Title	Local risk-minimizationに対する具体的表現の導出と数値計算法について
Sub Title	Explicit representations for local risk-minimization and its numerical analysis
Author	新井, 拓児(Arai, Takuji)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2015
Jtitle	三田学会雑誌 (Mita journal of economics). Vol.108, No.3 (2015. 10) ,p.483(7)- 503(27)
JaLC DOI	10.14991/001.20151001-0007
Abstract	レヴィ過程によって駆動される確率微分方程式の解で資産価格が記述される非完備市場モデルを考える。非完備市場においてもっとも代表的な最適ヘッジ戦略であるlocal risk-minimizationの明示的表現を, レヴィ過程に対するマリアヴァン解析を用いて導出する。この表現にさらなる計算を施し, 高速フーリエ変換による数値計算が可能となる状態にまで展開する。 We consider incomplete market models whose asset price is given by a solution to a stochastic differential equation driven by a Lévy process. Our aim is to obtain explicit representations for local risk-minimization, which is one of representative hedging methods for incomplete markets. Moreover, adding some calculations, we induce integral expressions to which we can apply a numerical scheme based on the fast Fourier transform.
Notes	特集 : 経済の数理解析 : 数理経済学の新展開
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20151001-0007

「三田学会雑誌」108 巻 3 号（2015 年 10 月）

Local risk-minimization に対する具体的表現の導出と数値計算法について[(1)]

新井拓児*

Explicit Representations for Local Risk-minimization and its Numerical Analysis

Takuji Arai*

Abstract: We consider incomplete market models whose asset price is given by a solution to a stochastic differential equation driven by a Lévy process. Our aim is to obtain explicit representations for local risk-minimization, which is one of representative hedging methods for incomplete markets. Moreover, adding some calculations, we induce integral expressions to which we can apply a numerical scheme based on the fast Fourier transform.

1　序

非完備市場における条件付き請求権の価格付け及び最適ヘッジ戦略は，ファイナンス理論における最重要トピックの一つである。市場が完備であるとは，すべての条件付き請求権に対して完全複

*　慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics, Keio University

（1）　本稿では，可能な限り日本語で表記することに努めるが，日本語の定訳がない用語はそのまま英語表記を用いる。また，定訳があっても，必要であれば本文中に初めて登場したときに限り英語表記を併記し，読者が英文の参考文献でも意味を辿れるようにする。尚，数式内においては日本語表記を行うと不自然かつ分かりにくくなるので，英語表記で統一する。さらに，確率過程論や確率解析に関する用語を無定義で使用している箇所がある。そのような用語については，例えば，Protter [7] を参照されたい。

製戦略が存在する市場であり，一般に取引費用などが存在しない摩擦のない市場である。この場合，条件付き請求権の価格はその複製戦略の初期費用によって与えられる。尚，無裁定条件を満たす完備市場では，資産価格過程をマルチンゲール（martingale）にする測度，同値マルチンゲール測度が唯一つ存在し，その測度の下での条件付き請求権の期待値が価格を与える。一方，非完備市場では条件付き請求権に対する複製戦略が存在せず，同値マルチンゲール測度は無限個存在するため，無裁定条件下での価格は一意に定まらない。そこで，何らかの意味で最適なヘッジ戦略を考え，その初期費用を価格と見なす。本稿では，危険資産価格がジャンプ型確率過程，とりわけレヴィ過程（Lévy process）によって駆動される確率微分方程式の解で記述される非完備市場モデルを対象に，最適ヘッジ戦略として local risk-minimization（以下，LRM）を考える。LRM は，非完備市場の最適ヘッジ戦略としてはもっとも代表的なものであり，30 年近い歴史を持つ。そのため，LRM の数学的特性は非常によく研究されている。しかし一方，その具体的な計算方法に関する研究成果は殆ど得られていない。そこで本稿では，レヴィ過程に対するマリアヴァン解析（Malliavin calculus）を用いて，マリアヴァン微分の条件付き期待値を含む形で LRM を表現する。特に，条件付き請求権の代表例としてコールオプションを考え，そのマリアヴァン微分を計算する。これにより，コールオプションに対する LRM の明示的表現が得られる。ただし，この表現のままでは直接的に数値計算を行うことは不可能なので，高速フーリエ変換（fast Fourier transform）を用いた数値計算が可能となるよう，さらなる表現の変形を行う。

本稿の構成は以下の通りである。まず，2 節においてモデルを記述する。LRM の定義と意味については 3 節で述べる。4 節では，マリアヴァン微分を含んだ LRM の表現を紹介する。さらに，コールオプションのマリアヴァン微分の計算を詳細に述べる。尚，4 節の結果は Arai and Suzuki [2] に依るものである。続いて 5 節では，高速フーリエ変換による数値計算が可能となる形にまで LRM の表現を展開する。この結果は，Arai, Imai and Suzuki [1] に依るものである。

2　数学的設定

本稿では，一つの安全資産と一つの危険資産からなる非完備市場モデルを考える。尚，$T>0$ を市場の満期とする。簡単のため，金利を 0，すなわち，安全資産の価格は常に 1 であるとする。危険資産価格は，以下の確率微分方程式の解 S_t(2) で記述される:

$$dS_t = S_{t-}\left[\alpha_t dt + \beta_t dW_t + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}\widetilde{N}(dt,dz)\right], \quad S_0>0. \tag{1}$$

ここで，W_t は 1 次元ブラウン運動，$N(dt,dz)$ は Poisson random measure，$\widetilde{N}(dt,dz)$ はその

(2)　本稿を通して，確率過程はすべて時間区間 $[0,T]$ 上に定義されるものである。また，本来は $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ などと記述するべきであるが，特に混乱を招く恐れがない限り S_t または S と略記する。

compensated random measure である。つまり，N のレヴィ測度（Lévy measure）を ν と書くと，$\widetilde{N}(dt,dz)=N(dt,dz)-\nu(dz)dt$ である。さらに，$\mathbb{R}_0=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ であり，α_t, β_t, $\gamma_{t,z}$ は可予測過程とする。ただし，γ の定義域は $[0,T]\times\mathbb{R}_0$ であり，従って，$A\times(s,u]\times B$, $A\in\mathcal{F}_s$, $0\leq s<u\leq T$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$ によって生成される σ-加法族に関する確率過程であることに注意する。尚，本稿における確率論的議論は，完備確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ とフィルトレーション $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ (3) の上で行われるものとする。本稿を通して，以下を仮定する:

仮定 1 1. （1）は解 S を持ち，S は special semimartingale であり，その canonical decomposition $S=S_0+M+A$ は以下の 3 つの条件を満たす:

(a)

$$\left\|[M]_T^{1/2}+\int_0^T|dA_t|\right\|_{L^2(\mathbb{P})}<\infty.$$

ただし，$dM_t=S_{t-}(\beta_tdW_t+\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}\widetilde{N}(dt,dz))$ であり，$dA_t=S_{t-}\alpha_tdt$ である。

(b) 確率過程 λ_t を $\lambda_t:=\dfrac{\alpha_t}{S_{t-}(\beta_t^2+\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz))}$ と定義すれば，$A=\int\lambda d\langle M\rangle$ が成立する。

(c) $K_t:=\int_0^t\lambda_s^2d\langle M\rangle_s$ として可予測過程 K_t を定義すれば，K_T は $\mathbb{P}$-a.s. で有限である。

この条件 (a)–(c) を structure condition と呼ぶ。この structure condition は無裁定条件と深い関わりを持つ。詳しくは，Schweizer [8]，[9] を参照されたい。

