慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	世代重複モデルにおける貨幣とコア概念
Sub Title	Money and core in overlapping generations model
Author	村上, 裕美(Murakami, Hiromi)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2015
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.108, No.3 (2015. 10) ,p.581(105)- 597(121)
JaLC DOI	10.14991/001.20151001-0105
Abstract	主体および商品の数がともに発散する二重無限の構造を持つ世代重複モデルは, 静学的経済分析に貨幣を導入する基本的な枠組みである。このモデルの最も大きな特徴は, 「競争均衡が必ずしもPareto最適とならない」ことであり, 均衡の最適性を回復する上で, 貨幣が重要な役割を担うことが知られている。本稿は, 世代重複モデルにおける最適性やコア概念に関する諸研究を整理しながら, 貨幣的均衡へのレプリカ有限コア収束定理を示し, 近接分野の知見を踏まえたその解釈を行う。 An overlapping generations model with the double infinity of commodities and agents is the most fundamental framework to introduce money into a static economic model. An outstanding characteristic of this model is that competitive equilibria may not necessarily be Pareto-optimal and that fiat money plays an essential role in Pareto improvement. This paper summarizes studies on the optimality and the core in an overlapping generations economy and shows a type of replica finite core equivalence theorem for monetary equilibrium allocation. In addition, we interpret our theorem based on the knowledge of social norms in game theory.
Notes	特集 : 経済の数理解析 : 数理経済学の新展開
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20151001-0105

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」108 巻 3 号（2015 年 10 月）

世代重複モデルにおける貨幣とコア概念

村上裕美*

（初稿受付 2015 年 10 月 21 日，査読を経て掲載決定 2015 年 11 月 25 日）

Money and Core in Overlapping Generations Model

Hiromi Murakami*

Abstract: An overlapping generations model with the double infinity of commodities and agents is the most fundamental framework to introduce money into a static economic model. An outstanding characteristic of this model is that competitive equilibria may not necessarily be Pareto-optimal and that fiat money plays an essential role in Pareto improvement. This paper summarizes studies on the optimality and the core in an overlapping generations economy and shows a type of replica finite core equivalence theorem for monetary equilibrium allocation. In addition, we interpret our theorem based on the knowledge of social norms in game theory.

1　はじめに

Walras（1874）を起源とする一般均衡理論は，現代経済学の骨格をなす研究分野である。一般均

本稿の作成にあたり，浦井憲教授（大阪大学）には数多くの有益かつ適切なご助言を頂戴した。本研究の主定理は，浦井教授との共同研究により得られたものであり，日頃の細部にわたる熱心なご指導に，心より感謝申し上げる。本稿執筆の契機となった第 6 回数理経済学会国際会議では，参加者の皆さまに多くの貴重なコメントを頂いた。とりわけ尾崎裕之教授（慶應義塾大学）には，学会発表から本稿執筆に至るまで，ひとかたならぬご支援とご協力を頂いた。匿名査読者の方には，原稿を注意深くお読み頂き，的確なコメントと方向付けを頂いた。また Ivan Brenes 教授（大阪大学）にも，有意義なご助言を頂いた。ここに記して厚くお礼申し上げる。本稿は，JSPS 特別研究員奨励費 15J01034 の助成を受けた研究成果の一部である。

* 大阪大学大学院経済学研究科
Graduate School of Economics, Osaka University (murakami@math.econ.osaka-u.ac.jp)

衡理論が扱うべき問題として，Walras は「交換」「生産」「資本形成と信用」「貨幣」の順に段階的な分類と見通しを与えた。貨幣的一般均衡理論とは，一般均衡理論の展開において最終段階に位置づけられるものであり，今日まで様々なアプローチが試みられてきている。

貨幣の機能は通常，「価値計量の尺度」「交換の媒体」「価値の保蔵手段」の三つに分類される（例えば，Hicks 1969，第 5 節などを見よ）。Kiyotaki and Wright（1989）をはじめとするサーチ理論は，「交換の媒体」の側面に注目し，貨幣を取引コスト（Hahn 1971）として表現するものであり，静学的分析の下で整合的に貨幣を取り扱う試みと位置付けることができる。一方，静学的な枠組みに基づきながらも，動学的議論に見通しを与えるべく，「交換の媒体」に加えて，「価値の保蔵手段」の問題も取り扱うモデル構造が，以下に述べる**世代重複モデル**である。(1)

貨幣が価値を持つ背後には，その発行を司る権力主体，およびその貨幣が流通する市場が将来にわたって存続することへの信用が存在する。もちろん，モデル内において貨幣発行主体の存在や市場の永続性は，価格所与の仮定，あるいは市場そのもののルールと同様，暗黙的な一般受領性として理論の前提となっている。しかしその暗黙的受領性という意味での信用は，「それ自体は無価値な不換紙幣と商品の交換」という形を取り，モデル内の取引によって生成される内部貨幣と見分けはつかないものの，外生的な社会資産として計上可能な**外部貨幣**となって現れることになる。この点を明確にしたのが，Samuelson（1958）によって提唱された世代重複モデルであった。世代重複モデルの最も大きな特徴は，「厚生経済学の第一基本定理」が成立しないこと，すなわち**競争均衡が必ずしも Pareto 最適とならない**ことであり，この経済モデルにおいて，Samuelson は貨幣が一種の「社会契約」の役割を果たし，Pareto 改善を導くのではないかという見通しを立てた。この見通しに対しては，1970～80 年代に非常に厳しい結論が出ている。外部貨幣の存在は Pareto 改善をもたらすとは限らず，貨幣的均衡，あるいは Pareto 最適な貨幣的均衡の存在も保証しない（Shell 1971，Hayashi 1976，Okuno and Zilcha 1980 などを見よ）。したがって通常の有限経済における，協力ゲーム概念に則ったコア収束の議論もそのままでは成立しない。

近年，著者は共著論文 Urai and Murakami（2015）において，Debreu-Scarf のレプリカコア収束定理を拡張し，世代重複モデルにおける，ある種の有限コア資源配分と貨幣的均衡資源配分との一致定理を示した。本稿ではその内容を含みつつ，貨幣的均衡のコア特徴付けの問題をより詳細に整理する。当該研究は，価値基準としての貨幣の公理的特徴付けという著者らの最新の研究へと続

---

(1)　Keynes は『貨幣論』の冒頭において，貨幣の最も重要な機能は「価値計量の尺度」であり，貨幣の役割を単なる「交換の媒体」と見なすことは，その経済学理論で描かれる市場を物々交換の域に留めるに等しい，と指摘した（Keynes 1930）。商品と商品の交換のためには，まずその前提として，価値の基準が明確でなければならず，それさえ確定すれば，取引主体の合意や企業の発行する電子ポイントといったクレジットも，「交換の媒体」として貨幣と全く同様に機能する。また「価値の保蔵」とは，現在市場と将来市場の間での「交換の媒体」の機能に他ならない。このような，貨幣の最も本質的な役割は「価値計量の尺度」にあるという議論も，忘れるべきではないだろう。

くものであり，静学モデルと動学モデルを架橋し，外部貨幣を経済学理論の範疇に捉える世代重複モデルの意義を再解釈するとともに，価値基準の側面に焦点を当てた貨幣研究への，一般均衡理論的接近の端緒を開くものである。

2　モデル

世代重複モデルは，経済システムの永続性という問題を，個々の主体の有限性と整合的な形で把握することのできる，ミクロ的にもマクロ的にも重要な動学的枠組みである。Shell（1971）は，世代重複モデルにおいて厚生経済学の基本定理の不成立という特徴的な結果が生じる要因を，主体および商品の数がともに発散する二重無限の構造に見出した。以降，経済学理論における無限の取り扱いにおいて，割引率を用いた有限性への帰着や集計化による近似といった議論では済まされない，極めて重大な問題の存在が明らかとなった。本稿では議論の煩雑さを避け，またその本質を描出するため，2 期 1 財モデルを考えることとする。(2)

