Title	選列の理論について
Sub Title	On the theory of choice sequences
Author	服部, 裕幸(Hattori, Hiroyuki)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1976
Jtitle	哲學 No.64 (1976. 1) ,p.1- 19
Abstract	The purpose of this article is to give a general idea of the theory of choice sequences (TCS) which is of great importance in the intuitionistic mathematics, and to correct some common misunderstanding on the law of the excluded middle. In § 1 the fundamental concepts of TCS are discussed informally. In §§ 2 and 3 it is shown that some laws, which are established in the classical system, can be refuted in TCS. In § 4 a formulation of some Kripke-model in TCS is given on the basis of the suggestions made by Kripke.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000064-0001

哲　学 第64集

選列の理論について

服部 裕幸

直観主義数学においては選列 (choice sequence) 及び直観主義の意味での“集合”(英語では“set”のかわりに“spread”という語があてられる) の概念が非常に重要な位置を占めている．(以下では，これらに言及するときには英語のほうを使用する.) 実際，これこそが直観主義数学を古典的な数学から分つものである．ブローウェル (Brouwer) が排中律の反証例としてあげているものはすべて，基本的には，これらの概念にもとづいており，また，一様連続性定理—これは，連続体の上では連続関数のみが存在しうるという内容のものである—の証明もこれらによっている．にもかかわらず，今日までのところ，彼の論文の難解さも手伝って，このことが十分に理解されているとは言い難いように思われる．また，直観主義に対しては多くの人々の間に排中律に関してある誤解があるように思われる．たとえば，今日，‘直観主義’と言えば，多くの哲学者や数学者は，ただちに‘排中律の拒否’を念頭に浮べ，排中律の拒否こそが直観主義数学の原理であるかのような印象を抱いているようであるが，これは，まったくの誤りではないにせよ，きわめて誤解を招きやすい印象である．排中律を一般的には認めることができないということは，むしろ，別の原理の論理的帰結なのである．そこで，この小論においては，私は，choice sequence の理論 (以下，TCS と略記する) の概略を示し，それによって排中律に関する誤解を解きたいと思う．

§1　TCS の基礎概念

いま，私が，任意の自然数 (0 を含む) を使って自由に無限数列を作る

ように言われたとしよう．そこで，私は次のような数列を作る．

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ldots \tag{*}$$

ここで，a_i ($i=0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots$) は自然数を表わすものとする．この数列は無限数列なので，これを書き終えることはできない．そこで，“……”と書いたわけで，その意味は，今後もそこに自由に自然数を書きつづけるということである．その意味で，この数列は生成過程にあると言ってよいであろう．（この無限は，ちょうど，実無限に対する可能的無限と言えよう．）この“生成過程にある”ということは次のように考えればより明らかとなる．すなわち，ステップ1では $[a_0]$ という有限数列が生成される．（これはもちろん完結した数列である．）ステップ2では $[a_0,\ a_1]$ という有限数列が生成される．ステップ3では $[a_0,\ a_1,\ a_2]$……．いま，便宜上，ステップ0では [　] という空な数列が生成されるものと考えれば，この過程は次のように表わすことができる．

$$[\quad] \to [a_0] \to [a_0,\ a_1] \to [a_0,\ a_1,\ a_2] \to \ldots\ldots \tag{**}$$

ここで，矢印は右側の有限数列が左側の有限数列から成長したものであることを示している．(*) の数列はこのような有限数列の生成過程を簡単に表現しているわけである．さて，このような生成過程にある無限数列は **free choice sequence** と呼ばれる(1)．これは，ある数論的関数 f の値の列としての

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\ldots \tag{***}$$

というような無限数列とは明確に区別されなければならない(2)．というのは，この数列の各項の値はそれ以前の各項の値がわからなくとも決定されうるが，free choice sequence の場合には，ステップ・バイ・ステップに生成されてゆくので，そのようなことは不可能なのである．

ここで次のような疑問が提出されるかもしれない．関数は確固としたものなので，それによって生成される無限数列を研究の対象とすることに異論はないが，いま説明がなされたような free choice sequence のような

ものははたして適切な研究対象となりうるであろうかという疑問である．ここで，“関数は確固としたものである”ということが何を意味しているかは明らかではないが，そのように主張する人は，f をある数論的関数とするとき，f にしたがって，$f(0), f(1), f(2)$……という無限数列が生成されるということを認めていると思われるので，free choice sequence についても同様のことが主張できるということを明らかにすることができれば，この疑問に対する答を与えることになるであろう．そして，われわれは free choice sequence をも $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2)$……と書き表わすことができるのである．ただし，この α は通常の数論的関数ではない．それは，むしろ，集合論の用語を用いれば，ω 個の面をもったある特定のサイコロ（を振る操作）にたとえられるであろう．$\alpha(n)$ は

$$[\quad] \to [\alpha(0)] \to [\alpha(0),\ \alpha(1)] \to \dots \to [\alpha(0), \dots,\ \alpha(n)] \to \dots$$

