「三田学会雑誌」108 巻 3 号（2015 年 10 月）

顕示選好理論とスルツキー行列

細矢祐誉*

（初稿受付 2015 年 8 月 20 日，査読を経て掲載決定 2015 年 10 月 1 日）

Revealed Preference Theory and the Slutsky Matrix

Yuhki Hosoya*

Abstract: In this paper, we prove that for any continuously differentiable demand function, the strong axiom of the revealed preference is equivalent to the negative semi-definiteness and symmetry of the Slutsly matrix. To show this, we first prove the existence theorem on a partial differential equation called Shephard's lemma, and then lead a utility function concretely.

1　序論

消費者理論において，主に 1970 年代の論文に，需要関数のスルツキー行列の性質（つまり，半負値定符号性および対称性）と，顕示選好の強公理が，同値であるという主張が散見される（たとえば Kihlstrom, Mas-Colell and Sonnenschein（1976）や Hurwicz and Richter（1979）など）。この主張は，しかし，証明が載っている文献がひとつも見当たらない。強公理からスルツキー行列の半負値定符号性と対称性を出すやり方は多くの文献にある。しかし，逆は容易には示せない。Hurwicz and Uzawa（1971）はこのスルツキー行列の性質に，所得についてのリプシッツ条件（この条件は違う形で Uzawa（1960）や Mas-Colell（1977）にも出てくるが，Mas-Colell の方が仮定が弱い）を追加すれば効用関数が導けるということを示した。また Hosoya（2013）はスルツキー行列の階数条件を追加す

本稿の出版に際し，匿名の査読者の方から非常に有益な助言をいただいた。ここに感謝の意を表したい。

*　関東学院大学経済学部
College of Economics, Kanto Gakuin University

れば滑らかな効用関数が導けることを示した。しかしこれらはどれも「条件を追加すれば」示せる，という主張であり，スルツキー行列の 2 性質のみから強公理，あるいはそれと同値であるが，対応する選好の存在が示せるか，という問題は未解決のままであった。

本稿はこの問題を完全に解決する。つまり，与えられた需要関数が連続微分可能でスルツキー行列が半負値定符号かつ対称であるとき，対応する効用関数を計算するためのルールを具体的に与える。このルールの存在によって，上で述べた主張は実は正しかったことがわかる。これに関連して，我々はもうひとつの同値条件を与える。つまり，

$$Du(p) = f(p, u(p))$$

という形の偏微分方程式について，その任意の初期条件に対応する凹関数の解が存在することが，強公理，またスルツキー行列の 2 条件と同値なのである。実のところ，この解は与えられた初期条件ごとにただひとつしかなく，もし f に選好 $\succsim$ が対応しており，初期条件が $u(p^*) = m^*$ で $f(p^*, m^*) = x$ であるとすれば，

$$u(p) = E(p; x) = \inf\{p \cdot y | y \succsim x\}$$

が解である。この解は**支出関数**（expenditure function）と呼ばれる。このように，選好が存在すれば解は容易に見つけられるのだが，解が存在すればスルツキー行列はその解のヘッセ行列と一致するため，上で挙げた半負値定符号性と対称性はただちに出る。よってスルツキー行列の半負値定符号性と対称性が与えられたときに対応する選好を計算することができれば，そこからただちに全部の同値命題が出てくるのである。

2 節において，我々は主結果を正式に示し，また計算例をいくつか与える。証明はすべて 4 節において行う。3 節は結語であり，ここからさらに発展した研究を得る可能性について言及する。

2　主結果

2.1　準備

まず，本稿を通じての記述の法則を注意する。n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル x が与えられたとき，x_i はその第 i 座標を表すとする。一方で，どこかの空間から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ へのベクトル値関数 $f(p)$ に対して，$f^i(p)$ は $f(p)$ の第 i 座標を表すとする。このようにベクトルと関数で座標を表す記法が異なる理由は，関数については偏微分を下付き文字で表したいからである。f の定義域が $\mathbb{R}^m$ であるとき，f の点 p における第 j 座標についての偏微分を $f_j(p)$ と書きたいために，混同を避けるべく座標の記法は上付き文字で表す。一方でベクトル x に対する上付き文字 x^k などがあった場合，大抵それは点列 (x^k) の k 番目の値を指す。この点について注意されたい。

次に $\mathbb{R}^n$ のベクトル x と y について，$x \geq y$ はすべての座標 i について $x_i \geq y_i$ となることを，また $x \gg y$ はすべての座標 i について $x_i > y_i$ となることを意味するものとする。$x \geq 0$ となるベクトル全体が成す集合は**非負象限**と呼ばれ，経済学では普通，$\mathbb{R}^n_+$ と書かれる。同様に $x \gg 0$ となるベクトル全体が成す集合は**正象限**と呼ばれ，経済学では普通，$\mathbb{R}^n_{++}$ と書かれる。

Ω という記号は消費集合を表すとするが，本稿を通じて，これは $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i, x_i \geq 0\}$ の部分集合であることだけを仮定する。ただし，後に述べるワルラス法則との関係上，この集合はある程度よい形をしていることを要求される。必要があれば読者は，これは $\mathbb{R}^n_+$ か $\mathbb{R}^n_{++}$ のいずれかだと思ってしまって問題ない。

次に $\succsim$ は Ω 上の二項関係であるとする。これは集合論的には，単に $\succsim \subset \Omega^2$ という意味でしかない。我々はこの順序の記号を消費者の好みだと思いたい（つまり，$(x, y) \in \succsim$ を，「x のほうが y 以上に好ましい」と読みたい）のだが，しかしそのためには最低限，ある程度「好み」と呼ばれるにふさわしい条件を $\succsim$ が満たしている必要がある。そこで，ここでは次の 2 つを考えよう。

