定義式（2）より $\boldsymbol{f}$ の連続性が示せた。 □

3.2　ガトー（Gâteaux）微分

点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}\ X$ が与えられているとしよう。どのような $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ についても，十分に小さい実数 t を考えると，$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h} \in X$ となるので，$\boldsymbol{f}$ の値が定義できることを注意しておく。このとき，次の（t を変数と見做した）関数の値の極限を考える：

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\right). \tag{7}$$

この極限が 任意の$\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ について常に存在するとき，関数 f は「点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能」であると言う。[13] ガトー微分可能性は，すべての $\boldsymbol{h}$ について，すなわち，すべての「方向」について，この極限が存在することを要求しているので，それなりに強い条件である。

関数 $\boldsymbol{f}$ について，それが点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能であり，しかも，極限 (7) が，ある $m \times n$ 行列 A を用いて $A\boldsymbol{h}$ と書けるとき，行列 A を，関数 f の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ガトー微分」と言う。ここで注意が必要なのは，ガトー微分可能性とガトー微分は異なる概念であり，特に，ガトー微分可能であるからといって，ガトー微分が存在する保証はないということである。

このことを明らかにするために，次の例を考えてみよう。

例 6.　関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \textit{if} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \textit{if} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

によって定義する。(i) f は点 $(0,0)'$ でガトー微分可能であることを示す。この点において，極限 (7) を計算すると，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(th_1, th_2) - f(0,0)\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{t^3h_1h_2^2}{t^2h_1^2 + t^4h_2^4}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{th_1h_2^2}{h_1^2 + t^2h_2^2}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{h_1h_2^2}{h_1^2 + t^2h_2^2}\right) \end{aligned}$$

を得る。ただし，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)'$ と書いている。ここで場合分けをする。(i-1) $h_1 = 0$ の場合。このときは，極限は明らかに 0 である。(i-2) $h_1 \neq 0$ の場合。極限は h_2^2/h_1 であることが直ぐに分かる。いずれの場合も極限が存在することから，f は $(0,0)$ においてガトー微分可能である。(ii) 他方で，

(13)　この名称は，フランスの数学者 René Eugne Gâteaux (1889-1914) にちなむ。

関数 f の $(0,0)'$ におけるガトー微分は存在しない。これは，どのような 1×2 行列（行ベクトル）$A=[\,a_{11},a_{12}\,]$ を考えても，上で求めた極限を $A(h_1,h_2)'$ で表現できないからである。何故ならば，(i-1) から，$[\,a_{11},a_{12}\,](0,h_2)'=0$ となり，これより，$a_{12}=0$ となるが，すると，$A(h_1,h_2)'=a_{11}h_1$ であり，a_{11} をどのように設定しも (i-2) の結果と矛盾するからである。 □

ある特定の方向 $\boldsymbol{h}$ について極限 (7) が存在するときに，その極限を，「関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における $\boldsymbol{h}$-方向微分」と呼び，さらに，$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{e}^j$ のときに，この極限を（それがもし存在すれば）「関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における第 j 偏微分」と呼ぶ（$j=1,\ldots,n$）。

関数 $\boldsymbol{f}$ がガトー微分可能であるとき，$\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における第 j 偏微分を $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_0)$ と書き，このベクトルを第 j 列とする $m\times n$ 行列 $J(\boldsymbol{x}_0)$ を，関数 $\boldsymbol{f}$ の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「ジャコビアン行列」と呼ぶ。本稿では触れられないが，経済学で最も重要な定理のひとつである「陰関数定理」では，ジャコビアン行列の行列式を意味する「ジャコビアン」が中心的な役割を担う。

例 7（承前）． 例 6 の関数 f と点 $(0,0)'$ について，そのジャコビアン行列は $J(0,0)=[0,0]$ であることが直ぐに分かる。この例のように，特に $m=1$ のときのジャコビアン行列を，関数 f の点 $\boldsymbol{x}_0$ における「グラディエント」と呼び，$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ と書く。