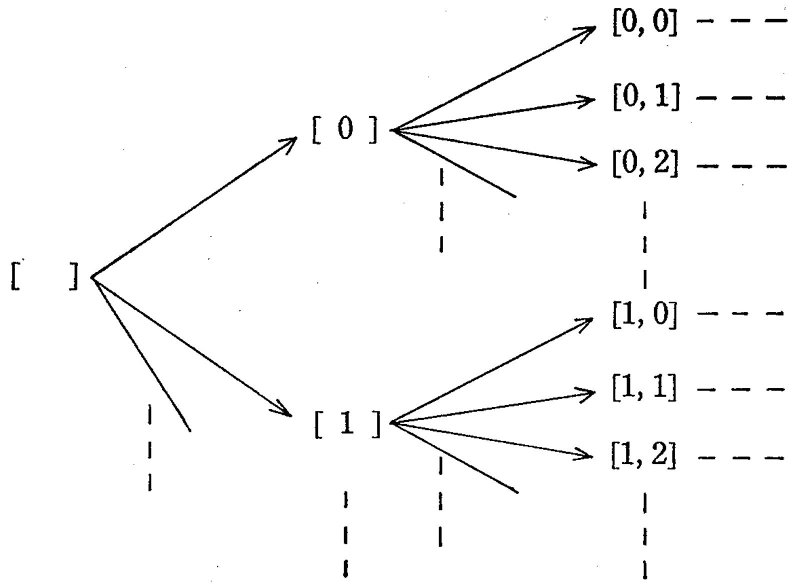
という有限数列の生成の過程ではじめて（任意）に決定されるのであるが，それにもかかわらず，このような無限数列を生成するものとしての α，すなわち，ある特定のサイコロ（を振る操作）を関数 f と同じように“確固としたもの”と考えることは許されるであろう．つまり，この数列は，いま述べた意味で，やはり α にしたがって生成されると考えられるのである．

この，free choice sequence と，関数の値列としての無限数列の違いを認識することは直観主義数学を理解するにあたってきわめて重要である．というのは，この違いを認識することが，後に述べるブローウェルの原理と呼ばれるものの妥当性，ひいては排中律の反証例の証明の妥当性を理解するためのポイントになるからである．事実，多くの数学者や論理学者が排中律の反証例の証明を理解できないことの一因はこの違いを認識できなかったという点にあるように思われる．

ところで，私は (*) のような数列を作ったわけであるが，別の数列を作ることもできたのである．私は最初に a_0 を選んだが，それが a_0 でなけ

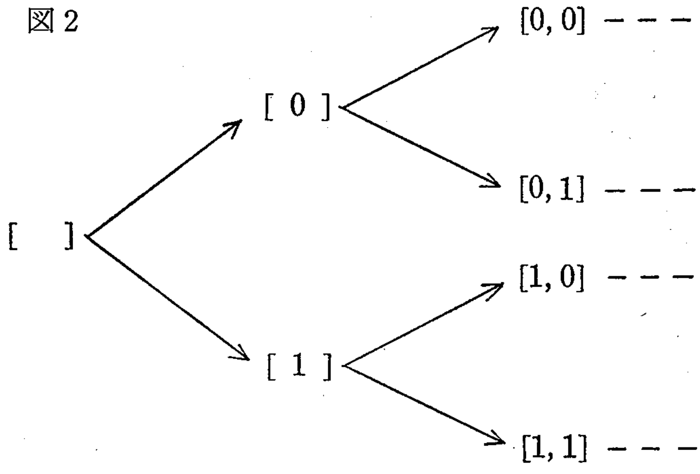
ればならない理由はない．それは自然数であれば何でもよかったのである．二番目以後についても同様である．そこで，私が作ることができる数列を(**)のような表現で書き出せば，次の図のような無限の tree となるであろう．

図1



さて，このように無限にある free choice sequence の中から特定の free choice sequence―たとえば0と1だけから成る sequence―だけを“集める”ためには，free choice sequence が生成過程にあるという性格をもっているために，その**生成に対して制限を加える**必要がある．0と1だけから成る無限数列を得るためには，各ステップでの自然数の選択が0か1に制限されなければならない．このような制限によって得られる数列は右の図で表わされるであろう．

図2



そして，このような制限を与える規則は，一般に，**choice law** と呼ばれる[3]．ここでは，各ステップでの自然数の選択が制限されているので，生成される数列は単に **choice sequence** と呼ばれる．私は先に，特定の free choice sequence だけを“集める”と述べたが，今述べたことからも明らかなように，この言い方はきわめて危険である．それは，free choice sequence を完結した対象とみなし，それらのうちのあるものを集めるという集合論的な考え方を連想させるが，ここではそのような集合論的な考え方とはまったく異なる考え方が採用されているのである．このことは，先に注意した点とともに，直観主義数学のキイ・ポイントである．

さて，次に spread を定義しよう．**spread**[4] は二つの規則のペアーとして定義される．その一つは今述べた choice law であり，いま一つは **correlation law**[5] と呼ばれるものである．correlation law というのは，choice law によって次々に生成される有限数列に対して一つづつ数学的実体を割り当ててゆく規則である．ここに，数学的実体とは，自然数，整数，有理数，すでに定義された spread などを意味している．たとえば，choice law によって次のような系列で示される choice sequence が生成されるとしよう．

$$[\quad] \rightarrow [a_0] \rightarrow [a_0,\ a_1] \rightarrow [a_0,\ a_1,\ a_2] \rightarrow \ldots\ldots$$

