Title	消費選好場における価格比と数量比の対称的表示と代用弾性
Sub Title	A Symmetrical Expression of the Price-Ratio and the Quantity : Radio in Relation to the Consumer's Preference Field, and the Elasticity of Substitution
Author	辻村, 江太郎(Tsujimura, Kotaro) 續, 幸子(Tsuzuki, Sakiko)
Publisher	
Publication year	1995
Jtitle	三田商学研究 (Mita business review). Vol.38, No.1 (1995. 4) ,p.33-
Abstract	素型相対限界効用PFORMUを消費量q_Iの1次結合で示したとき,価格比は,均衡条件により,両財のPFORMUの比として表わされる.この比を素型限界代替率と呼ぼう.均衡式と収支均等式を連立して解けば,数量を従属変数とした需要関数が得られるが,g財の数量q_gの需要関数とh財の数量q_hの需要関数の比をとると,数量比q_h/q_g,は価格p_Iの1次結合として表わすことができる.そして価格比の式と数量比の式とはp_Iとq_Iを入れ替えたかたちで完全に対称形をなす.この対称性を利用して代用弾性σを計算すると1
Notes	
Genre	Journal Article
URL	http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234698-19950400-00685635

三田商学研究
第38巻第1号
1995 年 4 月

1995年1月9日掲載承認

研究ノート

消費選好場における価格比と数量比の対称的表示と代用弾性

辻 村 江太郎
續 幸 子

＜要 約＞

素型相対限界効用PFORMUを消費量q_iの1次結合で示したとき，価格比は，均衡条件により，両財のPFORMUの比として表わされる．この比を素型限界代替率と呼ぼう．均衡式と収支均等式を連立して解けば，数量を従属変数とした需要関数が得られるが，g財の数量q_gの需要関数とh財の数量q_hの需要関数の比をとると，数量比$q_h／q_g$は価格p_iの1次結合として表わすことができる．そして価格比の式と数量比の式とはp_iとq_iを入れ替えたかたちで完全に対称形をなす．この対称性を利用して代用弾性σを計算すると$1 \gtreqless \sigma$の分類によって，Fisher-Friedmanの意味での，競合財，独立財，補完財，を仕分けることが可能になる．

＜キーワード＞

素型相対限界効用，素型限界代替率，競合財，補完財，代用弾性。

第1節 3財モデル

3財の価格をp_1，p_2，p_3；（購入）数量をq_1，q_2，q_3とし，これら3財に対する主体の消費総額をmとする。q_iは内生変数，p_i，mは外生変数とみなす。

各財間の限界代替率を通じての分子と分母の共通要素を約分したあとの，既約分数としての限界代替率に対応するものとして，各財ごとに素型相対限界効用（the prime form of the relative marginal utility略してPFORMU）を定義し，それが数量の1次同次式

$$
\begin{aligned}
&u_1=u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3,\\
&u_2=u_{21}q_1+u_{22}q_2+u_{23}q_3,\\
&u_3=u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3,\\
&u_{ij}=u_{ji} \qquad\qquad 1.1)
\end{aligned}
$$

で近似されるものとし，これらに対応する最も簡単な効用指標関数としてq_iの2次同次式を想定する。

均衡条件$u_1/p_1=u_2/p_2=u_3/p_3=\lambda$と，収支均等式によって，消費者行動の構造式系を書くと：

$$
\begin{aligned}
&u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3-p_1\lambda=0\\
&u_{21}q_1+u_{22}q_2+u_{23}q_3-p_2\lambda=0\\
&u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3-p_3\lambda=0\\
&p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=m \qquad\qquad 1.2)
\end{aligned}
$$

のようになる。

これに関して，係数の行列式および余因数をつぎのように書くこととする．

$$
D=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}=p_1D_{41}+p_2D_{42}+p_3D_{43}; \qquad 1.3)
$$