2. $\gamma_{t,z}>-1$, (t,z,ω)-a.e., つまり，$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\mathbf{1}_{\{\gamma_{t,z}\leq-1\}}\nu(dz)dt\right]=0$ である。尚，この条件は S の正値性，すなわち，任意の $t\in[0,T]$ に対して $S_t>0$ となることを保証している。

3 Local risk-minimization

LRM は 30 年近く前に Föllmer and Sondermann [6] によって提唱された。その後，Martin Schweizer らを中心に多くの研究がなされた。詳しくは，[8]，[9] を参照されたい。

ヘッジの対象となる条件付き請求権を 2 乗可積分確率変数 $F\in L^2(\mathbb{P})$ で与える。1 節でも述べたが，完備市場においては完全複製戦略が存在する。このことを数学的に記述すると，任意の $F\in L^2(\mathbb{P})$ に対して，ある $c\in\mathbb{R}$ と可予測過程 ξ が存在し，

$$F=c+\int_0^T\xi_tdS_t \tag{2}$$

（3） $\mathbb{F}$ は usual condition を満たすものとする。つまり，右連続で $\mathcal{F}_0$ はすべての $\mathbb{P}$-零集合を含む trivial な σ-加法族とする。

を満たすことである。c は初期費用であり F の価格を与える。さらに複製戦略は，途中で資金の出し入れを行わない self-financing[(4)] であることに注意したい。非完備市場では（2）を満たす c と ξ の組は存在するとは限らないが，何らかの意味でもっとも近いものを構成できれば，それを最適ヘッジ戦略と見なしてよいであろう。例えば，（2）の右辺と左辺の差の 2 乗平均を最小化する方法がある。つまり，

$$\min_{c,\xi} \mathbb{E}\left[\left|F - c - \int_0^T \xi_t dS_t\right|^2\right]$$

である。この最適ヘッジ戦略を mean-variance hedging と呼ぶ。Mean-variance hedging では，条件付き請求権を複製することはできないが，self-financing な戦略の中で最適化を行っている。一方，途中で資金の出し入れを行いながらでも完全複製を行い，この追加資金をコントロールして最適化を行う方法もある。特に，mean-variance hedging と同様に L^2-空間の枠組みで最適化を行う方法として risk-minimization がある。もう少し詳しく論じよう。

時刻 t における投資家の安全資産の保有量を η_t, 危険資産の保有量を ξ_t と記述すると，投資家の富は $V_t = \eta_t + \xi_t S_t$ で与えられる。この η と ξ をペアにして φ と書き，戦略と呼ぶ。また，時刻 t までに投入した累積追加資金を C_t と書くと，

$$C_t = V_t - \int_0^t \xi_s dS_s$$

が成立する。何故ならば，右辺第 2 項は危険資産へ投資することにより得られた利得を表しているからである。C_0 は初期費用であることに注意しよう。C_t を用いて条件付き請求権 F を完全複製するので，$F = V_T = C_T + \int_0^T \xi_s dS_s$ が成り立つように C_t をとる。C_t のとり方は戦略 φ によるので，以後 $C_t(\varphi)$ と記述する。このとき，

$$R_t(\varphi) := E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

と定義し，これを戦略 φ のリスク過程と呼ぶ。雑にいえば，risk-minimization とは，あらゆる戦略の中でそのリスク過程が最小になるものをいう。つまり，任意の複製戦略 $\widetilde{\varphi}$ に対して，

$$R_t(\varphi) \leq R_t(\widetilde{\varphi}) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \text{ for every } t \in [0, T]$$

を満たす戦略のことである。

以上が risk-minimization の定義であるが, 実は資産価格過程 S が semimartingale である場合には, risk-minimization は存在するとは限らない。そこで, Schweizer はその定義を改良し, semimartingale の場合でも利用可能な LRM を提唱した[(5)]。詳細は述べないが，彼が与えた LRM の定義は非常に複

（4） self-financing には自己資金調達的などの訳語があるが，文献によって様々な訳語が使われておりまだ定訳は存在しない。

（5） LRM のファイナンス的意味は risk-minimization とほぼ同じであるので, 上記の risk-minimization の定義は，LRM を理解するための手助けになるであろう。

雑である。一方，LRM を数学的に定義し直すことは可能である。[9] の Theorem 1.6 は LRM の必要十分条件を与えたものであり，本稿ではこの必要十分条件を LRM の定義と見なすこととする。

定義 2　1.　Θ_S は，以下の条件を満たす $\mathbb{R}$-値可予測過程 ξ の集合とする：

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \xi_t^2 d\langle M\rangle_t + \left(\int_0^T |\xi_t dA_t|\right)^2\right] < \infty.$$

2.　$\xi \in \Theta_S$ と適合過程 η の組 $\varphi = (\xi, \eta)$ が L^2-戦略であるとは，$V(\varphi) := \xi S + \eta$ が右連続過程であり，任意の $t \in [0, T]$ に対して $\mathbb{E}[V_t^2(\varphi)] < \infty$ であるときにいう。ここで，ξ_t と η_t は，それぞれ危険資産と安全資産の時刻 t における投資家の保有量を表す。
3.　$F \in L^2(\mathbb{P})$ に対して，確率過程 $C^F(\varphi)$ を $C_t^F(\varphi) := F1_{\{t=T\}} + V_t(\varphi) - \int_0^t \xi_s dS_s$ により定義し，$\varphi = (\xi, \eta)$ の F に対するコスト過程と呼ぶ。
4.　L^2-戦略 φ が F に対する LRM であるとは，$V_T(\varphi) = 0$ であり，$C^F(\varphi)$ が M と直交するマルチンゲール，つまり，$[C^F(\varphi), M]$ が一様可積分マルチンゲールであるときにいう。

これより先，LRM の表現の導出について述べる。そのために，Föllmer-Schweizer 分解（以下，FS 分解）を定義しよう。

定義 3　$F \in L^2(\mathbb{P})$ が FS 分解を持つとは，F が

$$F = F_0 + \int_0^T \xi_t^F dS_t + L_T^F \tag{3}$$

と表現されるときにいう。ここで，$F_0 \in \mathbb{R}, \xi^F \in \Theta_S$ であり，L^F は，$L_0^F = 0$ である M と直交する 2 乗可積分マルチンゲールである。

以下は [9] の Proposition 5.2 である。

命題 4　仮定 1 の下，F に対する LRM $\varphi = (\xi, \eta)$ が存在することと，F が FS 分解を持つことは同値である。そのとき，LRM と FS 分解は以下の対応関係を持つ:

$$\xi_t = \xi_t^F, \quad \eta_t = F_0 + \int_0^t \xi_s^F dS_s + L_t^F - F1_{\{t=T\}} - \xi_t^F S_t.$$

この結果より，LRM の表現を得るためには，(3) における ξ^F の表現を得れば十分である。命題 4 より，FS 分解における ξ^F が求まれば，η は自動的に決まることから，これ以降，ξ^F を LRM そのものと見なす。ξ^F を導出するために，確率過程 $Z := \mathcal{E}(-\int \lambda dM)$ を考える。尚，$\mathcal{E}(Y)$ は Y の指数マルチンゲール（exponential martingale）である。つまり，Z は確率微分方程式 $dZ_t = -\lambda_t Z_{t-} dM_t$ の解である。仮定 1 に加え，以下を仮定する:

仮定 5　Z は正値 2 乗可積分マルチンゲールであり，$Z_T F \in L^2(\mathbb{P})$ を満たす。

マルチンゲール測度（martingale measure）$\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ が minimal であるとは，条件「M に直交する任意の 2 乗可積分 $\mathbb{P}$-マルチンゲールは $\mathbb{P}^*$ の下でもマルチンゲールである」を満たすときにいう。以後，minimal マルチンゲール測度を MMM(6) と呼ぶ。以下の補題を証明なしで紹介する。