このとき，$[a_0]$ という有限数列に対しては r_{a0} という有理数を，$[a_0,\ a_1]$ には r_{a1} を，$[a_0,\ a_1,\ a_2]$ には r_{a2} を……というように，各ステップで生成される有限数列に特定の有理数を割り当ててゆくのが correlation law の役割である．したがって，ここでは，choice sequence とともに，r_{a0}, r_{a1}, r_{a2}, ……という無限列が生成されてゆくわけである．このような無限列は spread の要素と呼ばれる．明らかに，spread の要素も生成過程にあるものである．

各有限数列 $[a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n]$ に対して，その最後のメンバー a_n を割り当てる correlation law をもつ spread は **undressed**（あるいは **naked**） spread と呼ばれる．

choice law として free choice sequence の生成を許すような“law”をもつ undressed spread は **universal** spread と呼ばれる．図1は universal spread を表わす tree である．

choice sequence を生成する自然数の各選択が有限個の自然数の中でのそれに制限されている spread は **fan** と呼ばれる．たとえば，図2は undressed fan を表わす．

spread の例：有理数を適当に並べたものを $r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots$ とする．choice law；あるステップにおいて $[a_0, \ldots\ldots, a_{n-1}]$ が生成されたとき，$|r_{a_{n-1}}-r_{a_n}|<2^{-(n-1)}$ となるように $[a_0, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n]$ を生成する．correlation law；各 $[a_0, \ldots\ldots, a_n]$ に対して r_{a_n} を割り当てる．この spread の要素はすべていわゆるコーシー列となる．このように，この spread は連続体を表わす．

さて，各 choice sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ にある自然数 b を割り当てる場合を考えてみよう．すでに繰り返し述べたように，choice sequence は生成過程にあるものなので，それに対してある自然数を割り当てる際には，その生成のある有限のステップにおいて，割り当てられる数 b が決定されると考えられるべきである．すなわち，b はある n についての $[a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n]$ によって決定されるのである(6)．これは通常**ブローウェルの原理**と呼ばれており，古典的には偽な原理である．というのは，まさに，これから排中律の反証例が証明されうるからである (cf §3).

以上で TCS の基礎的な概念についての一般的な説明を終えるが，いままで述べてきたことから，これらの概念の背後には時間ないし時間的経過という考えが潜んでいると考える人があるかもしれない(7)．しかし，われわれは必ずしもそう考える必要はなく，いわんや，このことをもってこれらの概念を数学の中から排除することはできないように思われる．なぜなら，これらの概念は，そうしたものを切り離して，まったく形式的に扱う

ことができるからである．（そのような形式体系は，たとえば，[6] [9] [11] などにおいて与えられている．）

§2　ブローウェルの原理

本節においては，次節以下での議論を容易にするため，ブローウェルの原理のより立ち入った説明を与えたい．その際，多少形式化して議論を行なうが，それは，TCS のための一般的な形式体系の記述を与えなくとも，すでに述べてきたことから十分に理解できる範囲にとどめられている．

以下において考える spread はすべて undressed であるとする．いま，α を choice sequence を生成する choice（すなわち，ある特定のサイコロ（を振る操作））を表わすものとする．このとき，

$$\bar{\alpha}(t)=[\alpha(0),\ \alpha(1),\ \ldots\ldots,\ \alpha(t-1)]$$

と定義し，特に，$\bar{\alpha}(0)=[\ \ ]=1$ とする．すなわち，$\bar{\alpha}(t)$ は，α によって生成される choice sequence の，最初の t ステップで得られる切片を表わすわけである．

さて，ブローウェルの原理において述べられている，choice sequence に自然数 b を割り当てる手続きを τ で表わすことにすれば，universal spread のためのブローウェルの原理は，形式的には

$$\forall\alpha\exists bA(\alpha,\ b)\rightarrow\exists\tau\forall\alpha\exists t(A(\alpha,\ \tau(\bar{\alpha}(t)))$$
$$\&\ \forall s(A(\alpha,\ \tau(\bar{\alpha}(s)))\rightarrow t=s))$$

と書くことができそうである．（ここで，一般に，$\forall\alpha P(\alpha)$ は，図式的には，図1で示される universal spread のどの矢印に沿って進んでも，その choice sequence は P という性質をもつという意味をもっている．）しかし，われわれは $\bar{\alpha}(0)=[\ \ ]=1$ を認めており，上の定式化では $t=0$ ということが起りうるかもしれない．が，このときにも何かある自然数 b が τ によって決定されると考えるのはブローウェルの原理の趣旨に反するであろう．なぜなら，b の決定は選択によって何らかの自然数が選ばれた後

でのみ可能だからである．したがって，τ は，$\bar{\alpha}(t)$ が b を決定できるか否かをも同時に判定できなければならないであろう．そこで，この二つの作業を τ に担わせるために，τ は

$$\tau(\bar{\alpha}(t))=\begin{cases} 0 & \text{if } \bar{\alpha}(t) \text{ が } b \text{ の決定に役立たぬ,} \\ b+1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