$\boldsymbol{N}$を正の整数の集合とし，$\boldsymbol{R}$を実数の集合とする。世代重複経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ は次の（E.1）～（E.3）のリストで構成される。（E.1）は経済を構成する主体とその世代，（E.2）は各世代が消費する財，（E.3）は各主体の初期保有と選好の詳細を述べたものである。

（E.1）$\{I_t\}_{t=1}^{\infty}$： $\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t = \boldsymbol{N}$ となる，互いに素な $\boldsymbol{N}$ の有限部分集合からなる可算族。各 I_t は第 t 世代に生きる主体の添字集合であり，$I_t = \{t\}$，すなわち各世代にはそれぞれ 1 人の経済主体が存在する。

（E.2）$\{K_t\}_{t=1}^{\infty}$： $K_t = \{t, t+1\}$ は第 t 世代に消費可能な財の添字集合であり，$\bigcup_{t=1}^{\infty} K_t = \boldsymbol{N}$。

（E.3）$\{(\succsim_i,\ \omega_i)\}_{i=1}^{\infty}$： 可算無限人の経済主体。$\succsim_i$ は，各主体 $i \in I_t$ の財空間 $\boldsymbol{R}_{+}^{K_t}$ 上の選好を表し，反射性，推移性，完備性，狭義単調性，連続性および厳密な凸性を満たす。ω_i は各主体 $i \in I_t$ の初期保有を表し，$\boldsymbol{R}_{++}^{K_t} = \{x \mid x : K_t \to \boldsymbol{R}_{++}\}$ の要素である。

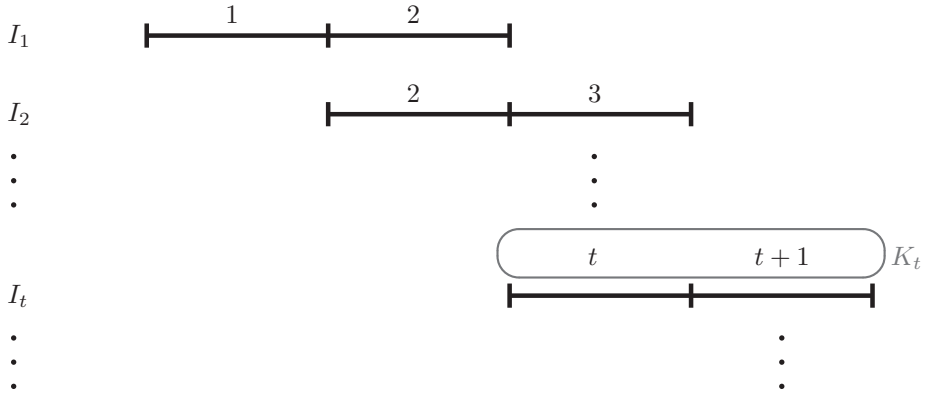
各世代の財空間は $\boldsymbol{R}_{+}^{K_t} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ であるから，経済全体の財空間は $\oplus_{t=1}^{\infty} \boldsymbol{R}_{+}^{K_t} \subset \boldsymbol{R}_{\infty} \subset \boldsymbol{R}^{\infty} \approx \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ と書ける。経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\{I_t\}_{t=1}^{\infty},\ \{K_t\}_{t=1}^{\infty},\ \{(\succsim_i,\ \omega_i)\}_{i=1}^{\infty})$ における**価格空間**$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ は，$\boldsymbol{R}_{\infty}$ と $\boldsymbol{R}^{\infty}$ の双対性の下で，全主体の初期保有を正に評価するような価格ベクトル $p \in \boldsymbol{R}_{+}^{\boldsymbol{N}}$ の集合とする。

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \{p \in \boldsymbol{R}_{+}^{\boldsymbol{N}} \mid \text{任意の } i \in \textstyle\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t \text{ について}, p \cdot \omega_i > 0\} \tag{1}$$

任意の経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\{I_t\},\ \{K_t\},\ \{(\succsim_i,\ \omega_i)\})$ に対して，その経済への**資源配分**を $(x_i \in \boldsymbol{R}_{+}^{K_t})_{i=1}^{\infty}$ で

（2）　一般均衡理論でも，2 期モデルで十分にこの問題を扱うことが可能であり，Shell（1971）をはじめとする多くの著者が標準的にこのような単純モデルを用いている。なお Urai and Murakami（2015）では，一般化した設定の下で議論を行った。

図１　２期１財の世代重複構造



表す。これは，その経済の各主体に対して，その主体の消費可能なベクトル $x_i \in \boldsymbol{R}_+^{K_t}$ を割り当てたものである。資源配分 $(x_i \in \boldsymbol{R}_+^{K_t})_{i=1}^{\infty}$ が

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \tag{2}$$

であるとき，$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ は**実現可能**であるという。

2.1　均衡

政府による非負の資産移転（貨幣供給）を実現する貨幣的均衡が，世代重複モデルが描こうとする最重要問題の一つであることは論を俟たない。消費主体のみからなるこの経済において，均衡とは，与えられた価格と非負の資産移転の下での効用最大化と，資源配分の実現可能性によって定義される。

実現可能な資源配分 $(x_i^* \in \boldsymbol{R}_+^{K_t})_{i=1}^{\infty}$ について，任意の主体 $i \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ に対し，x_i^* が集合

$$\{x_i \in \boldsymbol{R}_+^{K_t} \mid p^* \cdot x_i \leqq p^* \cdot \omega_i + M_{\mathcal{E}}^*(i)\} \tag{3}$$

における $\succsim_i$ の意味での最大要素であるとき，価格ベクトル $p^* \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$，**非負資産移転関数**$M_{\mathcal{E}}^* : \boldsymbol{N} = \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t \to \boldsymbol{R}_+$，および資源配分 $(x_i^* \in \boldsymbol{R}_+^{K_t})_{i=1}^{\infty}$ の組を，$\mathcal{E}$ の**貨幣的 Walras 均衡**と呼ぶ。本稿では，$M_{\mathcal{E}}^*$ を**貨幣供給**ではなく，**非負の資産移転**と呼ぶ。経済のダイナミクスに完全予見の仮定を認める場合，両者は一致する[(3)]が，そうでない場合は，各期毎の貨幣供給の表現が必要となるからである。Esteban and Millán（1990）の分類に沿って述べると，貨幣的均衡とは厳密に正の資産移転下の競争均衡を指すが，本稿では，非負の資産移転下の競争均衡，すなわちすべての i について $M_{\mathcal{E}}^*(i) \geqq 0$

(3)　完全予見の成立する世代重複経済では，$M_{\mathcal{E}}^*$ が示す非負の資産移転は貨幣供給の抽象概念になっている。

であるときの競争均衡資源配分を，貨幣的 Walras 均衡資源配分と呼ぶ。これら貨幣的 Walras 均衡資源配分のすべてからなる集合を，$\mathcal{M}\mathcal{W}alras(\mathcal{E})$ と記する。

3　レプリカ経済におけるコア収束

通常の Arrow-Debreu 型有限経済において，Walras 均衡資源配分は Pareto 最適であり（厚生経済学の第一基本定理），任意の Pareto 最適な資源配分は資産移転を許容した下での Walras 均衡資源配分となる（厚生経済学の第二基本定理）。そして Pareto 最適な資源配分の概念をもう一段強めた，コア資源配分に関して，有限経済ではレプリカ経済における競争均衡へのコア収束定理（Debreu and Scarf 1963）が成立することが知られている。このレプリカコア資源配分と競争均衡との一致を示したのが，Debreu-Scarf のコア収束定理である。