$$U=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix};\quad \begin{aligned} D_{41}&=p_1u_{11}^*+p_2u_{12}^*+p_3u_{13}^*,\\ D_{42}&=p_1u_{21}^*+p_2u_{22}^*+p_3u_{23}^*,\\ D_{43}&=p_1u_{31}^*+p_2u_{32}^*+p_3u_{33}^*,\\ D_{44}&=U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_{11}^*=u_{22}u_{33}-u_{23}^2, \quad u_{12}^*=u_{13}u_{23}-u_{12}u_{33},\\ &u_{13}^*=u_{12}u_{23}-u_{13}u_{22}, \quad u_{21}^*=u_{12}^*,\\ &u_{22}^*=u_{11}u_{33}-u_{13}^2, \quad u_{23}^*=u_{12}u_{13}-u_{11}u_{23},\\ &u_{31}^*=u_{13}^*, \quad u_{32}^*=u_{23}^*,\\ &u_{33}^*=u_{11}u_{22}-u_{12}^2;\\ &D_{11}=-2p_2p_3u_{23}+p_2^2u_{33}+p_3^2u_{22},\\ &D_{12}=p_2p_3u_{13}+p_1p_3u_{23}-p_3^2u_{12}-p_1p_2u_{33},\\ &D_{13}=p_2p_3u_{12}+p_1p_2u_{23}-p_2^2u_{13}-p_1p_3u_{22}, \end{aligned}$$

上の構造式系から，各財の需要関数が，

$$q_1=\frac{D_{41}}{D}m,\ q_2=\frac{D_{42}}{D}m,\ q_3=\frac{D_{43}}{D}m,\ \lambda\frac{D_{44}}{D}m \qquad 1.4)$$

のように書かれる。

ここでは，効用極大の２階の条件として，

$$D>0,\quad D_{11}<0 \qquad 1.5)$$

が要請されるが，上の需要関数でq_iやλは当然正であると想定されるから，ここでは

$$D_{41}>0,\ D_{42}>0,\ D_{43}>0,\ D_{44}>0 \qquad 1.6)$$

でなければならない。

第２節　価格比と数量比の対称的表示

フィッシャーの定義では，競合財の場合は価格比はつねに正の有限値をとるのに対して数量比は正もしくはゼロないし無限大となりうる。補完財の場合，数量比はつねに正の有限値をとるのに対して，価格比は正もしくはゼロないし無限大となりうる，……というのだった．したがって其処では，価格比および数量比が中心的な重要性を占めることになる。

前節の素型相対限界効用の式と均衡条件$p_i/p_j=u_i/u_j$とから，価格比はただちに

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3}{u_{21}q_1+u_{22}q_2+u_{23}q_3},$$

$$\frac{p_1}{p_3}=\frac{u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3}{u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3} \qquad 2.1)$$

のように，数量の１次結合の比として表示することができる。

また前節の1.4）式から，

$$q_2/q_1=D_{42}/D_{41},\quad q_3/q_1=D_{43}/D_{41} \qquad 2.2)$$

となっているから，これに1.3）の余因数の式を代入すれば，

$$\frac{q_2}{q_1}=\frac{u_{21}^*p_1+u_{22}^*p_2+u_{23}^*p_3}{u_{11}^*p_1+u_{12}^*p_2+u_{13}^*p_3}=\frac{u_2^*}{u_1^*};$$

$$\frac{q_3}{q_1}=\frac{u_{31}^*p_1+u_{32}^*p_2+u_{33}^*p_3}{u_{11}^*p_1+u_{12}^*p_2+u_{13}^*p_3}=\frac{u_3^*}{u_1^*} \qquad 2.3)$$

のように，数量比は価格の１次結合の比として表示される。

2.1）式と2.3）式とを見くらべれば，価格比を示す2.1）式右辺の分子・分母のu_{ij}をそれの余因数u_{ij}^*に置き換え，q_iをp_iに置き換えれば，数量比を示す2.3）式の右辺のかたちになる事が分かる。その意味で，価格比2.1）と数量比2.3）とは対称的な表示となっている。

第３節　競合財・補完財の定義とパラメタの符号条件

フィッシャーの競合財の定義を2.1）式に適用すると，価格比p_i/p_jはつねに正でなければならないから，分子・分母のPFORMUは$q_k\geqq 0$，$k=1, 2, 3$に対してつねに正値をとらねばならない．したがって選好パラメタu_{ij}，u_{ii}はつねに正でなければならない。

また，フィッシャーの補完財の定義を2.3）式に適用すると，数量比q_j/q_iは$q_k\geqq 0$，$k=1, 2, 3$においてつねに正でなければならないから，第１節の1.6）と合わせると，余因数u_{ij}^*はすべて正でなければならない。

つまり，競合財のときはu_{ij}（$i=1, 2, 3.\ j=1, 2, 3.$）のすべてが正ないし非負であることが要請され，補完財の場合にはu_{ij}^*（$i=1, 2, 3.\ j=1, 2,$