行列が，ある一定の並び方に従った実数の集合であることを想起すると，$m\times n$ 行列は，空間 $\mathbb{R}^{m\times n}$ の一点として表現できる。すると，点 $\boldsymbol{x}_0$ の近傍でガトー微分可能であるような関数 $\boldsymbol{f}$ について，写像 $\mathrm{int}\times \ni \boldsymbol{x}\mapsto J(\boldsymbol{x})$ を，空間 $\mathbb{R}^n$ から空間 $\mathbb{R}^{m\times n}$ への関数と見做すことができよう。さらに，条件式（2）を使って，この新しく定義された関数の連続性を議論することもできる。このことは後で使う。

3.3　フレッシェ微分とガトー微分の関係

フレッシェ微分可能性は，ガトー微分可能性よりも強い概念である。次の定理を証明できる。

定理 6． 関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であるならば，$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能である。さらに，ガトー微分が存在し，フレッシェ微分とガトー微分は一致する。

証明． 正の実数 $\varepsilon>0$ と，ゼロ・ベクトルではない $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ を任意に与える。関数 $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であるという仮定と式（3），及び，$\varepsilon/\|\boldsymbol{h}\|>0$ であることから，ある $m\times n$ 行列 A と正の実数 $\delta>0$ をうまく選んで，$\|\boldsymbol{h}\|<\delta$ であるような，どんな $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ をとってきても，

$$\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\hat{\boldsymbol{h}})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-A\hat{\boldsymbol{h}}\|}{\|\hat{\boldsymbol{h}}\|}<\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

となるようにすることができる。今，$\delta' := \delta/\|\boldsymbol{h}\| > 0$ と定義すると，$|t|\cdot\|\boldsymbol{h}\| < \delta'\|\boldsymbol{h}\| = \delta$ であるから，

$$\left\|\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{t}-A\boldsymbol{h}\right\|\Big/\|\boldsymbol{h}\|=\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-At\boldsymbol{h}\|}{\|t\boldsymbol{h}\|}<\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

であるが（上式の $\boldsymbol{h}$ として，$\hat{\boldsymbol{h}}=t\boldsymbol{h}$ とすればよい），ε は任意であったので，このことは式（7）が $A\boldsymbol{h}$ に他ならないことを示している。また，$\boldsymbol{h}$ も任意であったので，これで証明が終わった（素晴らしい！）。 □

ところが，この定理の逆は成立しない。すなわち，ガトー微分可能性は，必ずしもフレッシェ微分可能性を意味しない。このように，ガトー微分可能性は，フレッシェ微分可能性よりも厳密に弱い概念であることを次の例で示す。

例 8（承前）. 例 6 の関数 f を三度考える。この関数が点 $(0,0)'$ でガトー微分可能であることは既に見た。しかし，この関数は点 $(0,0)'$ で連続では ない。今，$y=\sqrt{x}$ とし，x を限りなく 0 に近づけていくとしよう。すると，$\|(x,y)'-\mathbf{0}\|$ は限りなく 0 に近づいていくにもかかわらず，$f(x,y)=f(x,\sqrt{x})=1/2$ は決して $f(0,0)=0$ に近づいていかない。連続性の定義式（2）より，f は $(0,0)'$ で連続ではないことが分かる。故に，定理 5 より，f は $(0,0)'$ でフレッシェ微分可能では ない。 □

ただし，次の定理が成立する。証明は，この「解説」の範囲を超えるのでここではしない。例えば，三村（1973）を参照すること。

定理 7. 関数 fs が点 $\boldsymbol{x}_0$ でガトー微分可能であったとする。これに加えて，ジャコビアン行列で定義される関数：$\boldsymbol{x}\mapsto J(\boldsymbol{x})$ が，$\boldsymbol{x}_0$ の近傍で連続であったとする。このとき，$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{x}_0$ でフレッシェ微分可能であり，さらに，ガトー微分が存在して，それはフレッシェ微分と一致する。