一方，世代重複経済においては，貨幣が存在する場合はもとより貨幣が存在しない場合も，厚生経済学の基本定理は弱い意味でしか成立しない（Balasko and Shell 1980 および Esteban 1986）。したがって有限経済のような通常のコア資源配分では，二重無限下の競争均衡を特徴付けることができない（Esteban 1986）。しかしながら，コア概念や Pareto 最適性で特徴付けができないということは，我々が貨幣を含めた均衡成立のメカニズムについて，少なくとも協力ゲーム的な基盤を持ち得ないということを意味する。最適性やコアといった概念に最小限の変更を加えてでも，その特徴付けを与えることは重要な課題であり，実際，様々な形でそのような取り組みがなされてきた。貨幣的均衡と弱 Pareto 最適性（Balasko and Shell 1980）の関係，貨幣を含まない場合における，レプリカ short-term core 収束定理（Aliprantis and Burkinshaw 1990）や，short-run core 一致定理（Chae 1987）はその例である。本節では，世代重複モデルにおける，競争均衡資源配分とある種のコア資源配分との一致定理を示した諸研究をまとめ，貨幣的均衡とそれらコア概念との関係性を整理する。

3.1　最適性

世代重複モデルにおいて，厚生経済学の基本定理は弱い意味でしか成立しないと述べたが，鍵となるのは次の弱 Pareto 最適性[(4)]の概念である。

弱 Pareto 最適性（Balasko and Shell 1980）

以下の二条件を満たすような他の資源配分 $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在しないとき，資源配分 $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ は弱 Pareto 最適である。

---

(4)　弱 Pareto 最適性は，short-term optimality（Aliprantis and Burkinshaw 1990）や short-run optimality（Chae and Esteban 1989）とも呼ばれている。

(i)　有限人を除く $i \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ について，$y_i = x_i$ であり，$\sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$。

(ii)　すべての $i \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ について，$y_i \succsim_i x_i$ かつ，少なくとも一人について $y_i \succ_i x_i$。

すなわち，世代重複経済において，貨幣的 Walras 均衡資源配分であれば弱 Pareto 最適性を満たし，弱 Pareto 最適な資源配分は負の資産移転を含む Walras 均衡資源配分である（Balasko and Shell 1980 および Esteban 1986）。

3.2　コア資源配分

非貨幣的世代重複モデルにおける，Walras 均衡資源配分へのコア一致問題を扱った論文としては，Chae（1987），Aliprantis and Burkinshaw（1990），Chae and Esteban（1993）が挙げられる。これらのうち，Chae（1987）と Chae and Esteban（1993）は，測度空間上の極限定理として，short-run core と呼ばれるコア資源配分と競争均衡資源配分との同値定理を示している。本稿では，Debreu-Scarf の収束定理と同様のレプリカコア収束の手法に焦点を当てて議論を行うため，この二論文の詳細には立ち入らない。ここでは，Aliprantis and Burkinshaw（1990）の short-term core 資源配分，および Urai and Murakami（2015）の有限コア資源配分を扱うことにする。

経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\}, \{K_t\}, \{(\succsim_i, \omega_i)\})$ における消費者の**結託**を，$S \subset \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ で表す。このとき，以下のように定義されるのが，通常のコア資源配分である。

コア資源配分

経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\}, \{K_t\}, \{(\succsim_i, \omega_i)\})$ において，以下の条件を満たすいかなる結託 S および他の資源配分 y も存在しないような，実現可能な資源配分 x を，**コア資源配分**という。

(a)　$\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$。

(b)　すべての $i \in S$ について，$y_i \succsim x_i$。

(c)　少なくとも一人の $i \in S$ について $y_i \succ x_i$。

これらコア資源配分すべてからなる集合を，経済 $\mathcal{E}$ における**コア**と呼び，$\mathcal{C}ore(\mathcal{E})$ で表す。

これに対して，本稿では結託の人数を有限に限った次の資源配分を考える。なおこれは，Chae and Esteban（1989）をはじめとする諸研究において bounded core 資源配分と呼ばれる資源配分と同じものである。

有限コア資源配分

経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\}, \{K_t\}, \{(\succsim_i, \omega_i)\})$ において，以下の条件を満たすいかなる結託 S および他の資源配分 y も存在しないような，実現可能な資源配分 x を，**有限コア資源配分**という。

(f)　$S \subset \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ を有限集合とする。

(a)　$\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$。

(b)　すべての $i \in S$ について $y_i \succsim x_i$。

(c)　少なくとも一人の $i \in S$ について $y_i \succ x_i$。

有限コア資源配分すべてからなる集合を，経済 $\mathcal{E}$ における**有限コア**と呼び，$\mathcal{F}core(\mathcal{E})$ で表す。この有限コア資源配分の定義を利用した，一種のレプリカ有限コア資源配分によって，貨幣的 Walras 均衡資源配分が特徴付けられることになる。

一方, 非貨幣的世代重複モデルにおいては, Aliprantis and Burkinshaw (1990) が, 次の short-term core 資源配分を用いた，非貨幣的 Walras 均衡資源配分へのレプリカコア収束定理を示している。

Short-term core 資源配分　(Aliprantis and Burkinshaw 1990)

経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\},\ \{K_t\},\ \{(\succsim_i,\ \omega_i)\})$ において，以下の条件を満たすいかなる結託 S および他の資源配分 y も存在しないような，実現可能な資源配分 x を，**short-term core 資源配分**と言う。

(f′)　有限人を除くすべての $i \in S$ について $y_i = x_i$。

(a)　$\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$。

(b)　すべての $i \in S$ について $y_i \succsim x_i$。

(c)　少なくとも一人の $i \in S$ について $y_i \succ x_i$。

これらコア資源配分の定義上共通して定められる条件（a）（b）（c）が結託 S に関して成立するとき，S は資源配分 x を**改善する**と言う。

ここで，short-term core 資源配分が，正の資産移転を実現するような貨幣的均衡を排除してしまうことを確認しておく。いま，実現可能な正の資産移転 Walras 均衡資源配分 x があるとする。t 期目に一世代前の主体に正の資産移転を行っている主体 t（$t \geqq 2$）について，t 世代以降の主体全員からなる結託 S を考える。t を除く $i \in S$ については，$y_i = x_i$ とし，$y_t = \omega_t$ とすると，y は short-term core 資源配分の条件（f′）（a）（b）（c）を満たし，貨幣的均衡資源配分 x を改善できることになる。(5)

3.3　レプリカ経済

経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\}, \{K_t\}, \{(\succsim_i, \omega_i)\})$ における実現可能な資源配分 $x = (x_i \in \boldsymbol{R}_+^{K_t})_{i=1}^{\infty}$ について，初

(5)　なお，Chae（1987），Chae and Esteban（1993）の short-run core 資源配分に関しても，同様の論理で貨幣的 Walras 均衡資源配分を排除してしまうことが確認できる。

期保有 $\omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ を $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ で置き換えた経済を，$\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ で表す。すなわち，$\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ とは，$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の初期保有のみが x に変更され，その他はすべて元の経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の設定と変わらないような経済を表す。したがって，$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega)$ である。本稿では次のようなレプリカ経済を考える。

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x) \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega) \tag{4}$$

これは，任意の $m \in \boldsymbol{N}$ および $n \in \boldsymbol{N}$ について，経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ を m 倍した，m 倍レプリカ経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x)$ の主体すべてと，経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega)$ を n 倍した，n 倍レプリカ経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega)$ の主体すべてから構成される経済である。

経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ への資源配分 y に対して，経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x)$ に対する y の m 倍レプリカ資源配分 y^m とは，すべてのレプリカ経済の主体に対して，元の経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ における，y の下での資源配分をそのまま与えたものを表す。同様に，経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ および $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega)$ 共通の資源配分 y に対して，経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x) \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega)$ に対する y の $m+n$ 倍レプリカ資源配分 y^{m+n} とは，すべてのレプリカ経済の主体に対して，元の経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$ あるいは $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega)$ における，y の下での資源配分をそのまま与えたものを表す。