3.）のすべてが正ないし非負であることが要請される。

第４節　競合財の定義と代用弾性

２節で示したように，価格比は一般に2.1）式のように書けるが，これを変形して，

$$\frac{p_1}{p_3}=\frac{u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3}{u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3}$$

$$=\frac{u_{11}+u_{12}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)+u_{13}\left(\frac{q_3}{q_1}\right)}{u_{31}+u_{32}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)+u_{33}\left(\frac{q_3}{q_1}\right)} \qquad 4.1)$$

のように書くこともできる。ここでは

$$\frac{p_1}{p_3}=\frac{u_1}{u_3}=\frac{u_1/q_1}{u_3/q_1}=\frac{u_1'}{u_3'},\ u_i'=u_i/q_1 \qquad 4.2)$$

となっている．

他方で，３財モデルにおける偏代用弾性は，

$$\sigma=\frac{\partial(q_3/q_1)}{\partial(p_1/p_3)}\bigg/\frac{q_3/q_1}{p_1/p_3}$$

$$=\frac{\partial(q_3/q_1)}{\partial(p_1/p_3)}\cdot\frac{p_1q_1}{p_3q_3} \qquad 4.3)$$

のように定義される。

競合財の定義にかかわる価格比p_1/p_3は4.1）のように数量比q_3/q_1，q_2/q_1の関数であるかのように示されるから，ここでは(p_1/p_3)の(q_3/q_1)による微分

$$\frac{\partial(p_1/p_3)}{\partial(q_3/q_1)} \qquad 4.4)$$

をまず導いて，その逆数として，4.3）式の$\partial(q_3/q_1)/\partial(p_1/p_3)$を得る，という手順を考えることとしよう。

4.4）に4.1）を代入すると，

$$\frac{\partial(p_1/p_3)}{\partial(q_3/q_1)}=\frac{1}{(u_3')^2}$$

$$\left\{u_3'\cdot\frac{\partial u_1'}{\partial(q_3/q_1)}-u_1'\frac{\partial u_3'}{\partial(q_3/q_1)}\right\}$$

$$=\frac{q_1^2}{u_3^2}\left\{\frac{u_3}{q_1}\cdot u_{13}-\frac{u_1}{q_1}\cdot u_{33}\right\}$$

$$=\frac{q_1}{u_3^2}\ \{(u_3\cdot u_{13}-u_1\cdot u_{33}\}$$

$$=\frac{q_1}{u_3^2}\ \{(u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3)u_{13}$$

$$-(u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3)u_{33}\} \qquad 4.5)$$

となるから，この逆数をとると，

$$\frac{\partial(q_3/q_1)}{\partial(p_1/p_3)}$$

$$=\frac{u_3^2}{q_1}\cdot\frac{1}{(u_{13}^2-u_{11}u_{33})q_1+(u_{13}u_{23}-u_{12}u_{33})q_2} \qquad 4.6)$$

を得る。

他方で，4.3）のもう一つの要素である金額比は

$$\frac{p_1q_1}{p_3q_3}=\frac{u_1}{u_3}\frac{q_1}{q_3} \qquad 4.7)$$

とも書けるから，4.6）と4.7）を4.3）に代入すると，

$$\sigma=\frac{\partial(q_3/q_1)}{\partial(p_1/p_3)}\cdot\frac{p_1q_1}{p_3q_3} \qquad 4.8)$$

$$=\frac{1}{(u_{13}^2-u_{11}u_{33})q_1+(u_{13}u_{23}-u_{12}u_{33})q_2}\cdot\frac{u_3^2}{q_1}\cdot\frac{u_1q_1}{u_3q_3}$$

$$=\frac{(u_{11}q_1+u_{12}q_2+u_{13}q_3)(u_{31}q_1+u_{32}q_2+u_{33}q_3)}{(u_{13}^2-u_{11}u_{33})q_1q_3+(u_{13}u_{23}-u_{12}u_{33})q_2q_3}$$

$$\text{分子}=(u_{13}^2+u_{11}u_{33})q_1q_3+(u_{13}u_{23}+u_{12}u_{33})q_2q_3$$

$$+u_{11}u_{13}q_1^2+u_{12}u_{23}q_2^2+u_{13}u_{33}q_3^2$$

$$+(u_{11}u_{23}+u_{12}u_{13})q_1q_2$$

のようになる。ここで，一般に$0\geqq u_{ii}\geqq u_{ij}$，を仮定すれば，分子も分母も正であるが，分子の第１項，第２項はそれぞれ分母の第１項，第２項よりも大であるから，一般に分子が分母より大となって，