補題 6　仮定 1 の下，Z が正値 2 乗可積分マルチンゲールであるならば，MMM $\mathbb{P}^*$ が存在し $d\mathbb{P}^* = Z_T d\mathbb{P}$ を満たす。

例 7　仮定 1 が満たされ，Z が正値 2 乗可積分マルチンゲールとなるモデルの枠組みを一つ紹介する。唐突だが，以下の 3 つの条件を考える:

1. $\gamma_{t,z} > -1$, (t,z,ω)-a.e.
2. ある $C>0$ に対して $\sup_{t\in[0,T]}(|\alpha_t| + \beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)) < C$.
3. ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在し

$$\frac{\alpha_t\gamma_{t,z}}{\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)} < 1-\varepsilon \quad \text{と} \quad \beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz) > \varepsilon, (t,z,\omega)\text{-a.e.}$$

　を満たす。

上記の条件 2 は，Situ [10] の Theorem 117 と併せて，（1）の解 S が唯一つ存在し，$\sup_{t\in[0,T]}|S_t| \in L^2(\mathbb{P})$ を満たすことを保証している。仮定 1 の最初の条件は以下のようにして確かめられる。まず，

$$\left\|\int_0^T |dA_t|\right\|_{L^2(\mathbb{P})}^2 \le C^2T^2\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|S_t|^2\right] < \infty$$

が成立する。次に，Burkholder-Davis-Gundy の不等式により，ある定数 $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[[M]_T] &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|M_t|^2\right]\\ &\le C\left\{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|S_t|^2\right] + |S_0|^2 + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|A_t|^2\right]\right\} < \infty\end{aligned}$$

を満たす。以上より，仮定 1 は満たされる。一方，上記の条件 3 は Z の正値性を保証している．細かな議論は省くが，上記の条件 2 と条件 3 から，Z が 2 乗可積分マルチンゲールであることも示される。補題 6 から，MMM は存在し，Z_T がその密度を与える。

（6）　minimal martingale measure の頭文字をとった。

4　Local risk-minimization の表現

本節では，マリアヴァン解析を用いて条件付き請求権 F の LRM ξ^F の具体的表現について研究した [2] の結果について紹介する。まず，マルチンゲールの表現定理を用いて LRM にアプローチする。

4.1　マルチンゲールの表現定理によるアプローチ

仮定 1 及び仮定 5 が成立しているものとしよう。$\mathbb{P}^*$ を MMM とする，つまり $d\mathbb{P}^* = Z_T d\mathbb{P}$ が成立する。マルチンゲールの表現定理（例えば，Cont and Tankov [4] の Proposition 9.4）によれば，可予測過程 g_t^0 と $g_{t,z}^1$ が存在し，

$$Z_T F = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] + \int_0^T g_t^0 dW_t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} g_{t,z}^1 \widetilde{N}(dt,dz)$$

と表現される。これを伊藤の公式などを用いて変形すると

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] + \int_0^T \frac{g_t^0 + \mathbb{E}[Z_T F|\mathcal{F}_{t-}]u_t}{Z_{t-}} dW_t^{\mathbb{P}^*} \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \frac{g_{t,z}^1 + \mathbb{E}[Z_T F|\mathcal{F}_{t-}]\theta_{t,z}}{Z_{t-}(1-\theta_{t,z})} \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt,dz) \\ &=: \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] + \int_0^T h_t^0 dW_t^{\mathbb{P}^*} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} h_{t,z}^1 \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt,dz) \end{aligned}$$

を得る。ここで，$u_t := \lambda_t S_{t-}\beta_t$, $\theta_{t,z} := \lambda_t S_{t-}\gamma_{t,z}$, $dW_t^{\mathbb{P}^*} := dW_t + u_t dt$, $\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt,dz) := \widetilde{N}(dt,dz) + \theta_{t,z}\nu(dz)dt$ である。Girsanov の定理より，$W^{\mathbb{P}^*}$ と $\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}$ はそれぞれ，$\mathbb{P}^*$ の下でのブラウン運動と compensated Poisson random measure である。加えて，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(h_t^0)^2 + \int_{\mathbb{R}_0} (h_{t,z}^1)^2 \nu(dz)\right\} dt\right] < \infty \tag{4}$$

を仮定する。新たな記号 $i_t^0 := h_t^0 - \xi_t S_{t-}\beta_t$, $i_{t,z}^1 := h_{t,z}^1 - \xi_t S_{t-}\gamma_{t,z}$,

$$\xi_t := \frac{\lambda_t}{\alpha_t}\{h_t^0\beta_t + \int_{\mathbb{R}_0} h_{t,z}^1 \gamma_{t,z}\nu(dz)\} \tag{5}$$

を用いると，$i_t^0\beta_t + \int_{\mathbb{R}_0} i_{t,z}^1\gamma_{t,z}\nu(dz) = 0$，つまり $i_t^0 u_t + \int_{\mathbb{R}_0} i_{t,z}^1\theta_{t,z}\nu(dz) = 0$ が成立することが分かる。よって，

$$\begin{aligned} F - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] - \int_0^T \xi_t dS_t &= \int_0^T i_t^0 dW_t^{\mathbb{P}^*} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} i_{t,z}^1 \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(dt,dz) \\ &= \int_0^T i_t^0 dW_t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} i_{t,z}^1 \widetilde{N}(dt,dz) \end{aligned}$$

を得る。以下の補題から，$L_t^F := \mathbb{E}[F - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F] - \int_0^T \xi_s dS_s | \mathcal{F}_t]$ が M に直交する 2 乗可積分マルチンゲールであり $L_0^F = 0$ を満たすことが分かる。

補題 8　仮定 1，仮定 5 と（4）の下，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (i_t^0)^2 dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (i_{t,z}^1)^2 \nu(dz) dt\right] < \infty$$

が成立する。

証明　$\frac{\beta_t^2}{\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)}$ と $\frac{\int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)}{\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)}$ は 1 より小さいことに注意すると，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \xi_t^2 S_{t-}^2 \beta_t^2 dt\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\beta_t^4 (h_t^0)^2 + \beta_t^2 \left(\int_{\mathbb{R}_0} h_{t,z}^1 \gamma_{t,z} \nu(dz)\right)^2}{\left(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)\right)^2} dt\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\beta_t^4 (h_t^0)^2 + \beta_t^2 \int_{\mathbb{R}_0} (h_{t,z}^1)^2 \nu(dz) \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,x}^2 \nu(dz)}{\left(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \gamma_{t,z}^2 \nu(dz)\right)^2} dt\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{(h_t^0)^2 + \int_{\mathbb{R}_0} (h_{t,z}^1)^2 \nu(dz)\right\} dt\right] < \infty
\end{aligned}$$

を得る。これと同じ議論により，$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \xi_t^2 S_{t-}^2 \gamma_{t,z}^2 \nu(dz) dt\right] < \infty$ を示せる。（4）を併せると，補題 8 が従う。 □

以上の議論をまとめると以下の結論を得る。

定理 9　仮定 1, 仮定 5 と（4）の下，ξ^F は（5）で定義された ξ により与えられる。

この定理において，LRM ξ^F の表現が緩い制約の中で得られた。しかし，（5）に現れる確率過程 h^0 と h^1 はマルチンゲールの表現定理から導かれたものであるため，これらの明示的表現の導出や条件（4）の確認を直接的に行うことは不可能である。この問題を解決するためにマリアヴァン解析を導入する。以下，h^0 と h^1 の明示的表現を得ることを目指す。