- 完備性。すべての $x, y \in \Omega$ について，$(x, y) \in \succsim$ と $(y, x) \in \succsim$ の少なくともどちらか片方は必ず成り立つ。
- 推移性。もし $(x, y) \in \succsim$ かつ $(y, z) \in \succsim$ であれば，$(x, z) \in \succsim$ も成り立つ。

この 2 つの条件を満たす $\succsim$ のことを，我々は**選好**（preference）と呼ぶことにする。次の略記はしばしば理解を助ける：$(x, y) \in \succsim$ の代わりに $x \succsim y$ と書く。

仮にある Ω 上で定義された実数値関数 u_* が存在して，関係 $\succsim$ について

$$x \succsim y \Leftrightarrow u_*(x) \geq u_*(y)$$

が成り立つならば，このとき u_* は $\succsim$ を**表現**（represent）している，あるいは $\succsim$ の**効用関数**（utility function）である，と言う。効用関数を持つ二項関係が常に選好であることを示すのはたやすい。逆に効用関数を持たない選好が存在することが知られている[(1)]。$\succsim$ が Ω^2 の相対位相で閉ならばそれを表現する連続な効用関数が存在することも知られている[(2)]。

次に，関数 $f : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \Omega$ を考えよう。ここで定義域の最初の $\mathbb{R}^n_{++}$ の元は価格であると考え，次の $\mathbb{R}_{++}$ の元は所得であると考えるのが消費者理論の通常の解釈である。価格 p と所得 m が与えられたとき，$f(p, m)$ は消費者の選択する消費ベクトルであると解釈される。このような f を**需要関数**（demand function）と呼びたいのだが，本稿では需要関数の考え得るクラスを絞るために，この名で呼ばれるような関数 f は常に次の 2 つの要請をクリアしているものだとする[(3)]。

（1） Kreps（1988）を参照。

（2） Debreu（1954）を参照。

（3） なお，実は主定理の証明のために，正 0 次同次性を仮定する必要はない。これは後に述べる弱公理よりも弱い仮定であるから，当然成り立つのである。

- 正 0 次同次性：$a > 0$ であれば $f(ap, am) = f(p, m)$ である。
- ワルラス法則：$p \cdot f(p, m) = m$ が常に成り立つ。

需要関数の中で最も重要なクラスは，選好に付随する需要関数である。いま $\succsim$ は選好であるとし，$f^{\succsim}(p, m)$ は，次の 2 条件を満たすような $x \in \Omega$ 全体の集合としよう：第一に，$p \cdot x \le m$ である。第二に，$p \cdot y \le m$ となるすべての $y \in \Omega$ について，$x \succsim y$ である。特に $\succsim$ が効用関数 u_* を持つとき，$f^{\succsim}(p, m)$ は次の最大化問題

$$\begin{aligned} \max \quad & u_*(x) \\ \text{subject to.} \quad & x \in \Omega, \\ & p \cdot x \le m \end{aligned}$$

の解をすべて集めてできた集合であり，その意味でこの関数は普通のミクロ経済学のテキストで出てくる需要関数と同じものになる。このとき $f^{\succsim}$ の代わりに f^{u_*} と書くこともある。(4)

次に，f が需要関数であるとし，Ω 上の二項関係を 2 つほど定義しよう。

$$\begin{aligned} x \succ_r y &\Leftrightarrow x \ne y, \exists (p, m), x = f(p, m) \text{ and } p \cdot y \le m, \\ x \succ_{ir} y &\Leftrightarrow \exists x_0, ..., x_k \in \Omega, x_0 = x, x_k = y, \\ &\qquad \text{and } x_i \succ_r x_{i+1} \text{ for any } i = 0, ..., k-1. \end{aligned}$$

---

(4)　読者の中には，$f^{\succsim}$ が必ずしも上で述べた需要関数にならないのではないか，ということが気になる方もおられるかもしれない。それは正しい。たとえば，$f^{\succsim}$ は普通の意味での関数ではなく，値 $f^{\succsim}(p, m)$ は集合である。このような関数は多価関数と呼ばれる。多価関数を研究する理論では通例，通常の関数（一価関数）というのは，「常に一点集合が値になる関数」と同一視される。したがって $f^{\succsim}$ が需要関数であるためには，最低限 $f^{\succsim}(p, m)$ は一点集合でなければならない——これは実は，「$f^{\succsim}(p, m)$ に含まれる点が存在する（非空性）」「$f^{\succsim}(p, m)$ に含まれる点が 2 点以上はない（一価性）」という 2 つの条件を同時にクリアしていなければならないことを意味する。

そのややこしい条件がクリアされたと考えても，なお問題は残る。たとえば $f^{\succsim}(p, m)$ が常に一点集合だったとして，正 0 次同次性とワルラス法則は満たされるのか？　前者については，満たすことを簡単に確認できる。だが後者は，追加の仮定なしには満たされない。これはつまり，考える選好 $\succsim$ の範囲を制限していることにはならないか？

本稿では，この論点に深入りはせず，ただいくつかのことを指摘しておくにとどめたい。第一に，経済学で用いられるよくある仮定（たとえば $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ で効用関数 u_* が連続，狭義準凹かつ増加的，など）の下で，$f^{\succsim}$ は一価関数になり，したがって我々の議論した仮定を満たす（実を言うと「非空性」だけは若干厄介である。これは我々が $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ を許容しているという事実から来る。これについては結語における議論を参照されたい）。第二に，我々の目的は選好から需要関数を導出することではなく，需要関数から選好を導出することであり，したがって需要関数の性質は「仮定」として与えられるものである。したがって今後の議論として $f^{\succsim}$ が需要関数でないようなものは出てこないので，結果として問題は起こらない。