という形をしているものと考えることにする．このとき，ブローウェルの原理は形式的には次のように表現することができる．

(a) $\forall\alpha\exists bA(\alpha, b)$

$$\rightarrow \exists\tau\forall\alpha\exists t(\tau(\bar{\alpha}(t))>0 \;\&\; \forall s(\tau(\bar{\alpha}(s))>0 \rightarrow t=s) \;\&\; A(\alpha, \tau(\bar{\alpha}(t))-1))$$

σ が universal でない spread であるということを Spr(σ) と書き，α が σ の制限にしたがう choice であるということを $\alpha\in\sigma$ と書くことにすると，一般の spread のためのブローウエルの原理は次のようになる．

(b) Spr(σ) & $\forall\alpha\in\sigma\exists bA(\alpha, b)$

$$\rightarrow \exists\tau\forall\alpha\in\sigma\exists t(\tau(\bar{\alpha}(t))>0 \;\&\; \forall s(\tau(\bar{\alpha}(s))>0 \rightarrow t=s) \;\&\; A(\alpha, \tau(\bar{\alpha}(t))-1))$$

これは，適当な TCS の形式体系においては，(a) から証明することができる (cf [6])．

次の命題は (a) から容易に証明することができる．

(1) $\forall\alpha(A(\alpha)\vee B(\alpha)) \rightarrow \exists\tau\forall\alpha\exists t(\forall s(\tau(\bar{\alpha}(s))>0 \rightarrow t=s)$

$$\& \; ((A(\alpha) \;\&\; \tau(\bar{\alpha}(t))=1)\vee(B(\alpha) \;\&\; \tau(\bar{\alpha}(t))=2)))$$

というのは，

$$A(\alpha) \rightarrow \exists b((A(\alpha) \;\&\; b=0)\vee(B(\alpha) \;\&\; b=1))$$
$$B(\alpha) \rightarrow \exists b((A(\alpha) \;\&\; b=0)\vee(B(\alpha) \;\&\; b=1))$$

は明らかなので，

$$\forall\alpha(A(\alpha)\vee B(\alpha)) \rightarrow \forall\alpha\exists b((A(\alpha) \;\&\; b=0)\vee(B(\alpha) \;\&\; b=1)).$$

これと (a) から (1) は明らかである．

同様にして，(b) から次の命題が証明可能である．

(2)　$\mathrm{Spr}(\sigma)\ \&\ \forall\alpha\in\sigma(A(\alpha)\vee B(\alpha))$

$$\rightarrow \exists\tau\forall\alpha\in\sigma\exists t(\forall s(\tau(\bar{\alpha}(s))>0\rightarrow t=s)$$
$$\&\ ((A(\alpha)\ \&\ \tau(\bar{\alpha}(t))=1)\vee(B(\alpha)\ \&\ \tau(\bar{\alpha}(t))=2)))$$

§3　排中律の反証

本節の目的は，TCS においては排中律の反証例が証明可能であること，及び，Heyting による $\forall x\neg\neg\mathscr{P}(x)\rightarrow\neg\neg\forall x\mathscr{P}(x)$ のモデル理論的な反証をわれわれの言葉で説明し，それがやはりブローウェルの原理に依存していることを示すことである．

まず，TCS では次の命題が証明可能であることを示そう．

$$\neg\forall\alpha(\forall x(\alpha(x)=0)\vee\neg\forall x(\alpha(x)=0))$$

この式が排中律の反例になることは明らかであろう．

証明は帰謬法による．いま $\forall\alpha(\forall x(\alpha(x)=0)\vee\neg\forall x(\alpha(x)=0))$ であるとしよう．このとき，§2 の (1) から，ある手続き τ が存在して，

$$\forall\alpha\exists y(\forall x(\tau(\bar{\alpha}(x))>0\rightarrow y=x)\ \&\ ((\forall x(\alpha(x)=0)\ \&$$
$$\tau(\bar{\alpha}(y))=1)\vee(\neg\forall x(\alpha(x)=0)\ \&\ \tau(\bar{\alpha}(y))=2))).\ \cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

いま，

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots$$

という，0 ばかりから成る choice sequence を生成する choice を α_1 としよう．したがって，$\forall x(\alpha_1(x)=0)$．それ故，(i) から，ある y について $\tau(\bar{\alpha}_1(y))=1$ が成り立つ．そこで，$\forall x(\alpha_2(x)=(x+1)\dot{-}y)$ が成り立つような choice sequence を生成する α_2 をとる[(8)]と，$\alpha_2(y)\neq 0$．したがって，$\neg\forall x(\alpha_2(x)=0)$．再び (i) から，ある z について，

$$\tau(\bar{\alpha}_2(z))=2\ \&\ \forall x(\tau(\bar{\alpha}_2(x))>0\rightarrow z=x).\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