4.2　マリアヴァン解析によるアプローチ

まず準備として，マリアヴァン解析に関する新たな用語や記号をいくつか紹介する。本稿では，Solé et al. [11] や Delong and Imkeller [5] で扱われているマリアヴァン解析の枠組みを用いる。そこでは，基礎となるレヴィ過程 X と，canonical Lévy space と呼ばれる特殊な構造を持った確率空間の上にマリアヴァン解析を展開している。本稿では，canonical Lévy space の紹介は割愛する。今，$X_t := W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z\widetilde{N}(ds, dz)$ とおく。確率過程 X はレヴィ過程であることに注意する。

まず，$[0, T] \times \mathbb{R}$ 上に 2 つの測度 q と Q を定義する:

$$q(E) := \int_E \delta_0(dz)dt + \int_E z^2\nu(dz)dt,$$

$$Q(E) := \int_E \delta_0(dz)dW_t + \int_E z\widetilde{N}(dt,dz).$$

ただし，$E \in \mathcal{B}([0,T]\times\mathbb{R})$ であり，δ_0 は 0 における Dirac 測度である。以下の条件を満たすノンランダム(7)可測関数 $h:([0,T]\times\mathbb{R})^n \to \mathbb{R}$ の全体を $L^2_{T,q,n}$ によって表す:

$$\|h\|^2_{L^2_{T,q,n}} := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} |h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))|^2 q(dt_1,dz_1)\cdots q(t_n,z_n) < \infty.$$

さらに，$n \in \mathbb{N}$ と $h \in L^2_{T,q,n}$ に対して

$$I_n(h) := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))Q(dt_1,dz_1)\cdots Q(dt_n,dz_n)$$

と定義する。ただし，$L^2_{T,q,0} := \mathbb{R}$ であり，$h \in \mathbb{R}$ に対して $I_0(h) := h$ である。この設定の下，任意の $F \in L^2(\mathbb{P})$ は，n 個の組 $(t_i,z_i), 1 \le i \le n$ に関して対称な関数 $h_n \in L^2_{T,q,n}$ を用いて，

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$$

と表現される。これをカオス展開（chaos expansion）と呼ぶ。尚，カオス展開は一意性を持つ。さらに，$\mathbb{E}[F^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n!\|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}}$ である。ここで，マリアヴァン微分を定義しよう。

定義 10　1.　Sobolev 空間 $\mathbb{D}^{1,2}$ を以下のように定義する:

$$\mathbb{D}^{1,2} := \left\{ F \in L^2(\mathbb{P}) \middle| F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n), \sum_{n=1}^{\infty} nn!\|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty \right\}.$$

2.　任意の $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して，$DF:[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ を

$$D_{t,z}F := \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(h_n((t,z),\cdot))$$

と定義し，F のマリアヴァン微分と呼ぶ。

このマリアヴァン微分を用いると，いくつかの追加的な条件は必要であるが，MMM の下での Clark-Ocone 型公式を得ることができる。ただし，本稿では Clark-Ocone 型公式の紹介は省く。ともかく，Clark-Ocone 型公式を用いると，h^0 と h^1 の具体的表現が以下のように与えられる。

定理 11　仮定 1 と仮定 5 の下，MMM の下での Clark-Ocone 型公式が成立するならば，h^0 と h^1 は以下のように記述される:

$$h^0_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[D_{t,0}F - F\left[\int_0^T D_{t,0}u_s dW^{\mathbb{P}^*}_s + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \frac{D_{t,0}\theta_{s,x}}{1-\theta_{s,x}} \widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}(ds,dx) \right] \middle| \mathcal{F}_{t-} \right], \tag{6}$$

（7）　ここでは，ノンランダムを deterministic の訳語として用いる。

$$h^1_{t,z} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[F(H^*_{t,z}-1) + zH^*_{t,z}D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]. \tag{7}$$

さらに（4）が成り立てば，（6）と（7）をそれぞれ（5）における h^0 と h^1 に代入することにより，LRM ξ^F が得られる。

実は，「MMM の下での Clark-Ocone 型公式が成立するならば」という箇所が重要である。この公式が成立するための条件は非常に複雑である。ところが，確率微分方程式（1）の係数がノンランダムである場合は，この複雑な条件をチェックする必要がない。それゆえ，以下の系が成立する:

系 12　（1）における係数 α, β 及び γ がノンランダムであり，例 7 の 3 条件をすべて満たすものとする。加えて，

1. $Z_T F \in L^2(\mathbb{P})$,
2. $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,
3. $Z_T D_{t,z}F + FD_{t,z}Z_T + zD_{t,z}F \cdot D_{t,z}Z_T \in L^2(q \times \mathbb{P})$

を仮定する。この時，定理 11 のすべての条件は満たされ，LRM ξ^F は

$$\xi^F_t = \frac{\beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[D_{t,0}F|\mathcal{F}_{t-}] + \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[zD_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]\gamma_{t,z}\nu(dz)}{S_{t-}\left(\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)\right)}$$

により与えられる。

4.3　コールオプション

ここでは，条件付き請求権の代表例としてコールオプションを取り扱う。そのペイオフは，権利行使価格 $K > 0$ を用いて $(S_T - K)^+$ と表される。ただし，$x^+ = x \vee 0$ である。本項では，例 7 で論じたような係数がノンランダムな場合に対して，コールオプションに対する LRM の明示的表現の導出を行う。

まず，$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して，$(F-K)^+$ のマリアヴァン微分を計算しよう。実は，この計算は見かけほど簡単ではない。何故ならば，$(F-K)^+$ を F の汎関数と見なすと，連続であるが滑らかではないため，微分可能性を持たない。このことは，Suzuki [13] の Proposition 2.5 のような合成関数の微分の公式が使えないことを意味する。そこで，軟化子を利用した近似手法を用いて計算を行う。

定理 13　$F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $K \in \mathbb{R}$ と q-a.e. $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ に対して，$(F-K)^+ \in \mathbb{D}^{1,2}$ であり，

$$D_{t,z}(F-K)^+ = \mathbf{1}_{\{F>K\}}D_{t,0}F \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{(F+zD_{t,z}F-K)^+ - (F-K)^+}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)$$

が成立する。

証明　軟化子 φ を用いて証明する。つまり，φ は $\mathbb{R}$ から $[0,\infty)$ への C^∞-級関数であり，$\mathrm{supp}(\varphi)\subset[-1,1]$ と $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$ を満足する。ここで，$n\geq 1$ に対して，$\varphi_n(x):=n\varphi(nx)$ と $f_n(x):=\int_{-\infty}^{\infty}(y-K)^+\varphi_n(x-y)dy$ を定義する。尚，

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{y}{n}-K\right)^+\varphi(y)dy=\int_{-\infty}^{n(x-K)}\left(x-\frac{y}{n}-K\right)\varphi(y)dy$$

であることに注意すると，$f_n'(x)=\int_{-\infty}^{n(x-K)}\varphi(y)dy$ が成立する。つまり，$f_n\in C^1$ であり，$|f_n'|\leq 1$ である。ゆえに f_n は定数 1 によるリプシッツ連続関数である。[13] の Proposition 2.5 より，$n\geq 1$ に対して $f_n(F)\in\mathbb{D}^{1,2}$ であり，

$$D_{t,z}f_n(F)=f_n'(F)D_{t,0}F\cdot\mathbf{1}_{\{0\}}(z)+\frac{f_n(F+zD_{t,z}F)-f_n(F)}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \tag{8}$$