ここで $\succ_r$ が**非対称的**（asymmetric）である――つまり，$x \succ_r y$ と $y \succ_r x$ が同時に起こらない――とき，f は**弱公理**（weak axiom）を満たすと言う。同様に，$\succ_{ir}$ が非対称的であるとき，f は**強公理**（strong axiom）を満たすと言う。明らかに強公理は弱公理を含意する。また f が強公理を満たすことと，$f = f^{\succsim}$ となる選好 $\succsim$ が存在するのは同値であることが知られている。(5)

最後に，需要関数 f が C^1 級であったとしよう。次の値

$$s_{ij}(p,m) = f^i_j(p,m) + f^i_{n+1}(p,m)f^j(p,m)$$

を (i,j)-要素に持つ行列 $S_f(p,m)$ を考える。行列値関数 S_f は**スルツキー行列**（Slutsky matrix）と呼ばれる。形式的には，

$$S_f(p,m) = D_p f(p,m) + D_m f(p,m) f^T(p,m)$$

と書かれることが多い。ここで D_p と D_m はそれぞれ p, m についての偏微分作用素であり，上付き文字の T は転置を表す。需要関数 f が (NSD) を満たすとは，スルツキー行列 $S_f(p,m)$ が常に半負値定符号であることを言う。また需要関数 f が (S) を満たすとは，スルツキー行列 $S_f(p,m)$ が常に対称であることを言う。

2.2　主結果

定理 1：f が C^1 級の需要関数で (NSD) と (S) を満たしているとする。任意の $(p^*, m^*) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ を取る。このとき，次の偏微分方程式：

$$Du(p) = f(p, u(p)) \tag{1}$$

は，初期条件 $u(p^*) = m^*$ の下での大域解 $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ を持つ。

この定理を使うと容易に，以下の結果を得る。

系 1：f が定理 1 の仮定を満たすとし，$\bar{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ を固定する。$x \in \Omega$ を任意に取り，もし $x = f(p,m)$ となる (p,m) がひとつもなければ，$u_{f,\bar{p}}(x) = 0$ と定義する。そうでないときには，$x = f(p,m)$ となる (p,m) をひとつ取って，次の常微分方程式

$$\dot{c} = f((1-t)p + t\bar{p}, c) \cdot (\bar{p} - p), c(0) = m$$

を考える。するとこの方程式は $[0,1]$ 上で定義された解をただひとつ持ち，さらに $c(1)$ の値は (p,m) の取り方から独立である。そこで $u_{f,\bar{p}}(x) = c(1)$ と定義する。このとき $f = f^{u_{f,\bar{p}}}$ が成り立つ。

（5）　Richter（1966）あるいは Mas-Colell, Whinston and Green（1995）の第 3 章を参照。

これを使うことで，以下の同値命題を得る。

定理 2：f が C^1 級の需要関数であるとする。このとき，以下の 3 つは同値である。

（I） f は (NSD) と (S) を満たす。
（II） f は強公理を満たす。
（III） 方程式（1）の大域解 $u:\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}_{++}$ が存在し，それは凹である。

補足：我々は定理 1 を用いて系 1 を出し，そしてそこから定理 2 を出す方式を採った。しかし，実は系 1 を，定理 1 を経由せずに直接証明することもできる。そして定理 2 は実は系 1 だけから出せるので，定理 1 が自動的に出てくることになる。この意味で定理 1 と系 1 は同じ難易度の問題と捉えることができ，片方を証明すればもう片方も簡単に証明できる。

系 1 で得られた効用は具体的な解釈を持つ。いま f が (NSD) と (S) を満たすとし，$x=f(p,m)$ であるとする。次の関数

$$E(q)=\inf\{q\cdot y|u_{f,\bar{p}}(y)\ge u_{f,\bar{p}}(x)\}$$

は方程式（1）の解になり，故に，合成微分の公式から，$c(t)=E((1-t)p+t\bar{p})$ は系 1 に出てくる常微分方程式を満足する。したがって $u_{f,\bar{p}}(x)=E(\bar{p})$ である。ところで，$y=f(\bar{p},E(\bar{p}))$ とすれば，定義から容易に $u_{f,\bar{p}}(y)=E(\bar{p})$ を示すことができ，したがって x と y は $u_{f,\bar{p}}$ の下で無差別である。つまり，$u_{f,\bar{p}}(x)$ というのは，所得消費曲線 $m\mapsto f(\bar{p},m)$ と x を含む無差別超曲面が交差する点の，対応する所得の値に等しいのである。これがこの効用関数の解釈である。

なお，定理 2 の主張と似たようなことを Richter（1979）が主張している。しかしこの論文では証明はスケッチしか示されておらず，そのスケッチでは我々の定理 1 が「Debreu（1972）の ‘dual’ で示せる」とだけ書いてある。これ自体もよく意味が取れないのだが，Debreu（1972）には (NSD) に対応する条件がないため，我々の証明における補題 2 が出せず，よっておそらく Richter の証明は正しくないと思われる。