$$\sigma>1 \qquad 4.8')$$

のようになる。これは**競合財の定義**として

$$0\leqq u_{ii}\leqq u_{ij} \qquad 4.9)$$

を仮定した場合，**競合財の間での偏代用弾性はつねに１より大**，であることが証明されたことになる。

極端な場合として，$u_{11}=u_{22}=u_{33}=u_{12}=u_{13}=u_{23}$，つまり一般に$0<u_{ii}=u_{ij}$であるときには，4.8）式の分母がゼロとなって，代用弾性は無限大$\sigma=\infty$と，フィッシャーの**完全競合の場合**を示すこととなる。

第5節　補完財の定義と代用弾性

ここでも代用弾性は前節の4.3）と同じく，

$$\sigma=\frac{\partial(q_2/q_1)}{\partial(p_1/p_2)}\cdot\frac{p_1q_1}{p_2q_2} \qquad 5.1)$$

として定義する。

補完財についての数量比は第2節で示したように，価格の1次結合の比として書けるが，少し変形すれば，

$$\frac{q_2}{q_1}=\frac{u_{21}^*p_1+u_{22}^*p_2+u_{23}^*p_3}{u_{11}^*p_1+u_{12}^*p_2+u_{13}^*p_3}$$

$$=\frac{u_{21}^*\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+u_{22}^*+u_{23}^*\left(\frac{p_3}{p_2}\right)}{u_{11}^*\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+u_{12}^*+u_{13}^*\left(\frac{p_3}{p_2}\right)}$$

$$=\frac{u_2^*/p_2}{u_1^*/p_2} \qquad 5.2)$$

のようにも書ける。5.2）のq_2/q_1をp_1/p_2で微分すれば，

$$\frac{\partial(q_2/q_1)}{\partial(p_1/p_2)}=\left(\frac{p_2}{u_1^*}\right)^2$$

$$\left\{\frac{u_1^*}{p^2}\cdot\frac{\partial(u_2^*/p_2)}{\partial(p_1/p_2)}-\frac{u_2^*}{p_2}\cdot\frac{\partial(u_1^*/p_2)}{\partial(p_1/p_2)}\right\}$$

$$=\left(\frac{p_2}{u_1^*}\right)^2\left\{\frac{u_1^*}{p_2}\cdot u_{21}^*-\frac{u_2^*}{p_2}\cdot u_{11}^*\right\}$$

$$=\frac{p_2}{(u_1^*)^2}\ \{(u_{11}^*p_1+u_{12}^*p_2+u_{13}^*p_3)\cdot u_{21}^*$$

$$-(u_{21}^*p_1+u_{22}^*p_2+u_{23}^*p_3)u_{11}^*\}$$

$$=\frac{p_2}{(u_1^*)^2}\ \{(u_{12}^{*2}-u_{11}^*u_{22}^*)p_2$$

$$+(u_{12}^*u_{13}^*-u_{23}^*u_{11}^*)p_3\} \qquad 5.3)$$

を得る。

他方で，5.1）式の価格比の項に2.3）を代入して

$$\frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\frac{p_1u_1^*}{p_2u_2^*} \qquad 5.4)$$

とし，5.3）と5.4）とを5.1）に代入すれば

$$\sigma=\ \{(u_{12}^{*2}-u_{11}^*u_{22}^*)p_2+(u_{12}^*u_{13}^*-u_{23}^*u_{11}^*)p_3\}$$

$$\frac{p_2}{(u_1^*)^2}\cdot\frac{p_1u_1^*}{p_2u_2^*}$$

$$=\frac{(u_{12}^{*2}-u_{11}^*u_{22}^*)p_1p_2+(u_{12}^*u_{13}^*-u_{23}^*u_{11}^*)p_1p_3}{(u_{11}^*p_1+u_{12}^*p_2+u_{13}^*p_3)(u_{21}^*p_1+u_{22}^*p_2+u_{23}^*p_3)}$$

$$\text{分母}=(u_{12}^{*2}+u_{11}^*u_{22}^*)p_1p_2+(u_{12}^*u_{13}^*+u_{23}^*u_{11}^*)p_1p_3$$

$$+u_{11}^*u_{12}^*p_1^2+u_{12}^*u_{22}^*p_2^2+u_{13}^*u_{23}^*p_3^2$$

$$+(u_{12}^*u_{23}^*+u_{13}^*u_{22}^*)p_2p_3 \qquad 5.5)$$

を得る．ここで，**補完財の定義**として，$0\leqq u_{ii}^*\leqq u_{ij}^*$，$i=1,2,3;j=1,2,3$を仮定すれば，5.5）式の分子も分母もともに正であるから，代用弾性σはつねに正となる。さらに，分母の第1項と第2項は，それぞれ分子の第1項および第2項より大であることは明らかだから，上の定義の下で，**補完財の場合に偏代用弾性はつねに1より小，すなわち$\sigma<1$**，だと言うことができる。