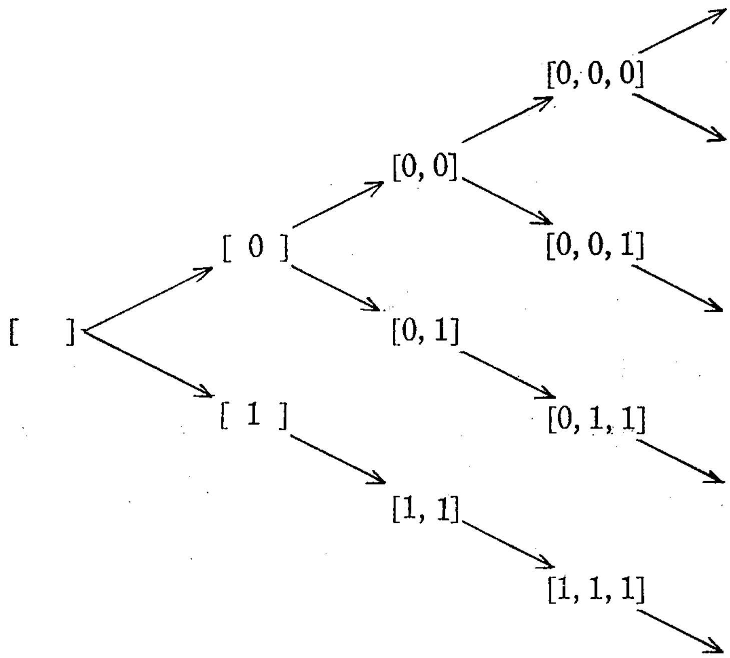
ここで，α_1 によって生成される chioce sequence も α_2 によって生成される choice sequence も，ともに，最初の y ステップまではその切片が

同じである (i.e. $\bar{\alpha}_1(y)=\bar{\alpha}_2(y)$). それ故, $\tau(\bar{\alpha}_2(y))=1>0$. そこで, (ii) から $z=y$. 故に, $\tau(\bar{\alpha}_2(y))=2$. これは明らかに矛盾である.

次に, Heyting による $\forall x\neg\neg\mathscr{P}(x)\rightarrow\neg\neg\forall x\mathscr{P}(x)$ の反証 ([5] の 7.2.2 での議論) を検討してみよう. これはまた, 同時に, 排中律の反証例ともなっている(9).

次の図で示されるような spread (あるいは, より正確には fan) を σ とする.

図3



すなわち, σ は binary fan のうち, 特に, あるステップで1を選択したあとはつねに1を選ばなければならないという choice law をもつものである.

さて, fan σ の要素に対してある自然数を割り当てる functional の如きもの ρ を次のように定義する.

$$\rho(\alpha)=\begin{cases} 1 & \text{if } \forall x\,(\alpha(x)=0) \\ 2 & \text{if } \alpha(0)=1 \ (\text{i.e. } \forall x\,(\alpha(x)=1)) \\ n+2 & \text{if } \forall x<n\,(\alpha(x)=0)\ \&\ \forall x\geq n\,(\alpha(x)=1) \end{cases}$$

また，R を次のように定義する．

$$R(\alpha) \overset{\text{df}}{\longleftrightarrow} \exists m(\rho(\alpha)=m)$$

このとき，次の命題が TCS で証明可能である．

(Ｉ) $\forall\alpha\in\sigma\neg\neg R(\alpha)$

証明は帰謬法による．σ のある要素 α について $\neg R(\alpha)$ であると仮定しよう．$\alpha(0)=1$ とすると $\rho(\alpha)=2$ であり，したがって $\exists m(\rho(\alpha)=m)$ i.e. $R(\alpha)$．これは矛盾．それ故 $\alpha(0)=0$．任意の y について，$\alpha(y)=0$ のとき，$\alpha(y+1)=1$ ならば $\rho(\alpha)=y+3$ となり，$\neg R(\alpha)$ に反する．それ故，$\alpha(y+1)=0$. かくて，$\forall x(\alpha(x)=0)$．しかし，このとき $\rho(\alpha)=1$ となり，やはり $\neg R(\alpha)$ に矛盾する．それ故，$\neg\exists\alpha\in\sigma\neg R(\alpha)$．したがって，$\forall\alpha\in\sigma\neg\neg R(\alpha)$．

しかし，TCS では次の命題も証明可能である．

(II) $\neg\forall\alpha\in\sigma R(\alpha)$

この命題の証明にはブローウェルの原理が使用される．[5] では Heyting が fan theorem と呼んでいるものが使われているが，これは，形式的には次のように表現されるが，TCS においてはブローウェルの原理から証明可能である(10)．

$$\text{Fan}(\sigma)\ \&\ \forall\alpha\in\sigma\exists bA(\alpha,b)$$
$$\rightarrow\exists z\forall\alpha\in\sigma\exists b\forall\beta\in\sigma(\bar{\beta}(z)=\bar{\alpha}(z)\rightarrow A(\beta,b)) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots *$$

ここで，Fan(σ) とは σ が fan であることを意味するものとする．さて，これを使って (II) を証明しよう．いま，$\forall\alpha\in\sigma R(\alpha)$ i.e. $\forall\alpha\in\sigma\exists m(\rho(\alpha)=m)$ と仮定しよう．このとき，$*$ から，ある自然数 z について，

$$\forall\alpha\in\sigma\exists m\forall\beta\in\sigma(\bar{\beta}(z)=\bar{\alpha}(z)\rightarrow\rho(\beta)=m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