4　貨幣的 Walras 均衡資源配分へのレプリカコア収束定理

ここまで導入してきた概念に基づいて，以下のレプリカ有限コア資源配分を考える。

$$\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x) \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega)) \tag{5}$$

すなわち，実現可能なターゲット資源配分 x が初期保有として与えられた場合の m 倍レプリカ経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x)$ から有限人，初期保有が ω である元々の経済の n 倍レプリカ経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega)$ から有限人ずつ選んだ，いかなる結託によっても改善されないような x の $m+n$ 倍のレプリカ資源配分 x^{m+n} である。これは，属する経済に応じて割り当てられる，初期保有 ω あるいはターゲット資源配分 x のどちらかを元手に，有限人の主体が再契約を図っても，いかなる契約の組み直しも弱 Pareto 改善を生むことがないような資源配分である，と言える[(6)]。このとき，次の貨幣的 Walras 均衡資源配分へのコア同値定理を得る。

Theorem 1（**レプリカコア収束定理**）：経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の実現可能な資源配分 x について，その $m+n$ 倍のレプリカ資源配分 x^{m+n} が，任意の $m \in \boldsymbol{N}$ と $n \in \boldsymbol{N}$ で $x^{m+n} \in \boldsymbol{\mathcal{F}core}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(x) \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega))$ であることは，$x \in \boldsymbol{\mathcal{MW}alras}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$，すなわち x が貨幣的 Walras 均衡資源配分であることの必要十分条件である。

---

(6)　なお定義から明らかであるが，この概念は Debreu-Scarf のように equal treatment 性を前提としない。

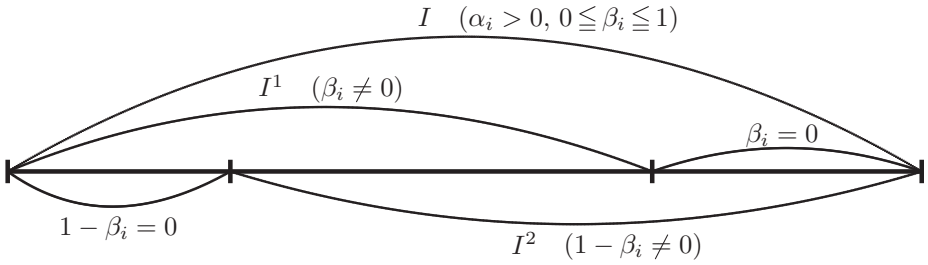
Proof：本稿では，Urai and Murakami（2015）においては記述できなかった証明の詳細を，2 期モデルという利点を活かしできる限り見通しの良い形で，また重要な数学的本質をより強調する形で与える。

（十分性） 資源配分 $x^* = (x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ を，価格 p^* と非負資産移転関数 $M_{\mathcal{E}}^*$ の下での $\mathcal{MWalras}(\mathcal{E})$ の要素とする。ここで，ある $m, n \in \boldsymbol{N}$ について，レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(x^*) \oplus \mathcal{E}^n(\omega)$ における x^* の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分を改善する結託 $S = S_1 \cup S_2$ が存在するとする。結託 S は，x^* を初期保有とする m 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^m(x^*)$ における結託 S_1 に属する主体と，元の経済の n 倍レプリカ経済 $\mathcal{E}^n(\omega)$ における結託 S_2 に属する主体で構成される。S が均衡資源配分 x^* を改善することから，$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S_1} x_i^* + \sum_{i \in S_2} \omega_i$ であり，すべての $i \in S$ について $x_i \succsim_i x_i^*$ かつある $j \in S$ について $x_j \succ_j x_j^*$ である $(x_i)_{i \in S}$ を考えることができる。ここで，選好の狭義単調性より均衡価格 p^* は厳密に正であることに注意すると，均衡条件から，$x_i \succ_i x_i^*$ ならば $p^* \cdot x_i > p^* \cdot x_i^*$ である。さらに，条件（E.3）における選好の諸条件より，$x_i \succsim_i x_i^*$ ならば $p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot x_i^*$ である。したがって，すべての $i \in S$ について $p^* \cdot x_i > p^* \cdot x_i^*$ が成立するが，これは $p^* \cdot (\sum_{i \in S_1} x_i + \sum_{i \in S_2} x_i) > p^* \cdot \sum_{i \in S_1} x_i^* + p^* \cdot \sum_{i \in S_2} x_i^* \geqq p^* \cdot (\sum_{i \in S_1} x_i^* + \sum_{i \in S_2} \omega_i)$ となることを意味し，$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S_1} x_i^* + \sum_{i \in S_2} \omega_i$ であることに矛盾する。

（必要性） 経済 $\mathcal{E} = (\{I_t\}, \{K_t\}, \{(\succsim_i, \omega_i)\})$ における $\bar{x} = (\bar{x}_i)$ を，任意の $m, n \in \boldsymbol{N}$ について，$\bar{x}$ の $(m+n)$ 倍レプリカ資源配分が $\mathcal{Fcore}(\mathcal{E}^m(\bar{x}) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ に属するような資源配分であるとする。証明の便宜上，$I(t) = \bigcup_{s=1}^{t} I_s$ で第 1 世代から第 t 世代までの全主体を含む集合を表し，$K(t) = \bigcup_{s=1}^{t} K_s$ で $I(t)$ に属する主体に利用可能なすべての財の集合を表す。すべての $i \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ について，Γ_i を $\Gamma_i = \{\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2 \mid \bar{x}_i + z_i^1 \succ_i \bar{x}_i,\ \omega_i + z_i^2 \succ_i \bar{x}_i,\ 0 \leqq \beta_i \leqq 1\} \subset \boldsymbol{R}^{K_t}$ と定義する。ここで，各 $t \in \boldsymbol{N}$ について，Γ_i の有限和 $\bigcup_{i \in I(t)} \Gamma_i \subset \bigcup_{s=1}^{t} \boldsymbol{R}^{K_s} \approx \boldsymbol{R}^{K(t)}$ の凸包 $\Gamma(t)$ を考える。任意の i について Γ_i は非空凸集合であるので，$\Gamma(t)$ も非空凸であり，その要素を z で表す。$\alpha_i \geqq 0$, $\sum_{i \in I(t)} \alpha_i = 1$, および $z_i^1 + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ かつ $z_i^2 + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ をすべての i について満たすとすると，$z = \sum_{i \in I(t)} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2)$ と書ける。

Debreu and Scarf（1963, Theorem 3）の証明の手順と同様にして，任意の $t \in \boldsymbol{N}$ について $0 \notin \Gamma(t)$ であることを示す。仮にある $t \in \boldsymbol{N}$ について $0 \in \Gamma(t)$ であるとする。すると，任意の i について $\alpha_i \geqq 0$, $\sum_{i \in I(t)} \alpha_i = 1$ および $z_i^1 + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ かつ $z_i^2 + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ を満たし，$\sum_{i \in I(t)} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1-\beta_i) z_i^2) = 0$ とすることができる。十分大きな k について，a_i^{1k} と a_i^{2k} をそれぞれ $a_i^{1k} > k\alpha_i\beta_i$ と $a_i^{2k} > k\alpha^i(1-\beta^i)$ となる最小の整数であるとする。また，$\alpha_i > 0$ であるすべての $i \in I(t)$ からなる集合を I とする。各 $i \in I$ について，z_i^{1k} を $z_i^{1k} = \frac{k\alpha_i\beta_i}{a_i^{1k}} z_i^1$, z_i^{2k} を $z_i^{2k} = \frac{k\alpha_i(1-\beta_i)}{a_i^{2k}} z_i^2$ と定義する。すると，$z_i^{1k} + \bar{x}_i$ は区間 $[\bar{x}_i,\ z_i^1 + \bar{x}_i]$ の要素であり，$z_i^{2k} + \omega_i$ は区間 $[\omega_i,\ z_i^2 + \omega_i]$ の要素である。