2.3 計算例

以下，系 1 で作った効用関数 $u_{f,\bar{p}}$ を，有名な需要関数に関して計算してみよう。

例 1（コブ＝ダグラス型）：$0<\alpha_i<1$ かつ $\sum_i\alpha_i=1$ とし，次の需要関数

$$f^i(p,m)=\frac{\alpha_i m}{p_i}$$

を考える。$\bar{p}=(1,1,...,1)$ と定義しよう。系 1 の微分方程式はこのとき

$$\dot{c}(t)=\sum_i\frac{\alpha_i(1-p_i)}{p_i+t(1-p_i)}c(t),c(0)=m$$

となる。この微分方程式は線形方程式 $\dot{c}=a(t)c$ の形をしており，したがってその一般解は $c(0)e^{\int_0^t a(s)ds}$ である。よって，

$$\begin{aligned} c(1) &= c(0)e^{\int_0^1 \sum_i \frac{\alpha_i(1-p_i)}{p_i+t(1-p_i)}dt} \\ &= c(0)e^{-\sum_i \alpha_i \log p_i} = m\prod_i p_i^{-\alpha_i} \end{aligned}$$

を得る。

次に $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ に対して，$p_i=\dfrac{\alpha_i}{x_i}$ および $m=1$ とすれば $x=f(p,m)$ である。これを上に代入すれば，ある定数 C に対して

$$u_{f,\bar{p}}(x)=Cx_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$$

を得る。

例 2（CES 型）：$0<\alpha_i<1$ かつ $\sum_i\alpha_i=1$ とし，また $-\infty<\rho<1$ かつ $\rho\neq 0$ とする。次の需要関数

$$f^i(p,m)=\frac{\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}p_i^{\frac{-1}{1-\rho}}m}{\sum_j\alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}p_j^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}$$

を考えよう。$\bar{p}=(1,1,...,1)$ とする。系 1 の微分方程式はこのとき

$$\dot{c}(t)=\frac{\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}(p_i+t(1-p_i))^{\frac{-1}{1-\rho}}(1-p_i)}{\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}(p_i+t(1-p_i))^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}c(t), c(0)=m$$

となって，やはり線形である。よって，

$$\begin{aligned} c(1) &= c(0)e^{\int_0^1 \frac{\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}(p_i+t(1-p_i))^{\frac{-1}{1-\rho}}(1-p_i)}{\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}(p_i+t(1-p_i))^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}dt} \\ &= c(0)e^{\frac{1-\rho}{\rho}(\log\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}p_i^{\frac{-\rho}{1-\rho}}-\log\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}})} \\ &= mC[\sum_i\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}}p_i^{\frac{-\rho}{1-\rho}}]^{\frac{1}{\rho}-1} \end{aligned}$$

となる。ただし $C>0$ はなんらかの定数である。$x\in\mathbb{R}^n_{++}$ に対して，$\dfrac{m}{\sum_j\alpha_j^{\frac{1}{1-\rho}}p_j^{\frac{-\rho}{1-\rho}}}=1$ となるように m をセットすると，$x=f(p,m)$ であるためには $p_i=\alpha_ix_i^{\rho-1}$ であればよい。このとき $m=\sum_i\alpha_ix_i^\rho$ であり，これらの p と m を上に代入すれば

$$u_{f,\bar{p}}(x)=C[\alpha_1x_1^\rho+...+\alpha_nx_n^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

を得る。

3　結語

本稿では，需要関数のスルツキー行列の条件と強公理との同値性を示し，また具体的に需要関数から効用関数を導出する方法をひとつ提示した。以下，残っている問題をいくつか列挙するのだが，そのかなりの部分で筆者は答えをすでに持っている。ただ未公開の結果であり，この論文で扱うにも長すぎる話になるので，それらの解決している部分については，ここでは簡単に結果だけ述べよう。

まず，$f = f^{u_*}$ となる u_* で，連続なものが存在するか否かの問題が残っている。これについては，$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ という仮定の下で，全射な f についての同値条件はわかっている：仮に $G(x) = \{p \in \mathbb{R}^n_{++} | \sum_i p_i = 1, x = f(p, p \cdot x)\}$ という形で多価写像 G を定義したときに，この多価写像がコンパクト値，凸値，そして優半連続になることが同値条件である。このとき我々が系 1 で定義した関数 $u_{f,\bar{p}}$ は連続になる。さらにまた，このとき $f = f^{\succsim}$ となる選好のうち閉集合であるものは，ただひとつしか存在しないこともわかっている。したがって我々の計算方式はそのただひとつの選好を表現する効用関数を計算するものである。

G についての条件での特徴付けというのは人工的であると思われるかもしれない。しかし，f についての公理としてこれを直すこともできる。これは，$\succ_r$ が「辞書式的」でない，というたぐいの性質を持つことと同値なのである(6)。つまり，我々は辞書式順序的な選好を禁止するだけで，連続な効用関数の存在と計算手法に到達できることになる。

さらに踏み込める。積分可能性理論は需要関数が得られているときに，そこから効用関数を導くことを目的とする。しかし，現実には需要関数を得るには推定によるしかなく，したがってそこには誤差が自然と含まれる。需要関数に誤差が小さいとき，対応する選好の誤差は小さいか？　この問題は当然考えられてしかるべきであろう。これについては，(f_k) が定理 1 の仮定と上の追加条件を満たす需要関数の列とし，それがある f に局所 C^1 位相で収束しているならば，$u_{f_k,\bar{p}}$ が $u_{f,\bar{p}}$ に局所一様収束することを示すことができる。この位相に限定すれば，需要関数の誤差の小ささはそのまま選好の誤差の小ささを含意する(7)。

さらにまた踏み込める。行列 $S_f(p, m)$ の階数が常に $n-1$ である，という条件を階数条件と言う。Hosoya（2013）は階数条件と弱公理の下で，上の G が一価な C^1 級写像であることを証明した。そして，さらに (NSD) と (S) の下で，至る所正則な C^1 級効用関数 u_* の存在を示したのである。こ