極端な場合として，$u_{11}=u_{22}=u_{33}=u_{12}=u_{13}=u_{23}$つまり，一般に$u_{ii}=u_{ij}$となるときは，5.5）式の分子がゼロとなるから，偏代用弾性はゼロ，すなわち$\sigma=0$となる。これはフィッシャーの**完全補完**の定義に一致する。

第6節　独立財のPFORMUと代用弾性

独立財の場合の素型相対限界効用式として，古来よく知られているのは，いわゆるベルヌイ型の

$$u_1=\frac{a_1}{q_1},\ u_2=\frac{a_2}{q_2},\ u_3=\frac{a_3}{q_3} \qquad 6.1)$$

という形式と，いわゆるゴッセン型の

$$u_1=b_1-b_{11}q_1,\ u_2=b_2-b_{22}q_2,\ u_3=b_3-b_{33}q_3 \qquad 6.2)$$

という形式である。

いま6.1）の形式を仮定すると，限界代替率と価格比との間の均衡条件から，

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{a_1}{q_1}\Big/\frac{a_2}{q_2}=\frac{a_1}{a_2}\frac{q_2}{q_1}\text{だから，}$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{a_1}{a_2}\frac{q_2}{q_1}\text{ または }\frac{q_2}{q_1}=\frac{a_2}{a_1}\frac{p_1}{p_2} \qquad 6.3)$$

または

$$\frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\frac{a_1}{a_2} \qquad 6.4)$$

と書ける。

他方で，第Ⅰ財と第Ⅱ財の間の代用弾性は

$$\sigma=\frac{\partial(q_2/q_1)}{\partial(p_1/p_2)}\cdot\frac{p_1q_1}{p_2q_2} \qquad 6.5)$$

と書けるが，この右辺第１項の微分は6.3）から

$$\frac{\partial(q_1/q_2)}{\partial(p_1/p_2)}=\frac{a_2}{a_1} \qquad 6.6)$$

となり，6.5）の右辺第２項は6.4）によって$\frac{p_1q_1}{p_2q_2}=\frac{a_1}{a_2}$だから，これらを6.5）に代入すると，

$$\sigma=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}=1 \qquad 6.7)$$

のように，6.1）のかたちのPFORMUを仮定した場合には，代用弾性σがつねに１となることが分かる。

前節までに明らかにしたように，第１節のように素型相対限界効用が各財の数量の１次結合，$u_i=\sum_{j=1}^{3}u_{ij}q_j$で示せるとしたとき，選好パラメタに関して，$0\leqq u_{kk}\leqq u_{jk}$，$j=1，2，3；k=1，2，3，j\neq k$で定義される競合財の場合には代用弾性が１より大，$1<\sigma$となり；選好パラメタ$u_{jk}$および$u_{kk}$それぞれの余因数（の絶対値）に関して，$0\leqq u_{kk}^*\leqq u_{jk}^*$で定義される補完財の場合には代用弾性が１より小，$1>\sigma$となるのだった。

このように，競合財については$1<\sigma$，補完財については$1>\sigma$，という対称性から類推すれば，独立財については両者の中間の$1=\sigma$となるのが自然だから，その条件に合致する6.7）をもたらすようなベルヌイ型の独立財のPFORMUの特定化6.1）は，第１節の競合財および補完財に関するPFORMUの特定化と，よく整合していると言えよう。

これに対して，いわゆるゴッセン型の限界効用式6.2）を仮定した場合には，上のようにすっきりしたかたちにならない。したがって，ここでの独立財の限界効用式としては，6.1）を採用するのが適当であると見ることができる。

以上をまとめれば，代用弾性の値について，

競合財：$1<\sigma$，
独立財：$1=\sigma$，
補完財：$1>\sigma\geq 0$

のような分類が確立されたことになる。

續　幸子［産業研究所］