4. 経済学への応用：効用関数のフレッシェ微分

「消費者理論」と呼ばれる経済学の分野では，消費者は財を消費し，そのことによって「効用」を得ると仮定する。簡単化のため，以下では財には 2 種類しかなく（x-財と y-財），効用の値は実数で表現されるものとする。財の種類が有限個しかないことは本質的であるが，有限個でありさえすれば，（例えば，n 種類の財があるとしても）以下の議論は同様に成立する。

他方で，こちらは一般性を非常に欠くが，「消費可能性集合」，すなわち，物理的に消費できる財の組み合わせの集合が $\mathbb{R}^2$ 全体であると仮定する。「負の」消費量というのは解釈しづらいが，微分の議論をするためには，特定の財の組み合わせが消費可能性集合の内部にある必要があり，そのためには，消費可能性集合を開集合で定義しておくのが便利だからである。もちろん，$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ and } y > 0\}$ 等を用いてもよいが，記号が煩雑になるので，それはしない。[14]

ある一定の効用水準の値をもたらす 2 財の組み合わせの集合を「無差別曲線」と呼ぶ。財空間 $\mathbb{R}^2$ から実数空間 $\mathbb{R}$ への写像である「効用関数」を u と書き，特定の効用水準の値を $\bar{u} \in \mathbb{R}$ と書くことにすると，無差別曲線は，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | u(x, y) = \bar{u}\}$ と表現されるが，多くの場合，この集合は実際に $\mathbb{R}^2$ 上の「曲線」になり，この曲線を (x, y) - 座標で書いたときの傾きの絶対値は「限界代替率」と呼ばれる。限界代替率を巡る話は，消費者理論の最初の山場と言ってよい。

限界代替率を求める非常に直観的で，かつ，好い加減な方法の 1 つは，方程式と変数の数え上げによるものである。[15] 無差別曲線を定義している方程式が 1 つあり，変数は x と y の 2 つである。そこで，y は x の関数として解けてしまうはずなので，無理矢理 $y = y(x)$ と書くことにし，$u(x, y(x)) = \bar{u}$ を得る。これは x についての恒等式なので，「チェイン・ルール」を使い，両辺の微分を計算すると，[16] $du(x, y(x))/dx = u_1(x, y) + u_2(x, y) \cdot dy(x)/dx = 0$ となる。ただし，ここで，u_i は u の第 i 偏微分を表していて（$i = 1, 2$），df/dx で，関数 f の変数 x による微分を表している。ここから，最終的に

$$u_1(x, y) \cdot dx + u_2(x, y) \cdot dy = 0 \,. \tag{8}$$

という有名な（？）式が導かれる。

式（8）は非常によろしくない式である。第一に，dx や dy を，単体で，さも意味があるかのように使っている。dy/dx は「分数」ではなく，このようにまとめて書いて初めて意味を持つものである。「分数であるかのように見做して計算しても，結果的には合っている」ということと，「分数である」ということは，まったくの別物である。[17] 第二に，式（8）からは，微分とは，「滑らかな」関数について，局所的に（ごく一部だけに注目して），その関数を近似している「線型関数」である，という話の本質が見えてこない。式（8）は，効用関数が滑らかであることを仮定しているのと殆んど

（14） まったく消費しない場合も含める，というのは自然な仮定なので，消費可能性集合を $\mathbb{R}^2_{+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$ で定義するのは十分にあり得るが，これをすると，集合の内部にない点での微分の定義をどうするかという微妙な問題が生じる。関数の「端」で，「滑らかさ」をどのように定義するべきなのかは，自明な問題ではまったくない。このあたりの処理に非常に気を使わなければならないことは，例えば，細矢（2010）を見ても分かる。