(6)　正確に書くと，「任意の x と i, j について，x と第 i 座標，第 j 座標以外は同じ y で，$x_i > y_i$ かつ $x_j < y_j$ であり，そして $y \succ_r x$ となるようなものが存在する」という条件と，G についての上の性質が同値である。

(7)　容易に示せることだが，効用の局所一様収束は閉収束位相での選好の収束を含意する。

れと双対性を用いることで，我々は同じ条件の下で $u_{f,\bar{p}}$ もまた C^1 級で至る所正則であることを示すことができる。もちろん，f が C^k 級ならば $u_{f,\bar{p}}$ も C^k 級である。

以上の結果は $\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ で得られた。$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ではどうか？　これについては不透明としか言いようがない。$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ であるときには，上で述べた条件がすべて成り立っていたとしても，$f = f^{u_*}$ となる連続な効用関数がひとつも存在しない例が作れる。これは Hosoya（2015）で紹介されている例であり，本質的には，同じ極限点を持つ 2 つの異なる無差別曲線が存在してしまうことから生ずる。したがって上のような鮮やかな結果は導出できない。

しかし一方で，$\Omega = \mathbb{R}^n_{++}$ を仮定しているのに，$f(p,m)$ が常に存在するのは不合理ではないのか？　という疑問も出てくるであろう。$\{x \in \Omega | p \cdot x \le m\}$ がコンパクトでない以上，需要関数の定義域が $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ であるというのは強すぎる要請かもしれない。これについては，需要関数の定義域が $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ の開集合（0 次同次性があるので，実質的には開錐）であるという条件の下で，全射性と上の G についての条件を追加してやれば，定理 2 とほぼ同じ結果が出せる。そして閉な選好で $f = f^{\succsim}$ を満たすものはただひとつしかなく，その対応関係を与える写像 $f \mapsto \succsim$ は局所 C^1 位相と閉収束位相について連続である。この形で，この場合の問題は解決する。ただし問題の難易度は上がっているため，証明の難易度も劇的に跳ね上がることに注意されたい。

最後に，以上の結果と類似の結果を「微分可能でない」需要関数について議論できるかどうかを検討中である。これには微分包含式という技術を用いるのだが，まだ証明を吟味しきれていないので，詳細はここには書かない。

4　証明

4.1　定理 1 の証明

主に方程式 (1) について，補題をいくつか重ねていく必要がある。まず，次の常微分方程式を考えよう。

$$\dot{w}(t;p) = f((1-t)p^* + tp, w(t;p)) \cdot (p - p^*), w(0,p) = m^*. \tag{2}$$

簡単にわかることだが，もし方程式 (1) の解 u で区間 $[p^*, p]$ を含むものが存在すれば，$w(t;p) = u((1-t)p^* + tp)$ と定義してしまえばこれは上の方程式の解になる。一方で，逆に次が成り立つ。

補題 1：方程式 (2) の解が得られたとする。ここで，

$$u(p) = w(1;p)$$

と（定義できる p について）定義すると，これは $u(p^*) = m^*$ を満たす (1) の解になる。

証明：最初に，$h^j(t,p)=\frac{\partial w}{\partial p_j}(t;p)-tf^j((1-t)p^*+tp,w(t;p))$ と定義する。常微分方程式の一般論から[8]，$\frac{\partial^2 w}{\partial p_j \partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial p_j}$ であり，したがって (S) より[9]，

$$\begin{aligned}
\dot{h}^j(t,p) &= \frac{\partial}{\partial p_j}(f\cdot(p-p^*))-f^j-t\sum_i[f_i^j+f_{n+1}^j f^i](p_i-p_i^*)\\
&= f^j+\sum_i\left[tf_j^i+f_{n+1}^i\frac{\partial w}{\partial p_j}\right](p_i-p_i^*)-f^j-t\sum_i[f_i^j+f_{n+1}^j f^i](p_i-p_i^*)\\
&= t\sum_i[f_j^i-f_i^j-f_{n+1}^j f^i](p_i-p_i^*)+\sum_i f_{n+1}^i\frac{\partial w}{\partial p_j}(p_i-p_i^*)\\
&= \left[\frac{\partial w}{\partial p_j}-tf^j\right]\sum_i f_{n+1}^i(p_i-p_i^*)\\
&= h^j(t,p)\sum_i f_{n+1}^i(p_i-p_i^*)
\end{aligned}$$

つまり，$\dot{h}^j(t,p)=a(t,p)h^j(t,p)$ がある連続関数 $a(t,p)$ について成り立つ。したがって，

$$h(t,p)=h(0,p)e^{\int_0^t a(s,p)ds}=0$$

が成り立つ（$h(0,p)=0$ を用いた）。よって $\frac{\partial w}{\partial p_j}(t;p)=tf^j((1-t)p^*+tp,w(t;p))$ であり，

$$\frac{\partial u}{\partial p_j}(p)=\frac{\partial w}{\partial p_j}(1;p)=f^j(p,w(1;p))=f^j(p,u(p))$$

となって証明が完成する。■

したがって実は証明するべきは，方程式 (2) の解が任意の $p\in\mathbb{R}^n_{++}$ について $[0,1]$ 区間の全体まで延長可能だという事実である。これを証明するために補題を追加でひとつ必要とする。

補題 2：$w(t;p)$ は (2) の解で，$[0,t^*]$ 上で定義されているとする。$p(t)=(1-t)p^*+tp$ とし，$x_1=f(p^*,m^*), x_2=f(p(t^*),w(t^*;p))$ と定義すると，$p(t^*)\cdot x_1\geq w(t^*;p)$ かつ $p^*\cdot x_2\geq m^*$ である。