図 2　I^1 と I^2 の和集合は I に等しい



$\beta^i \neq 0$ であるすべての $i \in I$ からなる集合を I^1 とし，$1 - \beta^i \neq 0$ であるすべての $i \in I$ からなる集合を I^2 とする。したがって，$I^1 \cup I^2 = I$ である（図 2 を見よ）。k を無限に大きくしていくと，各 $i \in I^1$ について，$z_i^{1k} + \bar{x}_i$ は $z_i^1 + \bar{x}_i$ に収束し，各 $i \in I^2$ について，$z_i^{2k} + \omega_i$ は $z_i^2 + \omega_i$ に収束する。選好の連続性より，k を十分大きく取ると，すべての $i \in I^1$ について $z_i^{1k} + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$, およびすべての $i \in I^2$ について $z_i^{2k} + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ とできる。そのような k を一つ固定すると，以下の等式を得る。

$$
\begin{aligned}
0 &= k \sum_{i \in I} \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1 - \beta_i) z_i^2) = \sum_{i \in I} k \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1 - \beta_i) z_i^2) \\
&= \sum_{i \in I^1 \setminus I^2} k \alpha_i \beta_i z_i^1 + \sum_{i \in I^1 \cap I^2} k \alpha_i (\beta_i z_i^1 + (1 - \beta_i) z_i^2) + \sum_{i \in I^2 \setminus I^1} k \alpha_i (1 - \beta_i) z_i^2 \qquad (6) \\
&= \sum_{i \in I^1 \setminus I^2} a_i^{1k} z_i^{1k} + \sum_{i \in I^1 \cap I^2} (a_i^{1k} z_i^{1k} + a_i^{2k} z_i^{2k}) + \sum_{i \in I^2 \setminus I^1} a_i^{2k} z_i^{2k}
\end{aligned}
$$

経済 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の $\Big((\max_{i \in I}\ a_i^{1k}) + (\max_{i \in I}\ a_i^{2k})\Big)$ 倍レプリカ経済を考える。I^1 に属する主体それぞれを a_i^{1k} 倍レプリカし，その各主体に $z_i^{1k} + \bar{x}_i$ を割り当て，I^2 に属する主体それぞれを a_i^{2k} 倍レプリカし，その各主体に $z_i^{2k} + \omega_i$ を割り当てる結託を組むとする。等式 (6) と，すべての $i \in I^1$ について $z_i^{1k} + \bar{x}_i \succ_i \bar{x}_i$ であること，およびすべての $i \in I^2$ について $z_i^{2k} + \omega_i \succ_i \bar{x}_i$ であることから，この結託が資源配分 $(\bar{x}_i)$ を改善することは明らかである。しかし，このことは $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(\bar{x}) \oplus \boldsymbol{\mathcal{E}}^n(\omega))$ の定義に矛盾する。したがって各 $t \in \boldsymbol{N}$ について，$0 \notin \Gamma(t)$ である。

価格の集合 $\pi(t)$ を, $\pi(t) = \{p \in \boldsymbol{R}^{K(t)} \times \boldsymbol{R} \times \cdots \mid$ すべての $z \in \Gamma(t)$ について $p \cdot z \geqq 0\}$ と定義する。$\pi(t)$ は $\boldsymbol{R}^{K(t)} \times \boldsymbol{R} \times \cdots = \boldsymbol{R}^\infty$ の閉部分集合であり, 分離超平面定理より $p \in (\boldsymbol{R}^{K(t)} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R} \times \cdots$ なる $p \in \pi(t)$ が存在するので，非空である[(7)]。任意の $i \in I(t)$ について，選好の狭義単調性を仮定していることから，価格が負の場合，0 と $\bar{x}_i$ より好ましい資源配分の集合を分離できないことは明らかであり，任意の $p \in \pi(t)$ について，$\mathrm{Pr}_{K(t)}\, p \in \boldsymbol{R}_+^{K(t)}$ が成り立つ[(8)]。さらに，$p \neq 0$ なる $p \in \pi(t)$ が $\mathrm{Pr}_{K(t)}\, p \in \boldsymbol{R}_{++}^{K(t)}$ を満たすことを示す。実際，各 $i \in I(t)$ について $\mathrm{Pr}_{K(t)}\, p$ は，$\bar{x}_i$ より好ま

(7)　$\pi(t)$ は価格空間 $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ とは独立に定まることに注意せよ。

(8)　Pr_A で $A \subset \boldsymbol{N}$ 上の座標によって定まる部分空間への射影を表す。

しい資源配分の集合を支持する価格ベクトルである。したがって，ある財 $\kappa \in K_s \subset K(t)$ について $\mathrm{Pr}_{\{\kappa\}}\, p = 0$ が成り立つとすると，価格 p の下で資産が厳密に正となる主体 $i \in I_s$ が存在する限り，$+\epsilon > 0$ を第 κ 座標，$-\delta < 0$ を p で厳密に正に評価されている財の座標として，資源配分 $\bar{x}^i + (0, \cdots, 0, +\epsilon, 0, \cdots, 0, -\delta, 0, \cdots)$ は，選好の狭義単調性より i にとって $\bar{x}_i$ と比べて厳密に好ましい資源配分でありながら，価格 p では支持されないことになる。また，任意の主体について p の下での資産が実際のところ正となることは，次のようにして保証することができる。$p \in \boldsymbol{R}_+^{K(t)} \setminus \{0\}$ であり，$K(t)$ の各財について，正の初期保有を持つ主体が $I(t)$ の中に少なくとも一人存在することから，少なくとも一人の主体 $j \in I_{s'} \subset I(t)$ が存在して，p の下での j の資産は厳密に正であるとしてよい。上記の議論を通じて，$K_{s'}$ の任意の財価格が正になることを示すことができる。したがって，（E.3）より各主体の初期保有が厳密に正であることから，$\{s', s'+1\}$ の少なくともどちらか一方の期を生きるすべての主体の資産は，p の下で正となる。この操作を繰り返すことで，$I(t)$ の全主体の資産は p の下で正であることが示される[(9)]。すなわち，$\pi(t) \subset (\boldsymbol{R}_{++}^{K(t)} \cup \{0\}) \times \boldsymbol{R} \times \cdots \subset \boldsymbol{R}^\infty$ である。続いて，厳密に正の価格 $p^* \in \bigcap_{t \in \boldsymbol{N}} \left(\pi(t) \cap (\boldsymbol{R}^{K(t)} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R} \times \cdots\right)$ が存在することを示す。表記を簡便にするため，以下の議論では $D(t) = \pi(t) \cap (\boldsymbol{R}^{K(t)} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{R} \times \cdots$ であるとする。各 $\Gamma(t) \subset \boldsymbol{R}^{K(t)}$ の定義より，$\boldsymbol{R}_\infty$ 上で $\Gamma(1) \subset \Gamma(2) \subset \Gamma(3) \subset \cdots$ である。したがって，$\boldsymbol{R}^\infty$ 上で $\pi(1) \supset \pi(2) \supset \pi(3) \supset \cdots$ が成り立ち，$\bigcap_{s=1}^t \pi(s) = \pi(t)$ である。各 $t \in \boldsymbol{N}$ について，$D(t) \subset \boldsymbol{R}_{++}^{K(t)} \times \boldsymbol{R} \times \cdots \subset \boldsymbol{R}^\infty$ から価格 $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \cdots)$ を取る（図 3 を参照）。