が成立する。さらに，$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}|f_n(x)-(x-K)^+|&=\left|\int_{-1}^{1}\left\{\left(x-\frac{y}{n}-K\right)^+-(x-K)^+\right\}\varphi(y)dy\right|\\&\leq\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}|y|\varphi(y)dy\leq\frac{1}{n}\end{aligned} \tag{9}$$

であることに注意すれば，$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[|f_n(F)-(F-K)^+|^2]=0$ を得る。Suzuki [12] の Proposition 2.4 を鑑みれば，$n\to\infty$ のときに，$D_{t,z}f_n(F)$ が

$$\mathbf{1}_{\{F>K\}}D_{t,0}F\cdot\mathbf{1}_{\{0\}}(z)+\frac{(F+zD_{t,z}F-K)^+-(F-K)^+}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)=:I_\infty$$

へ $L^2(q\times\mathbb{P})$ の意味で収束することを確かめれば，定理 13 は成立する。

まず，

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)dy & \text{if } x=K,\\ 1 & \text{if } x>K,\\ 0 & \text{if } x<K,\end{cases}$$

が成立するので，これより $\lim_{n\to\infty}f_n'(F)=\mathbf{1}_{\{F>K\}}+\mathbf{1}_{\{F=K\}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)dy$ を得る。(8)，(9) と下記の補題 14 より，$\lim_{n\to\infty}D_{t,z}f_n(F)=I_\infty$ が $q\times\mathbb{P}$-a.e. で収束し，

$$\begin{aligned}&|D_{t,z}f_n(F)-I_\infty|\\&\leq|f_n'(F)D_{t,0}F-\mathbf{1}_{\{F>K\}}D_{t,0}F|\mathbf{1}_{\{0\}}(z)\\&\quad+\left|\frac{f_n(F+zD_{t,z}F)-f_n(F)}{z}-\frac{(F+zD_{t,z}F-K)^+-(F-K)^+}{z}\right|\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)\\&\leq 2|D_{t,z}F|\in L^2(q\times\mathbb{P})\end{aligned}$$

を得る。そこで，有界収束定理を用いれば $D_{t,z}f_n(F)\to I_\infty$ が $L^2(q\times\mathbb{P})$ の意味で成立する。　□

補題 14　$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して，$\mathbf{1}_{\{F=0\}} D_{t,0} F = 0$, (t,ω)-a.e. が成立する。

証明　この補題の証明はかなり技術的である。

ステップ 1. 定理 13 と同様に軟化子 φ を考える。ここでは，$\varphi(0)=1$ であるものを考える。$n \geq 1$ に対して，$\varphi_n(x) := \varphi(nx)$，$\Phi_n(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi_n(y)dy$ と書く。$\Phi_n \in C^1$ であり，$\Phi_n'(x) = \varphi_n(x)$ は有界であることに注意する。[13] の Proposition 2.5 を用いると

$$D_{t,0}\Phi_n(F) = \varphi_n(F) D_{t,0} F \tag{10}$$

を得る。$\varphi_n(x) \to \mathbf{1}_{\{0\}}(x)\varphi(0) = \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty} D_{t,0}\Phi_n(F) = \mathbf{1}_{\{F=0\}} D_{t,0} F \tag{11}$$

を得る。

ステップ 2. どんな関数 $u \in L^2(q \times \mathbb{P})$ もカオス展開

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n(\cdot,(t,z)))$$

を持つ。ここで，$h_n \in L^2_{T,q,n+1}$ は初めの n 組の変数に関して対称である。$\hat{h}_n$ により，h_n を全 $n+1$ 組の変数に関して対称化した関数を表す。このとき，

$$\mathrm{Dom}_\delta := \left\{ u \in L^2(q \times \mathbb{P}) \middle| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \|\hat{h}_n\|^2_{L^2_{T,q,n+1}} < \infty \right\}$$

と定義する。ここで，Dom_δ が $L^2(q \times \mathbb{P})$-稠密であることを示す。Dom_δ の部分族として

$$\mathrm{Dom}_f := \left\{ u \in L^2(q \times \mathbb{P}) \middle| u(t,z) = \sum_{n=0}^{N} I_n(h_n(\cdot,(t,z))) \text{ for some } N \geq 1 \right\}$$

を定義する。今，$u \in L^2(q \times \mathbb{P})$ として $u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n(\cdot,(t,z)))$ を満たす関数を任意にとり，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して $u_N(t,z) := \sum_{n=0}^{N} I_n(h_n(\cdot,(t,z))) \in \mathrm{Dom}_f$ と書く。このとき，u_N は u に $L^2(q \times \mathbb{P})$-収束する。従って，Dom_f は $L^2(q \times \mathbb{P})$ において稠密である。つまり，Dom_δ も同様である。

ステップ 3. Dom_δ の稠密性から，すべての $u \in \mathrm{Dom}_\delta$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{F=0\}} D_{t,0} F \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(z) u(t,z) q(dt,dz) \right] = 0 \tag{12}$$

が成立することを示せば十分である。$u \in \mathrm{Dom}_\delta$ を任意に取り固定する。(11) から

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbf{1}_{\{F=0\}} D_{t,0} F \cdot u(t,0) dt \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \lim_{n\to\infty} D_{t,0}\Phi_n(F) \cdot u(t,0) dt \right] \tag{13}$$

を得る。$C_\varphi > 0$ が存在して $\varphi \leq C_\varphi$ を満たすので，（10）より $|D_{t,0}\Phi_n(F)| \leq |\varphi_n(F)||D_{t,0}F| \leq C_\varphi|D_{t,0}F|$ を得る。さらに

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |D_{t,0}F \cdot u(t,0)|dt\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^T |D_{t,0}F|^2 dt\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^T |u(t,0)|^2 dt\right]} < \infty$$

が成立する。よって，有界収束定理から

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \lim_{n\to\infty} D_{t,0}\Phi_n(F) \cdot u(t,0)dt\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T D_{t,0}\Phi_n(F) \cdot u(t,0)dt\right] \tag{14}$$

が成立する。次に，[11] の 6 章における双対公式（duality formula）より，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\left|\mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} D_{t,z}\Phi_n(F) \cdot u(t,z)q(dt,dz)\right]\right| \leq C\|\Phi_n(F)\|_{L^2(\mathbb{P})} \leq C\frac{1}{n}$$

を満たす。これにより，$n \to \infty$ とすれば

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T D_{t,0}\Phi_n(F) \cdot u(t,0)dt\right] \to 0 \tag{15}$$

となる。結局，（13），（14）と（15）より（12）を得る。 □

以上の準備の下，いよいよコールオプション $(S_T - K)^+$ に対する LRM の具体的表現の導出を行う。以下，例 7 における 3 つの条件を満たすノンランダム係数の場合を考える。さらに，技術的な理由により以下の仮定を追加する:

$$\int_{\mathbb{R}_0} \{\gamma_{t,z}^4 + |\log(1+\gamma_{t,z})|^2\}\nu(dz) < C \text{ for some } C > 0. \tag{16}$$

この条件（16）と例 7 における 3 つの条件を満たすモデルは，系 12 のすべての条件を満たすことを示す。そのため，まず S_T のマリアヴァン微分を計算しよう。

命題 15　$S_T \in \mathbb{D}^{1,2}$ であり，q-a.e. $(t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ に対して

$$D_{t,z}S_T = S_T\beta_t\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{S_T\gamma_{t,z}}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \tag{17}$$