証明：$c(t)=p^*\cdot f(p(t),w(t;p))$ とする。このとき，

$$\dot{c}(t)=(p^*)^T S_f(p(t),w(t;p))(p-p^*)$$

である。ただし上付き文字の T は転置を表す。一方でワルラス法則より，

$$p(t)^T S_f(p(t),w(t;p))(p-p^*)=0$$

---

(8)　ポントリャーギン（1968）の第 4 章を参照。

(9)　煩雑なので $f((1-t)p^*+tp,w(t;p))$ 等は f などと略記する。

が成り立つので，下を上から引けば

$$\dot{c}(t) = -t(p - p^*)^T S_f(p(t), w(t;p))(p - p^*) \geq 0$$

となる。ただし最後の不等式は (NSD) による。したがって，

$$p^* \cdot x_2 = c(t^*) \geq c(0) = p^* \cdot x_1 = m^*$$

となって片方の不等式は証明できた。もう一方の不等式は対称的に示せるので，証明は省略する。

■

では，いよいよ (2) の解がどんな p についても $[0,1]$ 区間上で定義されることを示そう。背理法により，ある p についてそうでないと仮定する。t^* を上の解が $[0,t]$ 上で定義できるような $t \in [0,1]$ の上限であるとしよう。$[0,t^*]$ 上で解が定義できているのならばもうすこし延長できることは簡単に示せるので，我々は $w(\cdot;p)$ は $[0,t^*[$ までしか延長できないと結論できる。したがって $p(t) = (1-t)p^* + tp$ とすれば，常微分方程式の一般論から[(10)]，$\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ の任意のコンパクト集合 C について，t が十分 t^* に近ければ $(p(t), w(t;p))$ は C に含まれない。この場合，$p(t) \in [p^*, p] \subset \mathbb{R}^n_{++}$ なので，$\inf_{t\in[0,t^*[} w(t;p) = 0$ か $\sup_{t\in[0,t^*[} w(t;p) = +\infty$ のいずれかが成り立たねばならない。ところで，補題 2 から $p(t) \cdot f(p^*, m^*) \geq w(t;p)$ であり，

$$w(t;p) \leq p(t) \cdot f(p^*, m^*) = tp \cdot f(p^*, m^*) + (1-t)m^* \leq p \cdot f(p^*, m^*) + m^*$$

で，よって後者は成り立たないので，ある点列 (t_k) を取れば，$t_k \uparrow t^*$ かつ $w(t_k;p) \to 0$ となる。$x_k = f(p(t_k), w(t_k;p))$ としよう。このときやはり補題 2 から

$$p^* \cdot x_k \geq m^*$$

が成り立つ。上で書いたように

$$t_k p \cdot f(p^*, m^*) + (1-t_k)m^* = p(t_k) \cdot f(p^*, m^*) \geq p(t_k) \cdot x_k = t_k p \cdot x_k + (1-t_k)p^* \cdot x_k$$

なので，ここから $p \cdot f(p^*, m^*) \geq p \cdot x_k$ がわかり，したがって

$$p(t^*) \cdot f(p^*, m^*) \geq p(t^*) \cdot x_k$$

がわかる。よって x_k はコンパクト集合 $\{x \in \mathbb{R}^n_+ | p(t^*) \cdot x \leq p(t^*) \cdot f(p^*, m^*)\}$ 上の点列であり，部分列を取ることで，$x \in \mathbb{R}^n_+$ に収束すると仮定してよい。このとき上の不等式から $p^* \cdot x \geq m^*$ となり，よって $x \neq 0$ であるが，一方で

$$0 < p(t^*) \cdot x = \lim_{k\to\infty} p(t_k) \cdot x_k = \lim_{k\to\infty} w(t_k, p) = 0$$

（10） やはりポントリャーギン（1968）の第 4 章がよい。

となって矛盾。以上で定理 1 の証明が完成した。 ■

4.2　系 1 の証明

最初に，次を示しておくと有益である。

補題 3：（1）の 2 つの大域解 $u_1, u_2 : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ が一点 p で同じ値を取るならば，これらは同じ関数である。

証明：$q \in \mathbb{R}^n_{++}$ を任意に取ろう。このとき，$c_i(t) = u_i((1-t)p + tq)$ とすれば，

$$\dot{c}_i = f((1-t)p + tq, c_i) \cdot (q - p), c_i(0) = u_1(p) = u_2(p)$$

という形で，2 つは同じ常微分方程式の解になっている。したがってこの 2 つは一致し，特に $u_1(q) = c_1(1) = c_2(1) = u_2(q)$ となる。 ■

さて，系 1 の証明に入ろう。まず弱公理を示さなければならない。このために我々は，補題 2 を若干強化する必要がある。まず補題 2 から，$u(p) = m$ を満たす大域解 $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ と $x = f(p, m)$ について $q \cdot x \geq u(q)$ が常に成り立つことに注意しよう。

補題 4：$x \neq y$ とし，ただし $x = f(p, m), y = f(q, w)$ であるとする。ここで $u : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ を $u(p) = m$ を満たす（1）の解であるとし，$w \geq u(q)$ であるとすれば，$p \cdot y > m$ である。

証明：$w > u(q)$ と $w = u(q)$ の場合分けで行う。まず $w > u(q)$ としよう。このときは，$v : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$ を $v(q) = w$ を満たす (1) の解であるとする。すると $v(q) > u(q)$ である。仮にもし $v(p) \leq u(p)$ であるとすれば，$[p, q]$ 内に $v(r) = u(r)$ となる r が存在する。すると補題 3 から $u \equiv v$ となるが，$u(q) \neq v(q)$ なので矛盾。こうして我々は $v(p) > u(p)$ を得るが，補題 2 から $p \cdot y \geq v(p)$ なので，$p \cdot y > u(p)$ を得る。