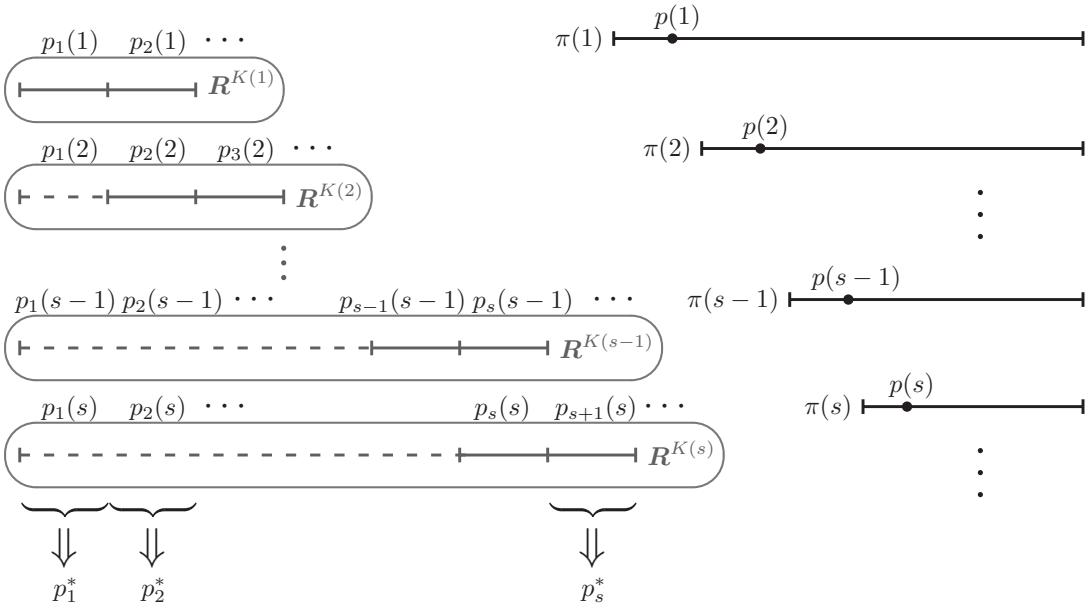
各 $t \in \boldsymbol{N}$ について，コンパクト集合 $\Delta^{K(t)}$ を $\Delta^{K(t)} = \{q_t \mid q_t \in \boldsymbol{R}^{K(t)},\ \|q_t\| = 1\}$[(10)] と定義する。さらに，各 $s, t \in \boldsymbol{N}$, $s \leqq t$ について，写像 $h_{st} : D(t) \to \Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\, \pi(s)$ を $h_{st}(p) = \frac{\mathrm{Pr}_{K(s)}\, p}{\|\mathrm{Pr}_{K(s)}\, p\|}$ と定める[(11)]。ここで $\Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\, \pi(s)$ がコンパクト集合であることに注意を促しておく。さらに，h_{st} の下での $D(t)$ の像もコンパクトである。コンパクト集合でないと仮定すると，$y^* \notin h_{st}(D(t))$ なる点 $y^* \in \Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\, \pi(s)$，および $y^\nu \to y^*$ となる $h_{st}(D(t))$ 上の点列 $\{y^\nu = h_{st}(q^\nu)\}$ を取ることができる。$\pi(t)$ は錐であるので，q^ν を $\|q^\nu\| = 1$ に基準化することができ，$D(t)$ の要素である $q^* = \lim q^\nu$ を得る。このことと，h_{st} の連続性より $h_{st}(q^*) = y^*$ を得るが，これは矛盾であり，すなわち $h_{st}(D(t))$ はコンパクト集合である。$\Delta^{K(1)} \cap \mathrm{Pr}_{K(1)}\, \pi(1)$ がコンパクト集合であるから，$t \to \infty$

（9） 本稿では，（E.2）（E.3）に見るように，2 期モデル，初期保有が厳密に正，といった強い条件を用いたが，より一般的な世代重複モデルにおける resource-relatedness 条件があれば十分であることに注意を促しておく。例えば Balasko and Shell（1980，p.290）や Arrow and Hahn（1971，p.117）を参照せよ。

（10） 本稿では，$\|\cdot\|$ で部分空間のユークリッドノルムを表すとする。

（11） 各 $t \in \boldsymbol{N}$ について，$h_{tt}(D(t)) \subset \Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\, \pi(s)$ を X_t と表す。すると，族 $(X_t)_{t \in \boldsymbol{N}}$ と写像の族 (h_{st}), $s \leqq t$, $s, t \in \boldsymbol{N}$ はコンパクト空間の逆系を形成する。Bourbaki（1966，Chapter I, §9，no.6，Proposition 8）より，逆極限 $X = \varprojlim X_t$ は非空となり，本稿の p^* は，このような逆極限 X の要素であると見ることができる。

図 3　極限価格 p^* の構成



とすると，$h_{1t}(p(t))$ は極限 $\hat{p}_1^* \in h_{11}(D(1)) \subset \left(\Delta^{K(1)} \cap \mathrm{Pr}_{K(1)}\,\pi(1)\right)$ を持つ。そこで，$\boldsymbol{N}(1)$ を $h_{1t}(p(t))$ が $\hat{p}_1^*$ に収束する $\boldsymbol{N}$ の共終な部分集合として，$\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}(1)}$ を取る。さらに $p_1^* \in \boldsymbol{R}^{K(1)}$ を $p_1^* = \hat{p}_1^*$ と定義する。続いて，$\Delta^{K(2)} \cap \mathrm{Pr}_{K(2)}\,\pi(2)$ がコンパクトであることから，$t \to \infty$ とすると，$\boldsymbol{N}(2)$ を 2 以上の整数からなる $\boldsymbol{N}(1)$ の共終な部分集合として，$\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}(1)}$ の部分列 $\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}(2)}$ を取ることができ，$h_{2t}(p(t))$ も極限 $\hat{p}_2^* \in h_{22}(D(2)) \subset \Delta^{K(2)} \cap \mathrm{Pr}_{K(2)}\,\pi(2)$ を持つ。$p_2^* \in \boldsymbol{R}^{K(2)\setminus K(1)}$ を $\frac{1}{\|\mathrm{Pr}_{K(1)}\,\hat{p}_2^*\|}\mathrm{Pr}_{K(2)\setminus K(1)}\,\hat{p}_2^*$ と定義する。このように，一般に各 $s \in \boldsymbol{N}$ について $\Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\,\pi(s)$ がコンパクトであることから，$t \to \infty$ とすると，$\boldsymbol{N}(s)$ を s 以上の整数からなる $\boldsymbol{N}(s-1)$ の共終な部分集合として，$\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}(s-1)}$ の部分列 $\{p(t)\}_{t\in\boldsymbol{N}(s)}$ を取ることができ，$h_{st}(p(t))$ は極限 $\hat{p}_s^* \in h_{ss}(D(s)) \subset \Delta^{K(s)} \cap \mathrm{Pr}_{K(s)}\,\pi(s)$ を持つ。したがって，$p_s^* \in \boldsymbol{R}^{K(s)\setminus K(s-1)}$ を $p_s^* = \frac{1}{\|\mathrm{Pr}_{K(1)}\,\hat{p}_s^*\|}\mathrm{Pr}_{K(s)\setminus K(s-1)}\,\hat{p}_s^*$ と定義することができる。この操作を繰り返すことで，極限価格 $p^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots)$ を得る。各 $s \in \boldsymbol{N}$ について，$\frac{(p_1^*,\cdots,p_s^*)}{\|(p_1^*,\cdots,p_s^*)\|} = \hat{p}_s^*$ は $h_{ss}(D(s))$ の要素であるから，p^* は $h_{ss}^{-1}(\hat{p}_s^*) \subset D(s)$ の要素であり，$p^* \in \bigcap_{t\in\boldsymbol{N}} D(t)$ である。