が成り立つ．ここで，0 だけから成る choice sequence (図 3 では，矢印が常に上へ向っている系列で示されている) を生成する choice を α_1 とすると，(i) から

$$\forall\beta\in\sigma\,(\bar{\beta}(z)=\bar{\alpha}_1(z)\rightarrow\rho(\beta)=m)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

なる自然数 m が存在する．ところで，最初の z ステップまではその切片が α_1 で生成される choice sequence と同じになり，そのあとはすべて1がつづくような choice sequence を考えてみよう（下図を参照せよ）．そのような choice sequence

$$\begin{array}{ll} \alpha_1: & 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots \\ \beta_1: & \underbrace{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,}_{z\ \text{個}}\ 0,\ 1,\ 1,\ \cdots\cdots \end{array}$$

を生成する choice を β_1 とすれば，$\bar{\beta}_1(z)=\bar{\alpha}_1(z)$ であり，$\forall x\geq z\,(\beta_1(z)=1)$．明らかに $\beta_1\in\sigma$ であるので，(ii) から $\rho(\beta_1)=m$．他方，$\alpha_1\in\sigma$ も明らかであるので，$\rho(\alpha_1)=m$．しかし，ρ の定義から，一方で $m=z+2$ であり，他方で $m=1$ である．これは明らかに矛盾である，したがって，$\neg\forall\alpha\in\sigma\mathrm{R}(\alpha)$．

以上の結果は $\forall x\neg\neg\mathscr{P}(x)\rightarrow\neg\neg\forall x\mathscr{P}(x)$ のモデル理論的な反証を意味している．いま，R が対応している述語記号が $\boldsymbol{R}$ であるとしよう．このとき，(Ⅰ), (Ⅱ) はそれぞれ，構造 $\langle\sigma, R\rangle$ が $\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)$, $\neg\forall x\boldsymbol{R}(x)$ のモデル(11) である（$\langle\sigma, R\rangle\models\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)$, $\langle\sigma, R\rangle\models\neg\forall x\boldsymbol{R}(x)$ と書かれる）ということを示している．さて，このモデルでは $\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)\rightarrow\neg\neg\forall x\boldsymbol{R}(x)$ は成り立ちえない．なぜなら，もしこれが成立すれば，すなわち，

$$\langle\sigma, R\rangle\models\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)\rightarrow\neg\neg\forall x\boldsymbol{R}(x)$$

ならば，

$$\langle\sigma, R\rangle\models\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)\Rightarrow\langle\sigma, R\rangle\models\neg\neg\forall x\boldsymbol{R}(x).$$

それ故

$$\langle\sigma, R\rangle\models\forall x\neg\neg\boldsymbol{R}(x)\Rightarrow\neg(\langle\sigma, R\rangle\models\neg\forall x\boldsymbol{R}(x))$$

となり，上述の事実と矛盾するからである．

以上が Heyting の議論のあらましである．さて，従来，(Ⅱ) の証明に

対してはしばしば疑いの眼が向けられたのであるが，それは，結局のところ，ブローウェルの原理に対する不満と言うことができるように思われる．この原理が受け入れられれば，(II) の証明はある意味できわめて自然である．choice sequence の性質からすれば，0だけから成る choice sequence に有限のステップである自然数を割り当てることができるとは（直観主義者には）考え難いからである．というのは，いくら0が続いても，いつ次に1が出てくるかわからないから．(σ の要素である他の choice sequence についてはそのようなことはない．最初に1が現われた時点でその choice sequence に自然数を適当に割り当ててやることができる.)((II) の証明はまさにこの事実を利用していると言えよう.)　この場合，むしろ，奇妙に見えるのは（I）である．ただ，（I）の証明の巧妙な点は，$\exists\alpha\in\sigma \quad R(\alpha)$ を仮定すると，数学的帰納法—これは直観主義者が認める，無限へのアプローチのための典型的な手段である—によって，直観主義者は，0ばかりから成る choice sequence を見出すことができるということである．それ故，そのような choice scquence に対してある自然数を割り当てることができて矛盾ということになるわけである．ここでわれわれは次の点に注意すべきであろう．すなわち，（I）の証明の過程で現われてくる0だけから成る choice sequence はある意味で完全にとらえられたものであるが，(II) の証明の中で現われてくるそれは単に生成過程にある choice sequence としてしかとらえられてはいないということである．

§5　Kripke model と TCS

Kripke model は，Kripke によって，直観主義論理を解釈するために考案されたものである (cf [10])．ここでは命題論理の場合についてのみ簡単に説明しよう．

はじめに直観主義命題論理の定義を与えておこう．

記号

命題変数　A_1, A_2, A_3, ……

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$

formula

1. 命題変数は (atomic) formula である．

2. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が formula のとき，$\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\&\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ は formula である．

3. 以上によって規定されるものだけが formula である．

公理及び推論規則

1. $\mathcal{A}\rightarrow(\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A})$

2. $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})\rightarrow((\mathcal{A}\rightarrow(\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C}))\rightarrow(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{C}))$

3. $\mathcal{A}\rightarrow(\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}\&\mathcal{B})$

4. $\mathcal{A}\&\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}$　　　　$\mathcal{A}\&\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}$

5. $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$　　　　$\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$

6. $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{C})\rightarrow((\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C})\rightarrow(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C}))$