次に $w = u(q)$ の場合を考えよう。この場合も補題 2 から $p \cdot y \geq u(p) = m$ であることはわかる。$p \cdot y = m$ であったときを考えよう。補題 2 の証明をなぞると，$p(t) = (1-t)p + tq$ とし，$c(t) = p \cdot f(p(t), u(p(t)))$ と定義すれば，

$$\dot{c}(t) = -t(q-p)^T S_f(p(t), u(p(t)))(q - p) \geq 0$$

となる，という話であった。$c(0) = m$ であり，$c(1) = p \cdot y$ なので，$\dot{c}(t) \equiv 0$ がわかる。ここで，線形代数の議論が若干必要である。まず $S_f(p(t), u(p(t)))$ は S_t と略記することにし，その固有値を $c^t_1, ..., c^t_n$ とする。(NSD) よりこれらはすべて 0 以下であり，(S) より，ある直交行列 P_t が存在して，

$$P_t^T S_t P_t = \begin{pmatrix} c_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n^t \end{pmatrix}$$

となるはずである。そこで,

$$A_t = P_t \begin{pmatrix} \sqrt{-c_1^t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{-c_2^t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{-c_n^t} \end{pmatrix} P_t^T$$

と定義しよう。$A_t^2 = -S_t$ となることを示すのは容易である。また A_t は対称である。よって,

$$\dot{c}(t) = t\|(A_t(q-p))\|^2 \equiv 0$$

がすべての t について言えるということになり, したがって $A_t(q-p) = 0$ である。これは $S_t(q-p) = 0$ を意味する。ここで $x(t) = f(p(t), u(p(t)))$ とすれば,

$$\dot{x}(t) = S_t(q-p) = 0$$

であるから, $x = x(0) = x(1) = y$ であるが, 仮定 $x \neq y$ に矛盾。以上で証明が完成した。 ■

補題 4 から弱公理を出すのは容易である。まず $x = f(p, m), y = f(q, w), x \neq y$ としよう。もし $p \cdot y \leq m$ だったとすれば, 補題 4 の対偶から, $u : \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}_{++}$ を（1）の解で $u(p) = m$ を満たすものだとすれば, $u(q) > w$ でなければならない。今度は $v : \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}_{++}$ を（1）の解で $v(q) = w$ を満たすものとすれば, 補題 4 の証明で示したように容易に $m = u(p) > v(p)$ を得るが, これに補題 4 を適用すれば, $q \cdot x > w$ を得る。以上で弱公理が示せた。

さて, 次に $x = f(p, m) = f(q, w)$ であったとしよう。u を（1）の大域解で $u(p) = m$ を満たすもの, v を（1）の大域解で $v(q) = w$ を満たすものとする。我々が示さなければならないのは $u(\bar{p}) = v(\bar{p})$ であるが, 補題 3 から, そのためには $u(q) = w$ を示せば十分である。そこで, まず $t \in [0, 1]$ を取り, $p(t) = (1-t)p + tq, d(t) = (1-t)m + tw$ として, $f(p(t), d(t)) = x$ を最初に示そう。たとえばそうでなく, $f(p(t), d(t)) = y \neq x$ であるとする。すると $0 \neq t \neq 1$ である。$d(t) = p(t) \cdot y = p(t) \cdot x$ であるので, 弱公理から $p \cdot x < p \cdot y$ と $q \cdot x < q \cdot y$ が出るが, これらから $p(t) \cdot y > d(t)$ を得て矛盾が生ずる。よってこれはあり得ない。すると, $d(t) = p(t) \cdot x$ なので,

$$\dot{d}(t) = x \cdot (q-p) = f(p(t), d(t)) \cdot (q-p), d(0) = m$$

である。一方で $c(t)=u(p(t))$ とすれば,

$$\dot{c}(t)=f(p(t),c(t))\cdot(q-p), c(0)=m$$

であり，これらは同じ常微分方程式の解であるから一致しなければならない。よって

$$u(q)=c(1)=d(1)=w$$

となる。こうして，目標のひとつが示せた。よって $u_{f,\bar{p}}(x)$ の定義は (p,m) の選び方から独立である。

次に，$x\neq y, f(p,m)=x$ かつ $p\cdot y\leq m$ であるとしよう。もし y が f の値とならない点であったならば，$u_{f,\bar{p}}(y)=0<u_{f,\bar{p}}(x)$ である。そうでないならば，$y=f(q,w)$ となる点 (q,w) が存在する。u,v をそれぞれ（1）の大域解で $u(p)=m, v(q)=w$ を満たすものとすれば，補題 4 の対偶から $u(q)>v(q)$ であり，よって補題 4 の証明で使った議論を繰り返すことで，$u(\bar{p})>v(\bar{p})$ がわかる。したがって $u_{f,\bar{p}}(x)>u_{f,\bar{p}}(y)$ が言える。故に $x=f^{u_{f,\bar{p}}}(p,m)$ であり，以上で系 1 の証明が完成した。 ■

4.3　定理 2 の証明

f が (NSD) と (S) を満たすならば，系 1 から $f=f^{u_{f,\bar{p}}}$ であり，よって強公理が成り立つ。

次に, f が強公理を満たすとする。このとき, ある選好 $\succsim$ について $f=f^{\succsim}$ である。任意の (p^*,m^*) に対して，$x=f(p^*,m^*)$ とし，次の関数

$$E(p)=\inf\{p\cdot y|y\succsim x\}$$

を定義しよう。すると次が成り立つ。

補題 5：$E(p)$ は凹関数で $E(p^*)=m^*$ を満たし，さらに（1）の解である。(11)