$x_i \succ_i \bar{x}_i$ であることは，$x_i - \omega_i$ および $x_i - \bar{x}_i$ が Γ_i の要素であることを意味するので，$p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot \omega_i$ かつ $p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot \bar{x}_i$ である。選好の狭義単調性より，x_i を $\bar{x}_i$ に十分近く取れるので，$p^* \cdot \bar{x}_i \geqq p^* \cdot \omega_i$ とできる。すべての主体 i について，$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(i) \geqq 0$ を $M_{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(i) = p^* \cdot \bar{x}_i - p^* \cdot \omega_i$ と定義する。すると，$p^* \cdot \bar{x}_i = p^* \cdot \omega_i + M_{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ を得る。加えて，(E.3) よりすべての i について $\omega_i \in \boldsymbol{R}_{++}^{K_t}$ であるから，$p^* \cdot \omega_i > 0$ である。$x_i \succ_i \bar{x}_i$ であることは，$p^* \cdot x_i \geqq p^* \cdot \bar{x}_i$ を意味するので，選好の連続性と

$p^* \cdot \omega_i + M^*_{\mathcal{E}}(i) > 0$ より，任意の i について，価格 p^* および非負資産移転 $M^*_{\mathcal{E}}$ の下で，$\bar{x}_i$ は個人の最大化点である。 ■

本稿が捉えようとするのは，**非負の資産移転**を許容する貨幣的 Walras 均衡資源配分であり，貨幣価値が 0 である非貨幣的 Walras 均衡資源配分もその範疇に含むことに，再度注意を促しておく。ここで，非貨幣的 Walras 均衡資源配分へのレプリカコア収束定理を示した，Aliprantis and Burkinshaw（1990）の short-term core 資源配分を手掛かりとして，本稿の $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^m(x) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ の特色を探ってみたい。

世代重複モデルでは，均衡資源配分の特徴付けにおいて，Pareto 最適性やコア資源配分の概念をそのまま用いることができず，それらを弱める形で均衡に迫る必要がある。その最も典型的な概念が，主体間の交換を有限人にのみ許すという，**弱 Pareto 最適性**および**有限コア資源配分**である。なお，コア資源配分と Pareto 最適な資源配分との間には包含関係が成立するが，有限コア資源配分は必ずしも弱 Pareto 最適性を満たさない（Chae and Esteban 1989）。Short-term core 資源配分や，Chae（1987）の short-run core 資源配分は，**弱 Pareto 最適な有限コア資源配分**よりも強い概念となっており，これら諸概念の関係は Chae and Esteban（1993）に簡潔にまとめられている。本定理の $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^m(x) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ という概念は，$\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}(x))$ と $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}(\omega))$ を掛け合わせるような形でレプリカを取ったものであるが，$\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}(x))$ の要素となるような資源配分のすべてからなる集合 $\{x \mid x \in \boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}(x))\}$ は，弱 Pareto 最適な資源配分の集合と同じものになる。すなわち，$\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^m(x) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ は**有限コア資源配分**と**弱 Pareto 最適性**という，世代重複モデルにおける基本概念にのみ基づいたレプリカコア資源配分なのである。ただし，非貨幣的 Walras 均衡を扱った short-term core 資源配分の場合と同様，これは**弱 Pareto 最適な有限コア資源配分**をレプリカした $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^n(x)) \cap \boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^n(\omega))$ よりも強い概念となっている（Urai and Murakami 2015, Appendix）。Short-term core 資源配分の特徴は条件（f′）にあるが，これは，無限人の資源配分についてはターゲット資源配分に据え置いた上で，初期保有を元手とした有限人の結託を考えるというものであり，Chae and Esteban（1993）はこの状況を指して bounded perturbation と呼んでいる。一方，本稿の $\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^m(x) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ は，ターゲット資源配分を元手とする人々と，初期保有資源配分を元手とする人々からなる有限人の結託を考えるコア資源配分であり，初期保有資源配分とターゲット資源配分が同時に結託の構成に関わるという点で，両コア概念は共通している。したがって，貨幣的 Walras 均衡を特徴付ける鍵は，$\mathcal{E}(x)$ と $\mathcal{E}(\omega)$ という「二つの異なる経済間の結託」という操作にあると言えよう。Samuelson は，世代重複経済において，通常の市場取引では実現し得ない Pareto 改善をもたらす貨幣の働きを，「社会契約」という語で表した。$\boldsymbol{\mathcal{F}core}(\mathcal{E}^m(x) \oplus \mathcal{E}^n(\omega))$ という概念が内包する経済 $\mathcal{E}(x)$ と経済 $\mathcal{E}(\omega)$ の隔たりは，「社会契約」としての貨幣が導くある種の跳躍を示唆しているのではないだろうか。

本稿の主題は貨幣的均衡資源配分であり，資産移転関数 $M^*_{\mathcal{E}}(i)$ が非負の値を取る場合を考えたが，$M^*_{\mathcal{E}}(i)$ が負の値を取り得るような均衡，すなわち資産移転 Warlas 均衡を議論の対象とすることも考えられるだろう。しかし，弱 Pareto 最適な資源配分が，そのまま負の資産移転を許した資産移転 Walras 均衡資源配分になることは先に述べた通りである（**3.1 最適性**の末文）。すなわち，資産移転 Walras 均衡資源配分については，弱 Pareto 最適性による特徴付け，換言すれば世代重複モデルにおける厚生経済学の基本定理に相当する命題以上のことを述べることはできず，コア収束概念は議論上必要とならない。このことから，非負の資産移転によって実現される貨幣的均衡の特徴付けは，コア収束概念を有効とする議論の境界に位置する問題であるとも言える。

5　社会契約の非協力ゲーム理論

前節までの議論では，弱 Pareto 最適性および有限コア資源配分といった基本的概念を示しながら，貨幣的 Walras 均衡へレプリカコア収束する，有限コア資源配分を確認した。本節では，非協力ゲーム理論における極めて類似した問題を紹介し，その取り扱いとの比較を通じて，前節の有限コア資源配分の意味を考察したい。

前世紀，主として 1980〜90 年代を中心に取り組まれたゲーム理論研究のテーマの一つが，「世代重複モデルと社会規範」であった（例えば Kandori 1992a，Kandori 1992b）。それら諸研究の中で，Kotlikoff et al.（1988）が非常に興味深い結果を述べている。それは，世代間の再分配を実現する社会契約下の均衡が，subgame perfect Nash 均衡として特徴付けられる，というものである。協力ゲーム的なコア概念では，とある世代以降が結託して貨幣を拒否することで貨幣的均衡の特徴付け不可能となってしまうのに対して，Samuelson が強調したような社会契約の可能性を，「自身が裏切ったときには，自身もまた裏切られる」という罰則的な概念と構造を導入し，Nash 均衡として表現したという点で意義深い。また，世代重複モデルにおける均衡資源配分について，非協力ゲームと協力ゲーム双方の観点から論じた類似研究として，Esteban and Sákovics（1993）がある。これは，世代間の資産移転を実現する制度の導入にコストが掛かる場合，正の資産移転を実現するような戦略が唯一の定常均衡として特徴付けられ，またそのような資産移転は consistent core となることを示すものであった。彼らの結論と対比的に述べれば，世代重複モデルにおける貨幣的 Walras 均衡は，「貨幣を導入した世代に後続するいかなる世代も，現状の貨幣政策を破棄して新たな社会契約を結ぶインセンティブを持たないような，subgame perfect Nash 均衡」として描くことができる。このようなゲーム理論の知見を踏まえ，前節で示したレプリカ有限コア資源配分としての貨幣的 Walras 均衡を眺めれば，レプリカ有限コア収束定理を次のように解釈することができるだろう。

生まれ持ったもののみを元手に，新たな社会契約を結ぼうとする革新的な人々と，既存の社会

契約の下で効用最大化を図る保守的な人々で，経済が構成されていると考えるとき，世代重複モデルにおける貨幣的 Walras 均衡資源配分とは，そのような経済に属するいかなる有限人の結託によっても改善できないような資源配分である。