（15） 以下の話は，微分と陰関数定理を用いて局所的には厳密なものにすることができるが，ここではしない。

（16） この辺り，きちんと定義しないで記述しているが，ある程度は厳密にすることができる。

変わらず，実質的な内容を持たない．最後に，これが一番言いたいことであるが，式（8）はそもそも，正しくない．

式（8）は，好意的に解釈すれば，効用関数のフレッシェ微分可能性を主張しているように理解できなくもないが，既に，例 6，例 7，例 8 で見たように，偏微分の存在は，フレッシェ微分可能性(18)を意味しない。このことを，再度，簡単な例を用いて確認しておく。なお，次の例は，効用関数であるならば通常は満たすべき「単調性」などの条件を満たしていない。そのような条件を満たしつつ，以下で述べるような性質を持つ効用関数の例を作る必要が当然のこととしてあるが，ここではそれをしない。興味のある読者は，例えば，細矢（2010）などを参照して欲しい。

例 9.　効用関数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$u(x,y)=\begin{cases} y^2 & \textit{if} \quad x=0 \\ x^2 & \textit{if} \quad y=0 \\ 1 & \textit{if} \quad xy\neq 0 \end{cases}$$

によって定義する。任意の $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^2$ について，効用関数 u は点 $(0,0)'$ で $\boldsymbol{h}$-方向微分を持ち，それは $\boldsymbol{h}$ に依らず，常に 0 である。したがって，特に，$u_1(0,0)=u_2(0,0)=0$ である。例えば，$u_1(0,0)=\lim_{t\to 0}\,(u(0+t,0)-u(0,0))/\,t=\lim_{t\to 0}t^2/t=\lim_{t\to 0}t=0$ であり，他の場合も同様にして確かめることができる。このことから，u は点 $(0,0)'$ でガトー微分 $A=[0,0]$ を持つことが分かる。

しかし同時に，u が $(0,0)'$ において連続ではないことも分かる。これを見るために，$y=x$ として，$x>0$ を保ったまま x を十分に 0 に近づけてみよう。すると，$\|(x,y)'\|=\|(x,x)'\|=\sqrt{2}x$ は 0 に近づいていくものの，u の値は常に 1 なので，連続性の定義（式（2））と矛盾する。

このことと定理 5 から，u が $(0,0)'$ でフレッシェ微分可能では ない ことが従う。最後に，この効用関数 u については，定理 7 を適用することができないことを確認しておく。実数 $\varepsilon\in(0,1)$ を任意に選ぶ。このとき，点 $(\varepsilon,0)'$ での u_2 を計算しようとすると，$(u(\varepsilon,0+t)-u(\varepsilon,0))/\,t=\left(1-\varepsilon^2\right)/\,t$ となり，この値は t が 0 に近づくにつれて無限大に発散してしまう。これは，点 $(0,0)'$ の近傍で，u のジャコビアン行列が存在しないことを意味し，存在しないのであるから，それは点 $(0,0)'$ で連続

(17)　ここでの dx などを「ディファレンシャル」とカタカナ表記して，読者を煙に巻こうとする教科書があるが，ディファレンシャルというのは「微分」の単なる英訳であり（正確には，「微分」が “differential” の和訳），何ら問題の解決になっていない。直ぐ次で述べるように，微分はあくまでも「線型関数」（したがって，有限次元の話をしているときには，「行列」）であり，数字ではない。

(18)　有限次元の話をしているときには，フレッシェ微分（及び，フレッシェ微分可能性）は，単に「微分」（及び，「微分可能性」）と書かれることが多いことは既に指摘した。

ではあり得ない。したがって，定理 7 は適用できない。 ■

この例からも分かるように，仮にガトー微分が存在したとしても（このとき，当然，偏微分は存在する），そのことは効用関数が滑らかであることを意味しない。効用関数を局所的にさえも線形関数で近似することはできず，式（8）は成立しない。

このように，あらゆる意味でよろしくない数式を，経済学を学習し始めた初期の時期に見せられるのは相当に辛い[(19)]。筆者は密かに，式（8）を「経済学における諸悪の根源」と呼んでいる。

「憑き物落とし」として，本節を「コブ-ダグラス型効用関数」の名前で知られる非常に簡単な例で締めくくる。

例 10. 効用関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $u(x,y) = xy$ で定義する。この効用関数は，その定義域の至るところでフレッシェ微分可能であり，点 $(x,y)'$ におけるフレッシェ微分は $A = [y,x]$ である。このことは，次の等式と不等式から分かる：