である。

証明　まず，

$$\begin{aligned}\log(S_T/S_0) = &\int_0^T \left[\alpha_t - \frac{1}{2}\beta_t^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \{\log(1+\gamma_{t,z}) - \gamma_{t,z}\}\nu(dz)\right]dt \\ &+ \int_0^T \beta_t dW_t + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0} \log(1+\gamma_{t,z})\widetilde{N}(dt,dz)\end{aligned}$$

に注意すると，（16）と [5] の Lemma 3.3 より，$\log(S_T/S_0) \in \mathbb{D}^{1,2}$ となり，任意の $(t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ に対して $D_{t,z}\log(S_T/S_0) = \beta_t\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{\log(1+\gamma_{t,z})}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)$ が成立する。$F := \log(S_T/S_0)$ and

$f(x) := S_0 e^x$ とおくと，$S_T = f(F)$ と書けるので，$f'(F)D_{t,0}F = S_T\frac{\beta_t}{1}$ が各 $t \in [0,T]$ に対して成立し，

$$\frac{f(F+zD_{t,z}F)-f(F)}{z} = S_T\frac{\exp\{zD_{t,z}F\}-1}{z} = \frac{S_T\gamma_{t,z}}{z}$$

が各 $(t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}_0$ に対して成立する。ゆえに，[13] の Proposition 2.5 から $S_T \in \mathbb{D}^{1,2}$ と（17）を得る。 □

次に，系 12 における 3 つの条件を確認しよう。まず，簡単な計算により，

$$d(Z_tS_t) = S_{t-}Z_{t-}\left\{(\beta_t-u_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}_0}(\gamma_{s,x}-\theta_{s,x}-\gamma_{s,x}\theta_{s,x})\widetilde{N}(ds,dx)\right\}$$

を得る。これと [10] の Theorem 117 より $Z_TS_T \in L^2(\mathbb{P})$ が成立する。従って, $Z_T(S_T-K)^+ \in L^2(\mathbb{P})$ となる。さらに，定理 13 と命題 15 から $(S_T-K)^+ \in \mathbb{D}^{1,2}$ となり，2 つ目の条件も成立する。最後に，

$$D_{t,z}(S_T-K)^+ = \mathbf{1}_{\{S_T>K\}}S_T\beta_t\cdot\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{(S_T(1+\gamma_{t,z})-K)^+-(S_T-K)^+}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)$$

が成立するから，

$$\left\|Z_TD_{t,z}(S_T-K)^+\right\|^2_{L^2(q\times\mathbb{P})} \le \mathbb{E}[Z_T^2S_T^2]\left(\int_0^T\beta_t^2dt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)dt\right) < \infty,$$

と

$$\left\|(S_T-K)^+D_{t,z}Z_T\right\|^2_{L^2(q\times\mathbb{P})} \le \mathbb{E}[S_T^2Z_T^2]\left(\int_0^Tu_t^2dt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\theta_{t,z}^2\nu(dz)dx\right) < \infty$$

を得る。また，以下を満たすある $C>0$ が存在する:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|zD_{t,z}(S_T-K)^+D_{t,z}Z_T|^2q(dt,dz)\right]\\&\le \mathbb{E}[Z_T^2S_T^2]\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\theta_{t,z}^2\nu(dz)dt\right) \le C\mathbb{E}[Z_T^2S_T^2]\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^4\nu(dz)dt\right).\end{aligned}$$

この事実と（16）より，系 12 の 3 番目の条件が成立する。

以上をまとめると，以下の LRM の明示的表現が得られる。

命題 16 確率微分方程式（1）の係数がノンランダムで，例 7 における 3 つの条件と条件（16）を満たすとき、任意の $K>0$ と $t\in[0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}\xi_t^{(S_T-K)^+} = &\frac{1}{S_{t-}\left(\beta_t^2+\int_{\mathbb{R}_0}\gamma_{t,z}^2\nu(dz)\right)}\left\{\beta_t^2\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}S_T|\mathcal{F}_{t-}]\right.\\&\left.+\int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T(1+\gamma_{t,z})-K)^+-(S_T-K)^+|\mathcal{F}_{t-}]\gamma_{t,z}\nu(dz)\right\}\end{aligned}$$

が成立する。

5　Merton ジャンプ拡散過程に対する数値計算法

本節では，命題 16 で得られた LRM の表現式に対して，$L_t := \log S_t$ が Merton ジャンプ拡散過程と呼ばれるレヴィ過程である場合を考え，その数値計算法を述べることを目的とする。本節で紹介される結果は [1] で得られたものである。尚，本節では簡単のため，$S_0 = 1$ とする。このようにしても一般性を失うことはない。特に，Carr and Madan [3] で提唱された Carr-Madan アプローチと呼ばれる高速フーリエ変換をベースとした数値計算法を紹介する。

5.1　Carr-Madan アプローチ

まず，Carr-Madan アプローチの紹介から始めよう。これは，危険資産価格過程 S が $\mathbb{P}$-マルチンゲールであるときに，コールオプションの価格 $\mathbb{E}[(S_T - K)^+]$ を，高速フーリエ変換をベースに高速に数値計算する方法である。ここで，高速フーリエ変換とは，以下のような離散フーリエ変換を高速に数値計算する方法である:

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}ju} x_j \quad \text{for } u = 0, \cdots, N-1. \tag{18}$$

尚，$\{x_j\}_{j=0,\cdots,N-1}$ は $\mathbb{R}$ 上の数列であり，離散化の個数 N は通常 2 のべき乗をとる。通常の離散フーリエ変換の計算負荷は $O(N^2)$ のオーダーであるが，高速フーリエ変換の場合は $O(N \log_2 N)$ のオーダーで済むことから，より高速に計算することが可能となる。

$k := \log K$ 及び $C(k) := \mathbb{E}[(S_T - e^k)^+]$ と書こう。$\alpha > 0$ に対して，

$$C(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-i(v-i\alpha)k} \frac{\phi(v - i\alpha - i)}{i(v - i\alpha)(i(v - i\alpha) + 1)} dv \tag{19}$$

が成立する。ただし，ϕ は $L_T (= \log S_T)$ の特性関数である。(19) の右辺は α の選び方に依らないことを付記しておく。今，$z \in \mathbb{C}$ に対して $\psi(z) := \frac{\phi(z-i)}{iz(iz+1)}$ とし，(19) に対して台形則を適用すると，$C(k)$ は以下のように近似できる:

$$C(k) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(\eta j - i\alpha)k} \psi(\eta j - i\alpha)\eta. \tag{20}$$

ここで，$\eta > 0$ は標本点の間隔である。よって，(20) の右辺は，(19) における積分で積分区間を 0 から $N\eta$ までとったものに相当する。従って，N と η は，$\varepsilon > 0$ を許容誤差としたときに，

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{N\eta}^\infty e^{-i(v-i\alpha)k} \psi(v - i\alpha) dv \right| < \varepsilon$$

を満たすようにとる必要がある。さらに詳細は省くが，k は Nyquist 周波数を越えられないので，$|k| < \frac{\pi}{\eta}$ が満たされていなければならない。逆にいえば，与えられた k がこの条件を満たすように

η をとる必要がある。Carr-Madan アプローチでは，計算精度を上げるために Simpson ルールを適用している。（20）の右端にある η を少し書き換えて，

$$
\begin{aligned}
C(k) &\approx \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(\eta j - i\alpha)k}\psi(\eta j - i\alpha)\frac{\eta}{3}(3+(-1)^{j+1}-\delta_j) \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}ju}e^{i\pi j}\psi(\eta j - i\alpha)\frac{\eta}{3}(3+(-1)^{j+1}-\delta_j) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