7. $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})\rightarrow((\mathcal{A}\rightarrow\neg\mathcal{B})\rightarrow\neg\mathcal{A})$

8. $\neg\mathcal{A}\rightarrow(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})$

9. $\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

(上で，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ は formula を表わす．)

さて，いよいよ Kripke model の定義を与えよう．$\bar{K}=\langle K, \leq, \Vdash\rangle$ は，$\langle K, \leq\rangle$ が半順序構造で[12] あり，$\Vdash$ が K の要素と formula との間の関係で次の性質を満たしているとき，**Kripke model** であると言われる．

(1) $(m\leq n$ かつ $m\Vdash\mathcal{A})\Rightarrow n\Vdash\mathcal{A}$

(ただし，$\mathcal{A}$ は atomic formula とする．)

(2) $m\Vdash\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\Longleftrightarrow m\Vdash\mathcal{A}$ または $m\Vdash\mathcal{B}$

(3) $m\Vdash\mathcal{A}\&\mathcal{B}\Longleftrightarrow m\Vdash\mathcal{A}$ かつ $m\Vdash\mathcal{B}$

(4) $m\Vdash\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}\Longleftrightarrow\forall n\geq m\,(n\Vdash\mathcal{A}\Rightarrow n\Vdash\mathcal{B})$

(5) $m\Vdash\neg\mathcal{A}\Longleftrightarrow\forall n\geq m\,(\neg\,(n\Vdash\mathcal{A}))$

また，formula $\mathcal{A}$ が $\bar{K}$**-valid** であるとは，$\forall m \in K\,(m \Vdash \mathcal{A})$ を意味し，$\mathcal{A}$ が **valid** であるとは，いかなる model $\bar{K}$ についても，$\mathcal{A}$ が $\bar{K}$-valid であることを意味する．

次のことは明らかである．(証明は帰納法による．)

任意の formula $\mathcal{A}$ について，

$$(m \leq n \text{ かつ } m \Vdash \mathcal{A}) \Rightarrow n \Vdash \mathcal{A}$$

また，直観主義命題論理で証明可能な formula が valid であるということも，公理が valid であること，推論規則が validity を保存することを示すことによって容易に証明される．

Kripke model を使えば，排中律 $A \vee \neg A$ が valid でないことを示すことはきわめて容易である．図4で示される model では，明らかに $A \vee \neg A$ は valid ではない．(図4は，$m_1 \leq m_2$, $\neg(m_1 \Vdash A)$, $m_2 \Vdash A$ を示している．) というのは，$m_1 \Vdash A \vee \neg A$ ならば，$m_1 \Vdash A$ または $m_1 \Vdash \neg A$ であるが，$\neg(m_1 \Vdash A)$ なので $m_1 \Vdash \neg A$ である．しかし，これは定義から $\forall m \geq m_1\,(\neg(m \Vdash A))$ であるので，$\neg(m_2 \Vdash A)$ となり矛盾してしまうからである．それ故，$m_1 \Vdash A \vee \neg A$ ではない．

図4

さて，この議論は TCS ではどう表現することができるであろうか．以下の話の目的は，Kripke の示唆をわれわれの TCS において明確にすることである．図4の model において，m_1 や m_2 を証拠状況 "$m_1 \leq m_2$" を "m_2 でのほうが m_1 でよりも証拠が豊富である", "$m \Vdash A$" を "A は状況 m で立証された" と解釈すれば，m_1 ではまだ A を立証するに足る証拠が得られていないということになる．新たな証拠が得られるまでは m_1 にずっととどまるわけであるが，新たな証拠が得られ，m_2 に移行した時点で A が立証される．そこで証拠探しを一種の choice と見，その結果が0である限り A は立証されず，その結果が1のときに A を立証する証拠が得られると考えるならば，この事実は図3の tree で表わす

ことができる．ここで，１のあとには常に１が続くのは，図４では証拠状況が二つしかないのでそれにあわせるためである．([　] から始められているのは便宜的なことであるが，このことは上の解釈に抵触しない.）このとき，ある $\alpha\in\sigma$ について，$\exists x(\alpha(x)=1)$ ということが A が立証されるということに対応する．$\exists x(\alpha(x)=1)$ を $P(\alpha)$ と書くことにすれば，

$$\forall\alpha\in\sigma(P(\alpha)\vee\neg P(\alpha))$$

が $A\vee\neg A$ が valid であるということに対応する．(あるいは，$\forall\alpha\in\sigma(P(\alpha)\vee\neg P(\alpha))$ が含意する，ある α—図３で，常に上へ向う矢印によって示される—についての $R(\alpha)\vee\neg P(\alpha)$ が $m_1\Vdash A\vee\neg A$ に対応している.）しかし，§2 の（２）を使えば，§3の前半での議論と同様にして

$$\neg\forall\alpha\in\sigma(\forall x(\alpha(x)=0)\vee\neg\forall x(\alpha(x)=0))$$

が証明される．(ただし，$\alpha_2(x)=sg((x+1)\dot{-}y)$ とする[13].）したがって，

$$\neg\forall\alpha\in\sigma(\exists x(\alpha(x)=1)\vee\neg\exists x(\alpha(x)=1))$$

$$\text{i.e.}\quad\neg\forall\alpha\in\sigma(P(\alpha)\vee\neg R(\alpha)).$$

注

（1）［7］では absolutely free choice sequence と呼ばれ，［8］や［11]，[12] では lawless sequence と呼ばれている．

（2）この関数は recursive でないものとする．recursive function の場合には，その構成的性格から，見かけ上，choice sequence と区別されないことがあるように思われる．［6］の体系はまさにこの事実を利用していると考えられる．

（3）［5］では spread law と呼ばれている．(cf［5］の p 35.)