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left\| u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) - [y,x]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|}{\|(h_1,h_2)'\|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|(x+h_1)(y+h_2) - xy - yh_1 - xh_2\|}{\|(h_1,h_2)'\|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1| \cdot |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\
&\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1| \cdot |h_2|}{\sqrt{h_1^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1| \cdot |h_2|}{|h_1|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2| = 0\,.
\end{aligned}$$

一方で, u の偏微分を計算してジャコビアン行列を求めると, $J(x,y) = [y,x] = A$ となり, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ 自身への写像を $(x,y)' \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ によって定義すると，この写像は，行列 A^* を $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ として，$A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と書けることも分かる。これは線形関数であるから，定理 3 によって連続関数である。このことは，任意の $\mathbb{R}^2$ 上の点を，その点における u のジャコビアン行列に対応させる

（19） 筆者は，式（8）から受けたダメージから完全に立ち直るまでに，丸 5 年かかった。

写像を考えると，それが連続になることを示している。よって，定理 7 からも，u がフレッシェ微分可能であることが再確認できる（素晴らしし過ぎる！）。 ■

5. 無限次元の世界の「滑らかさ」

本稿の話では，基本的にはノルムの性質しか用いておらず，したがって，ここで紹介した「微分」の概念は，ノルムが定義できる線形空間を定義域と co-domain として持つ関数全般に応用できる。つまり，線形空間の次元が有限であることには依存していない。既に述べた通り，次元の多寡にかかわらず，ノルムが定義された線形空間を線形ノルム空間と呼ぶが，本稿の話は，ある線形ノルム空間からある線形ノルム空間への関数の「滑らかさ」の話であったことが分かる。

これらの話は，無限次元線形空間に拡張できる。経済学では，無限次元線形空間が多く登場し，その中でも，バナッハ空間と呼ばれる特別なノルム空間が特に大切である[20]。

例えば，「リスク」がある状況は「分布関数」を使って表現できる。空間 $\mathbb{R}^n$ から空間 $\mathbb{R}^m$ への線形関数は，既に述べたように，ある $m \times n$ 行列 A で表現できるが，このような A を 1 つ定めることは，$(m \times n)$ 個の実数を定めるのと同じことなので，全部で $\mathbb{R}^{m \times n}$ 通りあると考えることができる。したがって，このような関数全体の集合は有限次元線形空間を構成する。一方，分布関数は，ある変数が与えられたとき，ある変数（例えば，株価）がそれ以下の実数として実現する確率を与えるものである。すると，分布関数は，すべての実数に何かしらの 0 と 1 の間の実数を割り当てる規則と見做せ，このような関数は，全部で $[0,1]^{\mathbb{R}}$ 通りある。また，ここでは詳述しないが，分布関数の集合は線形空間（のようなもの）と考えることができるので，結局それは，無限次元線形空間（のようなもの）である。この空間に上手にノルムを定義して，考える分布関数のかたちを限定すると，このような分布関数達が，バナッハ空間を構成することも分かる。

ここで，似たようなリスクは，「似たような」分布関数で表現できると考え，さらに，似たような分布関数とは，前段のノルムで測った距離がゼロに近い 2 つの分布関数のことと定義するのは自然である。人々の中には，リスクを（実数値の）効用関数で評価し，似たようなリスクの効用の値が近しいような人も居るであろう。このことは，その人たちの効用関数の「連続性」を仮定することに他ならない。連続性に加えて，同じノルムを使い，本稿のテーマである「フレッシェ微分可能性」を効用関数に課すこともできる。ところが，効用関数のフレッシェ微分可能性は非常に強力な仮定で，リスクの効用関数がフレッシェ微分可能であるならば，少なくとも局所的には，それは「期待効用関数」で近似できることが知られている（マシーナの定理）[21]。

(20) バナッハ空間については，本稿の脚注 6 を参照のこと。
(21) Machina, M. J. (1982): "“Expected utility” analysis without the independence axiom," *Econometrica* **50**, 277–323.