とする。ただし，δ_j はクロネッカーのデルタ関数であり，$u := \left(k+\frac{\pi}{\eta}\right)\frac{N\eta}{2\pi}$ である。u が自然数ならば，（21）は（18）の形の離散フーリエ変換になり，高速フーリエ変換を用いて高速に数値計算を行うことが可能となる。

5.2 積分表現

$L_t := \log S_t$ が Merton ジャンプ拡散過程である場合を考える。Merton ジャンプ拡散過程とは，ボラティリティー $\sigma > 0$ を持つ拡散項と複合ポアッソンジャンプからなる確率過程であり，特にジャンプの大きさが正規分布に従っているものをいう。ここで，ジャンプの強度を $\gamma > 0$，ジャンプサイズの平均を $m \in \mathbb{R}$, 標準偏差を $\delta > 0$ とする。よって，レヴィ測度 ν は

$$
\nu(dx) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right\}dx
$$

と書ける。今後，パラメーターを強調するため，必要ならばこの ν を $\nu[m,\gamma,\delta]$ と表す。尚，Merton ジャンプ拡散過程は，常に条件（16）を満たす。また，L_t のドリフト係数を μ として，例 7 の 3 条件を書き換えると，

1. $0 \geq \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \gamma\left\{\exp\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right) - 1 - m\right\}$,
2. $\mu + \frac{3\sigma^2}{2} + \gamma\left\{\exp(2m+2\delta^2) - \exp\left(m+\frac{\delta^2}{2}\right) - m\right\} > 0$,

と要約される。以下，この条件を満たすようにパラメーターを選ぶものとしよう。

このとき，命題 16 より

$$
\xi_t^{(S_T-K)^+} = \frac{\sigma^2 I_1 + I_2}{S_{t-}\left(\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}_0}(e^x-1)^2\nu(dx)\right)}
$$

を得る。ただし，

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}S_T|\mathcal{F}_{t-}], \\
I_2 &:= \int_{\mathbb{R}_0}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_Te^x-K)^+ - (S_T-K)^+|\mathcal{F}_{t-}](e^x-1)\nu(dx)
\end{aligned}
$$

である。ここでは，これら I_1 と I_2 の積分表現を求め，Carr-Madan アプローチで数値計算可能な形式まで持ち込むことを目指す。LRM の表現式は $\mathbb{P}^*$ の下での条件付き期待値により与えられることに注意する。従って，（19）における ϕ は，L_{T-t} の $\mathbb{P}^*$ の下での特性関数でなければならない。以後，$\phi_{T-t}(z) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{izL_{T-t}}]$，$z \in \mathbb{C}$ とする。

まず，$I_1(= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}} S_T | \mathcal{F}_{t-}])$ の積分表現を導出しよう。Tankov [14] の Proposition 2 より次の結果を得る：

命題 17　任意の $K > 0$，$t \in [0, T]$ と $\alpha \in (1, 2]$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}} \cdot S_T | \mathcal{F}_{t-}] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K^{-iv-\alpha+1}}{\alpha - 1 + iv} \phi_{T-t}(v - i\alpha) S_{t-}^{\alpha+iv} dv \tag{22}$$

が成立する。ここで，右辺は α の選び方に依らない。

上記の命題の証明は省略する。（22）を（19）と同様な形式に変形しよう。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}} \cdot S_T | \mathcal{F}_{t-}] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{K^{-iv-\alpha+1}}{\alpha - 1 + iv} \phi_{T-t}(v - i\alpha) S_{t-}^{\alpha+iv} dv \\ &= \frac{e^k}{\pi} \int_0^\infty e^{-i(v-i\alpha)k} \psi_1(v - i\alpha) dv.\end{aligned}$$

ここで，$k := \log(K)$ であり，$z \in \mathbb{C}$ に対して $\psi_1(z) := \frac{\phi_{T-t}(z) S_{t-}^{iz}}{iz-1}$ と定義する。以上の結果，I_1 は離散フーリエ変換（21）を用いて数値計算を行うことが可能である。

次に $I_2(= \int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T e^x - K)^+ - (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{t-}](e^x - 1)\nu(dx))$ について議論しよう。まず，I_1 と同様に [14] を用いて以下の積分表現を得る。

命題 18　任意の $K > 0$，$t \in [0, T]$ と $\alpha \in (1, 2]$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{t-}] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^{-iv-\alpha+1} \frac{\phi_{T-t}(v - i\alpha) S_{t-}^{\alpha+iv}}{(\alpha - 1 + iv)(\alpha + iv)} dv$$

が成立する。ここで，右辺は α の選び方に依らない。

各 $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\psi_2(z) := \frac{\phi_{T-t}(z) S_{t-}^{iz}}{(iz-1)iz}$ と書こう。また，$\zeta := v - i\alpha$ とおく。このとき，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{t-}] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^{-iv-\alpha+1} \frac{\phi_{T-t}(v - i\alpha) S_{t-}^{\alpha+iv}}{(\alpha - 1 + iv)(\alpha + iv)} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^{-i\zeta+1} \frac{\phi_{T-t}(\zeta) S_{t-}^{i\zeta}}{(i\zeta - 1)i\zeta} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^{-i\zeta+1} \psi_2(\zeta) dv =: f(K) \end{aligned} \tag{23}$$

が成立する。Fubini の定理を用いると

$$\int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T e^x - K)^+ - (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{t-}](e^x - 1)\nu(dx)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}_0} \left\{ e^x f(e^{-x}K) - f(K) \right\} (e^x - 1)\nu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}_0} \left\{ \frac{e^x}{\pi} \int_0^\infty (Ke^{-x})^{-i\zeta+1} \psi_2(\zeta) dv - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^{-i\zeta+1} \psi_2(\zeta) dv \right\} (e^x - 1)\nu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}_0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{i\zeta x} - 1) K^{-i\zeta+1} \psi_2(\zeta) dv \right\} (e^x - 1)\nu(dx) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_0} (e^{i\zeta x} - 1)(e^x - 1)\nu(dx) K^{-i\zeta+1} \psi_2(\zeta) dv
\end{aligned}
\tag{24}
$$

を得る。I_2 を高速フーリエ変換を用いて数値計算するためには，（24）をさらに展開し，（19）と同じ形式にまで持ち込む必要がある。そのためには，いくつか準備をしなければならない。これ以降，$\alpha \in (1,2]$ を任意に固定する。

まず，ϕ の解析的表現を導出したい。そのために，MMMℙ* の下でのレヴィ測度 $\nu^{\mathbb{P}^*}$ を計算しよう。

命題 19

$$
\nu^{\mathbb{P}^*}(dx) = \nu[(1+h)\gamma, m, \delta^2](dx) + \nu\left[-h\gamma \exp\left\{\frac{2m+\delta^2}{2}\right\}, m+\delta^2, \delta^2\right](dx) \tag{25}
$$

が成立する。ここで，

$$
h := \frac{\mu^S}{\sigma_2 + \int_{\mathbb{R}_0}(e^x - 1)^2 \nu(dx)}
$$

である。

証明　仮定 1 より $0 > h > -1$ であるから

$$
\nu^{\mathbb{P}^*}(dx) = (1-\theta_x)\nu(dx) = (1 - h(e^x - 1))\nu(dx) = (1+h)\nu(dx) - he^x\nu(dx)
$$

を得る。さらに，

$$
\begin{aligned}
e^x \nu(dx) &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left\{ x - \frac{(x-m)^2}{2\delta^2} \right\} dx \\
&= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left\{ -\frac{[x-(m+\delta^2)]^2}{2\delta^2} + \frac{2m+\delta^2}{2} \right\} dx \\
&= \nu\left[\gamma \exp\left\{\frac{2m+\delta^2}{2}\right\}, m+\delta^2, \delta^2\right](dx)
\end{aligned}
$$