証明：$p_1,p_2\in\mathbb{R}^n_{++}$ と $t\in[0,1]$ を任意に取り，$(1-t)p_1+tp_2=p$ とする。$\varepsilon>0$ を任意に取り，対応して $y\succsim x$ かつ $p\cdot y\leq E(p)+\varepsilon$ となる y を取る。このとき,

$$E(p)+\varepsilon\geq p\cdot y=(1-t)p_1\cdot y+tp_2\cdot y\geq(1-t)E(p_1)+tE(p_2)$$

であり，よって $\varepsilon\downarrow 0$ とすることで E の凹性を得る。故に E は連続である。

次に, $y\succsim x$ かつ $y\neq x$ としよう。$x=f(p^*,m^*)=f^{\succsim}(p^*,m^*)$ であるから, このとき $p^*\cdot y>m^*$ となる。一方で $p^*\cdot x=m^*$ である。故に $E(p^*)=m^*$ である。

$x(p)=f(p,E(p))$ と定義しよう。するとこの関数は連続で，$p\cdot x(p)=E(p)$ を満たす。任意の $\varepsilon>0$ を固定し，$x_\varepsilon(p)=f(p,E(p)+\varepsilon)$ としよう。$E(p)$ の定義から，$y\succsim x$ かつ $p\cdot y<E(p)+\varepsilon$

（11） 最後の関係をシェパードの補題と呼ぶ。

となる y が存在する。よって $x_\varepsilon(p) \succsim y$ であり，故に $x_\varepsilon(p) \succsim x$ である。よって任意の $p, q \in \mathbb{R}^n_{++}$ について，$p \cdot x(p) = E(p) \le p \cdot x_\varepsilon(q)$ であることがわかる。$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，f の連続性から $p \cdot x(p) \le p \cdot x(q)$ がわかる。

そこで e_i を第 i 単位ベクトルとして $p(t) = p + te_i$ としよう。このとき，

$$\begin{aligned} E(p(t)) - E(p) &= (p + te_i) \cdot x(p + te_i) - p \cdot x(p) \\ &= p \cdot (x(p + te_i) - x(p)) + tx^i(p + te_i) \\ &\ge tf^i(p + te_i, E(p + te_i)) \end{aligned}$$

となる。よって，

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{E(p(t)) - E(p)}{t} \ge f^i(p, E(p)) \ge \lim_{t \uparrow 0} \frac{E(p(t)) - E(p)}{t}$$

がわかるが，E の凹性から，これらはすべて一致しなければならない。よって $E_i(p) = f^i(p, E(p))$ であり，故に E は（1）の解である。以上で証明が完成した。■

よって，強公理の下で（1）の大域解で $u(p^*) = m^*$ を満たし，かつ凹であるようなものの存在がわかった。

最後に，任意の (p^*, m^*) に対して（1）の大域解である凹関数 u で，$u(p^*) = m^*$ を満たすものが存在したとする。すると，明らかにこれは C^2 級で，

$$D^2 u(p^*) = S_f(p^*, m^*)$$

を満たす。よって $S_f(p^*, m^*)$ は C^2 級の凹関数のヘッセ行列と一致するのだから，半負値定符号かつ対称である。(p^*, m^*) は任意だったので，f は (NSD) と (S) を満たす。以上で証明が完成した。

■

参 考 文 献

[1] Debreu, G.: Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: R. M. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis (Eds.), Decision Processes, 159–165, Wiley (1954)

[2] ————: Smooth Preferences. Econometrica, 40, 603–615 (1972)

[3] Hosoya, Y.: Measuring Utility from Demand. Journal of Mathematical Economics, 49, 82–96 (2013)

[4] ————: A Theory for Estimating Consumer's Preference from Demand. Advances in Mathematical Economics, 19, 33–55 (2015)

[5] Hurwicz, L., Richter, M. K.: Ville Axioms and Consumer Theory. Econometrica, 47, 603–619 (1979)

[6] Hurwicz, L., Uzawa, H.: On the Integrability of Demand Functions. In: J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter and H. F. Sonnenschein (Eds.), Preferences, Utility and Demand, 114–148, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York (1971)
[7] Kihlstrom, R., Mas-Colell, A., Sonnenschein, H.: The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference. Econometrica, 44, 971–978 (1976)
[8] Kreps, D.: Notes on the Theory of Choice. Westview Press (1988)
[9] Mas-Colell, A.: The Recoverability of Consumers' Preferences from Market Demand Behavior. Econometrica, 45, 1409–1430 (1977)
[10] Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and Green, J.: Microeconomic Theory. Oxford University Press, Oxford (1995)
[11] Richter, M. K.: Revealed Preference Theory. Econometrica, 34, 635–645 (1966)
[12] ———: Duality and Rationality. Journal of Economic Thoery, 20, 131–181 (1979)
[13] Uzawa, H.: Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In: K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (Eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959, Proceedings, 129–148, Stanford University Press (1960)
[14] ポントリャーギン『常微分方程式　新版』共立出版（1968）

要旨: 本稿では，連続微分可能な需要関数について，スルツキー行列の半負値定符号性および対称性と，顕示選好の強公理が同値であることを示す。このために，まずはシェパードの補題と呼ばれる偏微分方程式の解の存在定理を示し，そこから具体的に効用関数を導く。

キーワード: 需要関数，積分可能性理論，スルツキー行列，強公理