このように，フレッシェ微分の概念は経済学においてますます重要なものとなっていくが，しかし，これは先の話である（「真田丸」風）。

6. まとめと文献案内

「解説 108–1」で線形関数について書いたのとまったく同様に，本稿で取り上げた「微分積分学」の教科書は膨大な数に上るので，1 つ 1 つ列挙することはしない。筆者の考えでは，このような基礎数学については，信頼できる 1 冊の本を徹底的に読み込むのが良い。筆者の好みで言えば，

- 三村征雄（1970, 1973）『微分積分学 I・II』（岩波全書 274, 278），岩波書店

の一択である。留学前に買い求めたが，米国で本格的に数学を学び始めたときに，本当に重宝した。本稿もこれを参考にしている。『II』の方は，当時でも既に一般の書店にはなく，古書店を歩き回って手に入れた。信じがたいが，こちらは今でも手に入れにくい。

英語で書かれたものについては，以下の 2 冊が推奨できる。

- Buck, R. C. (1978): *Advanced Calculus* (3rd Edition), McGraw-Hill.
- Rudin, W. (1976): *Principles of Mathematical Analysis* (3rd Edition), McGraw-Hill.

著者は 2 人とも，筆者の留学当時，留学先のウィスコンシン大学の教授であった。だからではないと思うが，2 冊とも数学科の教科書に指定されており，筆者もこれらを使って猛勉強（？）した。レベル的には三村よりも難しい。

微分可能性をめぐる消費者理論の最新成果の一端を知るには，本文でも触れたが，

- 細矢祐誉（2010）『効用関数の測定理論――消費者の需要から選好を逆算する方法――』，三菱経済研究所

が参考になる。

微分できる保証がない，つまり，「滑らかではない」関数を，特に無限次元線形空間で分析する数学の分野は，「非線形数学」，あるいは，「凸解析」の名前で，こちらも古くから研究されている。「滑らかではない」ものを定義するためには，当然，「滑らかなもの」を先に定義する必要があり，これが無限次元線形空間における本来のフレッシェ微分（やガトー微分）である。この分野での教科書も，それこそ無数に存在するが，こちらについては「これ」というものを 1 つだけ挙げることが叶

わない。ただし，本稿を執筆するに際しては次を参考にした。

- 増田久弥（1985）『非線形数学』，朝倉書店

経済学では，「滑らかではない」関数（例えば，効用関数や需要関数）は非常に扱いにくいので，「滑らかではない関数は考えない」，という仮定が置かれることが多い。ただし，「滑らかではない」ことを積極的に利用するモデルもある。その中でも特に有名なのは，「屈折需要曲線」のガジェットで，これは，需要曲線が滑らかではない点で均衡が成立する結果，価格の硬直性が発生するというものである。

ただし，需要曲線が，「都合の良いところで」，何故か滑らかではなくなるというのは，あまりにアドホック過ぎる仮定であるかもしれない。これとの関連で，近年盛んに研究されてきたのが，「リスク」よりもさらに不確実の度合いが高い状況と定義される「ナイトの不確実性」である。ナイトの不確実性が存在するときには，効用関数が滑らかではなくなり，前節で述べたマシーナの定理が応用できない。それればかりか，経済の均衡が，ここでは述べないある理由から，必然的に，効用関数が滑らかではないところで成立してしまう。この結果，均衡価格を経済モデルの中で決定できないという現象，いわゆる「均衡価格の不決定性」が発生する。これについては，例えば，

- Ohtaki, E. and H. Ozaki (2015): “Monetary equilibria and Knightian uncertainty,” *Economic Theory* **59**, 435–459.
- Nishimura, K. G. and H. Ozaki, *Economics of Pessimism and Optimism: Theory and Applications of Knightian Uncertainty*, Springer, 近刊

を参照してほしい。特に後者は，この分野の１つの到達点を示す著作であり，慶應生は必読である。