が成立することから，（25）が成り立つ。 □

次に，特性関数 $\phi_{T-t}(z)$ を計算する。

命題 20　任意の $z \in \mathbb{C}$ と $t \in [0,T]$ に対して

$$
\phi_{T-t}(z) = \exp\left\{ (T-t)\left[iz\mu^* - \frac{\sigma^2 v^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0} (e^{izx} - 1 - izx)\nu^{\mathbb{P}^*}(dx) \right] \right\}
$$

$$= \exp\left\{(T-t)\left[iz\mu^* - \frac{\sigma^2 z^2}{2} + (1+h)\gamma(e^{imz - \frac{z^2\delta^2}{2}} - 1 - imz)\right.\right.$$
$$\left.\left. - h\gamma e^{\frac{2m+\delta^2}{2}}[e^{i(m+\delta^2)z - \frac{z^2\delta^2}{2}} - 1 - iz(m+\delta^2)]\right]\right\}$$

が成立する。

証明

$$\begin{aligned}
\phi_{T-t}(z) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left\{iz\left[\mu^*(T-t) + \sigma W^{\mathbb{P}^*}_{T-t} + \int_{\mathbb{R}_0} x\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}([0,T-t],dx)\right]\right\}\right] \\
&= \exp\{(T-t)iz\mu^*\}\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{iz\sigma W^{\mathbb{P}^*}_{T-t}}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left\{iz\int_{\mathbb{R}_0} x\widetilde{N}^{\mathbb{P}^*}([0,T-t],dx)\right\}\right] \\
&= \exp\left\{(T-t)\left[iz\mu^* - \frac{\sigma^2 z^2}{2} + \int_{\mathbb{R}_0}(e^{izx} - 1 - izx)\nu^{\mathbb{P}^*}(dx)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

□

次に，(24) を展開しよう。$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\tilde{\psi}(z) := \psi_2(z)\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}z^2\right\}$ とおき，さらに $\tilde{f}(K) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K^{-i\zeta+1}\tilde{\psi}_2(\zeta)dv$ と定義する。$\tilde{f}$ の値は，(23) における f と同様に，離散フーリエ変換 (21) を通じて高速フーリエ変換により計算可能である。以下の命題は，(24)，つまり I_2 が 3 つのフーリエ変換の一次結合で表されることを示す。

命題 21　$t \in [0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T e^x - K)^+ - (S_T - K)^+|\mathcal{F}_{t-}](e^x - 1)\nu(dx) \\
&= \gamma e^{2m+\frac{3}{2}\delta^2}\tilde{f}(Ke^{-m-\delta^2}) - \gamma e^m\tilde{f}(Ke^{-m}) + \gamma(1 - e^{m+\frac{\delta^2}{2}})f(K) \qquad (26)
\end{aligned}$$

が成立する。

証明　まず，$\int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\zeta x} - 1)(e^x - 1)\nu(dx)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_0}(e^{i\zeta x} - 1)(e^x - 1)\nu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}_0}(e^{(i\zeta+1)x} - e^{i\zeta x} + 1 - e^x)\nu(dx) \\
&= \gamma\exp\left\{(i\zeta+1)m + \frac{\delta^2}{2}(i\zeta+1)^2\right\} - \gamma\exp\left\{i\zeta m - \frac{\delta^2}{2}\zeta^2\right\} + \gamma(1 - e^{m+\frac{\delta^2}{2}})
\end{aligned}$$

を得る。よって，

$$(24) = \frac{\gamma}{\pi}e^{m+\frac{\delta^2}{2}}\int_0^\infty e^{i\zeta(m+\delta^2)}K^{-i\zeta+1}e^{-\frac{\delta^2}{2}\zeta^2}\psi(\zeta)dv$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\gamma}{\pi}\int_0^{\infty}(Ke^{-m})^{-i\zeta+1}e^m e^{-\frac{\delta^2}{2}\zeta^2}\psi(\zeta)dv+\gamma(1-e^{m+\frac{\delta^2}{2}})f(K)\\
&=\gamma e^{2m+\frac{3}{2}\delta^2}\tilde{f}(Ke^{-m-\delta^2})-\gamma e^m\tilde{f}(Ke^{-m})+\gamma(1-e^{m+\frac{\delta^2}{2}})f(K)
\end{aligned}
$$

となる。 □

以上より，I_1 を計算するために 1 回，I_2 のために 3 回，計 4 回高速フーリエ変換を用いることで LRM を数値計算することが可能であることが分かる。[1] では，実際の数値計算例も示されている。

謝　辞

本研究は石井記念証券研究振興財団による平成 25 年度研究助成を受けたものである。

参 考 文 献

[1] Arai, T., Imai, Y. and Suzuki, R. (2014) Numerical analysis on local risk-minimization for exponential Lévy models, 投稿中。

[2] Arai, T and Suzuki, R. (2015) Local risk-minimization for Lévy markets, to appear in International Journal of Financial Engineering.

[3] Carr, P. and Madan, D. (1999) Option valuation using the fast Fourier transform, Journal of Computational Finance, Vol.2, 61–73.

[4] Cont, R. and Tankov, P. (2004) Financial Modelling with Jump Processes, Chapman & Hall.

[5] Delong, L. and Imkeller, P. (2010) On Malliavin's differentiability of BSDEs with time delayed generators driven by Brownian motions and Poisson random measures, Stochastic Processes and their Applications, Vol.120, 1748–1775.

[6] Föllmer, H. and Sondermann, D. (1986) Hedging of non-redundant contingent claims, in W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (eds.), Contributions to Mathematical Economics, North-Holland, Amsterdam, 205–223.

[7] Protter, P. (2004) Stochastic Integration and Differential Equations, Springer.

[8] Schweizer, M. (2001) A guided tour through quadratic hedging approaches, Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, Cambridge University Press, 538–574.

[9] Schweizer, M. (2008) Local Risk-Minimization for Multidimensional Assets and Payment Streams, Banach Center Publ., Vol.83, 213–229.

[10] Situ, R. (2005) Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Springer.

[11] Solé, J.L., Utzet, F. and Vives, J. (2007) Canonical Lévy process and Malliavin calculus, Stochastic Processes and their Applications, Vol.117, 165–187.

[12] Suzuki, R. (2013) A Clark-Ocone type formula under change of measure for Lévy processes with L^2-Lévy measure, Commun. Stoch. Anal., Vol.7, 383–407.

[13] Suzuki, R. (2014) A Clark-Ocone type formula under change of measure for canonical Lévy processes, Research Report, KSTS/RR-14/002, Keio University.
http://www.math.keio.ac.jp/library/research/report/2014/14002.pdf
[14] Tankov, P. (2010) Pricing and hedging in exponential Lévy models: Review of recent results. In: Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010 (R.A. Carmona, E. Cinlar, I. Ekeland, E. Jouini, J.A. Scheinkman & A.N. Touzi Eds.), 319–359, Berlin: Springer.

要旨: レヴィ過程によって駆動される確率微分方程式の解で資産価格が記述される非完備市場モデルを考える。非完備市場においてもっとも代表的な最適ヘッジ戦略である local risk-minimization の明示的表現を，レヴィ過程に対するマリアヴァン解析を用いて導出する。この表現にさらなる計算を施し，高速フーリエ変換による数値計算が可能となる状態にまで展開する。

キーワード: 数理ファイナンス，最適ヘッジ戦略，local risk-minimization，コールオプション，マリアヴァン解析，高速フーリエ変換