（4）Brouwer は初期の論文では Menge という言葉を用いているが，もちろん，通常の集合論的な意味で用いているわけではない．(cf［2］，［3］)

（5）［5］では complementary law と呼ばれている．(cf［5］の p 35.)

（6）Brouwer は，この手続きが機械的なものである，すなわち，b を決定するアルゴリズムがあると考えている．(cf［4］の p 393.)

（7）実際，Brouwer 自身，時間概念の先験性を積極的に認め，これを数学の哲学的基礎としていたように思われる．(cf［1］の pp. 127-128.)

(8) 一般に,

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a-b & \text{if} \quad a>b \\ 0 & \text{if} \quad a \leq b \end{cases}$$

(9) 排中律が $\forall x \neg\neg P(x) \rightarrow \neg\neg \forall x P(x)$ を含意することは明らか.

(10) インフォーマルな証明は [5] の 3. 4. 4 において与えられている. フォーマルな証明は, たとえば [6] pp. 75-76 を参照せよ.

(11) 述語記号としては $\boldsymbol{R}$ だけを含む first order の文 $\mathcal{A}$ に対し, $\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{A}$ は次のように定義される.

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \boldsymbol{R}(a) \Longleftrightarrow R(\alpha_a)$

ここで, a は特定の name とし, α_a は a に対応する σ の要素とする.

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B} \vee \mathcal{C} \Longleftrightarrow \langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B}$ または $\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{C}$

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B} \& \mathcal{C} \Longleftrightarrow \langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B}$ かつ $\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{C}$

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \Longleftrightarrow \langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B} \Rightarrow \langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{C}$

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \neg \mathcal{B} \Longleftrightarrow \neg(\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{B})$

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \forall x \mathcal{F}(x) \Longleftrightarrow \forall \alpha_a \in \sigma\ (\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{F}(a))$

$\langle\sigma, R\rangle \vDash \exists x \mathcal{F}(x) \Longleftrightarrow \exists \alpha_a \in \sigma\ (\langle\sigma, R\rangle \vDash \mathcal{F}(a))$

(12) $\mathcal{K} = \langle K, \leq\rangle$ が半順序構造であると呼ばれるのは, K の上に定義された二項関係 $\leq$ が次の条件を満たすときである.

1) $p \leq p$

2) $p \leq q \ \& \ p \geq q \rightarrow p = q$

3) $p \leq q \ \& \ q \leq r \rightarrow p \leq r$

(13) 一般に, $sg(a)$ は, $a>0$ のときには 1 を, $a=0$ のときには 0 を表わす.

参考文献

L. E. J. Brouwer

[1] 1913, "Intuitionism and Formalism," *L. E. J. Brouwer Collected Works*, A. Heyting ed., Vol. I, North-Holland Press (Amsterdam), 1975, pp. 123-138.

[2] 1918, "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten," op. cit., pp. 150-221.

[3] 1925, "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I," op. cit., pp. 301-314.

[4] 1927, "Über Definitionsbereiche von Funktionen," op. cit., pp. 390-405.

A. Heyting

[5] *Intuitionism, an introduction*, 3rd ed., North-Holland Press (Amsterdam), 1971.

S. C. Kleene and R. E. Vesley

[6] *Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland Press (Amsterdam), 1965.

G. Kreisel

[7] "A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs," *Journal of Symbolic Logic*, vol. 23, 1958, pp. 369–388.

[8] "Lawless sequences of natural numbers," *Compositio Mathematica*, vol. 20, 1968, pp. 222–248.

G. Kreisel and A. S. Troelstra

[9] "Formal systems of intuitionistic analysis," *Annals of Mathematica Logic*, vol. 1, 1970, pp. 229–387.

S. Kripke

[10] "Semantical analysis of intuitionistic logic I," *Formal Systems and Recursive Functions*, Crossley and Dummett, eds., North-Holland Press (Amsterdam), 1965, pp. 92–130.

A. S. Troelstra

[11] "Theory of choice sequences," *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Rootselaar and Staal, eds., North-Holland Press (Amsterdam), 1967, pp. 201–223.

[12] *Principles of Intutionism*, Springer (Heidelberg), 1969.

On the Theory of Choice Sequences

Hiroyuki Hattori

Résumé

The purpose of this article is to give a general idea of the theory of choice sequences (TCS) which is of great importance in the intuitionistic mathematics, and to correct some common misunderstanding on the law of the excluded middle.

In §1 the fundamental concepts of TCS are discussed informally. In §§2 and 3 it is shown that some laws, which are established in the classical system, can be refuted in TCS. In §4 a formulation of some Kripke-model in TCS is given on the basis of the suggestions made by Kripke.