生まれ持ったものとは初期保有 ω を，既存の社会契約とは資源配分 x を指している。すなわちこれは，$\boldsymbol{\mathcal{E}}^m(\omega)$ に属する主体を革新的な人々，$\boldsymbol{\mathcal{E}}^n(x)$ に属する主体を保守的な人々と捉えた収束定理の解釈となっている。

6　結語

本稿では，世代重複モデルにおける最適性やコアの概念を整理しながら，レプリカコア収束の手法に基づいた貨幣的均衡への接近について，今日までの諸研究をまとめ，またレプリカ有限コア収束定理と絡めて，ゲーム論的な意義と解釈の説明を行った。これにより，経済を有限期生きる主体の連鎖と捉えたとき，世代間の交換を可能とする貨幣が，安定的な均衡をもたらすものとして，永続する経済の中に位置付けられることが明らかとなった。最後に，本研究の今後の展望について概略を述べ，その結びとしたい。

有限経済において，Sonnenschein（1974）が Debreu-Scarf のコア収束定理を用いて価格メカニズムの公理的特徴付けを行ったように，本稿のレプリカ有限コア収束定理を用いることで，世代重複モデルにおける貨幣的メッセージメカニズムの効率性および普遍性に基づいた公理的特徴付けを行うことが可能となる。これは，普遍写像性を用いた Sonnenschein（1974）の手法の今日的解釈として，価格メカニズムの情報効率性を扱った Hurwicz（1960）や Mount and Reiter（1974）といった諸研究とも対応する。有限経済では，均衡を実現する市場メカニズムにおいて「価格」が最も重要な役割を果たすが，世代重複モデルにおいては，「価格と貨幣供給」がその機能を担うことになる。あるいは Thomson（1988）のように，メッセージメカニズムには言及せず，資源配分のみを公理的特徴付けの対象とし，社会選択対応の問題に焦点を絞って議論を行うことも可能であろう。このような公理的特徴付けは，人々の世界観がどのようなものであるときに貨幣的均衡が健全なものとなり得るか，あるいはその世界観についての合意はいかなるものなのか，といった問題を明らかにするはずである。

世代重複モデルにおける貨幣的均衡の議論は，マクロ経済学的な動学理論構築へ精緻なミクロ的見通しを与えるものとして，前世紀から多くの研究を促してきた。しかしながら，今日にしてなお，この枠組みは協力および非協力ゲーム，情報ならびにメカニズムデザインといった様々な観点から，貨幣の多角的側面を描出する重要な手掛かりを我々に与えている。およそ貨幣の問題は，世代重複モデルの二重無限性が切り出したその探求の途上において，深長でありかつ明晰，また古典的であ

り同時に今現在にも至る，新たな知見を我々に要求し，産み出し続けるに違いない。

参 考 文 献

Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1990): "An overlapping generations model core equivalence theorem," *Journal of Economic Theory 50*, 362–380.

Arrow, K. and Hahn, F. (1971): *General Competitive Analysis.* Holden-Day, San Francisco.

Balasko, Y. and Shell, K. (1980): "The overlapping-generations model. I. The case of pure exchange without money," *Journal of Economic Theory 23*, 281–306.

Bourbaki, N. (1966): *General Topology.* Hermann, Paris. English Translation: Springer-Verlag, 1995.

Chae, S. (1987): "Short run core equivalence in an overlapping generations model," *Journal of Economic Theory 43*, 170–183.

Chae, S. and Esteban, J. (1989): "The bounded core of an overlapping generations economy," *International Economic Review 30*, 519–525.

Chae, S. and Esteban, J. (1993): "Core equivalence in an overlapping generations model," *Journal of Economic Theory 59*, 417–425.

Debreu, G. and Scarf, H. (1963): "A limit theorem on the core of an economy," *International Economic Review 4*, 235–246. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, 151–162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Esteban, J. (1986): "A characterization of core in overlapping-generations economies," *Journal of Economic Theory 39*, 439–456.

Esteban, J. and Millán, T. (1990): "Competitive equilibria and the core of overlapping generations economies," *Journal of Economic Theory 50*, 155–174.

Esteban, J. and Sákovics, J. (1993): "Intertemporal transfer institutions," *Journal of Economic Theory 61*, 189–205.

Hahn, F. H. (1971): "Equilibrium with transaction costs," *Econometrica 39*, 417–439.

Hayashi, T. (1976): "Monetary equilibrium in two classes of stationary economies," *Review of Economic Studies 43*, 269–284.

Hicks, J. R. (1969): *A Theory of Economic History.* Oxford University Press, Oxford. 日本語訳：J. R. ヒックス『経済史の理論』1995，新保博／渡辺文夫，講談社学術文庫，Tokyo.

Hurwicz, L. (1960): "Optimality and informational efficiency in resource allocation processes," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, (K. J. Arrow, Karlin, S., and Suppes, P. eds.), Stanford University Press, Stanford. Also in *Readings in Welfare Economics*, edited by K. J. Arrow and T. Scitovsky. Irwin, New York, 1969.

Kandori, M. (1992a): "Social norms and community enforcement," *Review of Economic Studies 59*, 63–80.

Kandori, M. (1992b): "Repeated games played by overlapping generations of players," *Review of Economic Studies 59*, 81–92.

Keynes, J. M. (1930): *A Treatise on Money 1 The Pure Theory of Money.* Macmillan Cambridge University Press / Royal Economic Society, United Kingdom. The Royal Economic Society 1971. 日本語訳：ケインズ全集第 5 巻『貨幣論 I　貨幣の純粋理論』1979, 小泉明／長澤惟恭，東洋経済新報社，Tokyo.

Kiyotaki, N. and Wright, R. (1989): "On money as a medium of exchange," *Journal of Political*

Economy 97, 927–954.

Kotlikoff, L. J., Persson, T., and Sevensson, L. E. O. (1988): "Social contracts as assets: A possible solution to the time-consistency problem," *American Economic Review 78*, 662–677.

Mount, K. and Reiter, S. (1974): "The informational size of message spaces," *Journal of Economic Theory 8*, 161–192.

Okuno, M. and Zilcha, I. (1980): "On the efficiency of a competitive equilibrium in infinite horizon monetary economies," *Review of Economic Studies 47*, 797–807.

Samuelson, P. A. (1958): "An exact consumption loans model of interest with or without social contrivance of money," *Journal of Political Economy 66*(6), 467–482.

Shell, K. (1971): "Notes on the economies of infinity," *Journal of Political Economy 79*, 1002–1011.

Sonnenschein, H. (1974): "An axiomatic characterization of the price mechanism," *Econometrica 42*(3), 425–433.

Thomson, W. (1988): "A Study of Choice Correspondences in Economies with a Variable Number of Agents," *Journal of Economic Theory 46*, 237–254.

Urai, K. and Murakami, H. (2015): "Replica core equivalence theorem: An extension of the debreu-scarf limit theorem to double infinity monetary economies," Discussion Paper No. 14–35-Rev.2, Faculty of Economics and Osaka School of International Public Policy, Osaka University.

Walras, L. (1874): *Eléments d'économie politique pure.* Corbaz, Lausanne. English translation: *Elements of Pure Economics,* London, George Allen and Unwin 1926. 日本語訳：ワルラス『純粋経済学要論——社会的富の理論』1983，久武雅夫，岩波書店，Tokyo.

要旨: 主体および商品の数がともに発散する二重無限の構造を持つ世代重複モデルは，静学的経済分析に貨幣を導入する基本的な枠組みである。このモデルの最も大きな特徴は，「競争均衡が必ずしも Pareto 最適とならない」ことであり，均衡の最適性を回復する上で，貨幣が重要な役割を担うことが知られている。本稿は，世代重複モデルにおける最適性やコア概念に関する諸研究を整理しながら，貨幣的均衡へのレプリカ有限コア収束定理を示し，近接分野の知見を踏まえたその解釈を行う。

キーワード: 貨幣的均衡，世代重複モデル，コア収束定理，レプリカ経済，社会契約