Title	Painlevé性 : 可積分判定法という観点から
Sub Title	Integrability test for nonlinear differential equations : painlevé analysis
Author	戸田, 晃一(Toda, Kouichi)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2002
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 No.32 (2002. 11) ,p.11- 38
JaLC DOI	
Abstract	可積分系と呼ぼれる研究分野において，与えられた非線形発展方程式の可積分性を調べることはもっとも基本的な問題の一つである。しかし可積分という概念の定義ははっきりせず，その性質のみが研究されている。例えぼ解析的手法で厳密解が構成できれぼ，可積分方程式といわれている。それでは厳密解を構成せずに可積分性を調べる方法はないものか。この小論では可積分性の性質の一つであるPain-leve性に着目し，それを可積分判定に用いる方法(いわゆるPainleveテスト)について，最近の研究成果を含めて，筆者なりに解説したい。
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20021115-0001

Hiyoshi Review of Natural Science
Keio University No. 32, 1-37 (2002)

Painlevé 性

―可積分判定法という観点から―

戸田晃一*†

Abstract

可積分系と呼ばれる研究分野において，与えられた非線形発展方程式の可積分性を調べることはもっとも基本的な問題の一つである。しかし可積分という概念の定義ははっきりせず，その性質のみが研究されている。例えば解析的手法で厳密解が構成できれば，可積分方程式といわれている。それでは厳密解を構成せずに可積分性を調べる方法はないものか。この小論では可積分性の性質の一つである **Painlevé 性**に着目し，それを可積分判定に用いる方法（いわゆる Painlevé テスト）について，最近の研究成果を含めて，筆者なりに解説したい[1]。

1　はじめに―可積分とは―

そもそも**可積分**（**性**）とはどういうことか？　古典的な定義では求積法によって解けるとき「可積分」であると言われる。しかし，「可積分」の定義は対象とする問題によっても異なり，一般的な定義は（少なくとも現段階では）無いようである。例えばソリトン方程式の場合は逆散乱法（またはそれに類する手法）により解析的に厳密解を得ることができる時は「可積分」と云われる。そこで「可積分」の性質についてまとめることからこの小論は書き始めたい。

元来「可積分（性）」とは有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった。すなわち，Liouville-Arnold の定理［1］：

> 自由度 N の Hamilton 系に N 個の保存量があり，
> それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば，初期
> 値問題は有限回の求積[2]によって解ける

*平成14年3月31日まで　慶應義塾大学　日吉物理学教室助手（嘱託）（〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1）：Department of Physics, Keio University, Hiyoshi 4-1-1, Yokohama, 223-8521, JAPAN
†平成14年4月1日より　富山県立大学　工学部　講師（〒939-0398 富山県射水郡小杉町黒河5180）：Department of Mathematical Physics, Toyama Prefectural University, Kurokawa 5180, Kosugi, Imizu, Toyama, 939-0398, JAPAN

[1] つまりは偏りに満ち溢れているということ。

が成り立つ系，すなわち**初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解ける**のが**可積分系**である。それではソリトン方程式に代表される無限自由度系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる。無限自由度系において，一般には（少なくとも可積分系の研究者の間では）以下の性質；

1．線形化可能：
適当な変数変換により線形化できる。

2．逆散乱法で解ける時［2］：
「適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと」が「線形の積分方程式を解くこと」に帰着できる。

3．Lax 対の存在［3］：
ほとんどの場合逆散乱法の手順にのる[3]。

4．Liouville-Arnold の意味での「可積分性」：
適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する。

5．無限個の保存量・対称性の存在（recursion operator の存在とほとんど等価）

6．bi-Hamilton 構造［4］：
異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 系として定式化できる。これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことが言える。

7．厳密解の存在［5］：
広田の直接法などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの解が厳密に求まるという意味での「可積分性」。

8．Bäcklund 変換（または Darboux-Crum 変換）の存在［5］：
これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解（やそれに類する解[4]）が構成できる。

9．Painlevé 性：
常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質。

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられている[5]ようである［6］。上記の**性質**の中で有限自由度系の類推から最も素直なものは**性質 4** のように思える。しかし実は肝心の初期値問題に関する明言が抜けてしまっている。それでは初期値問題との関連で言えば，**性質 2** が正統的であるように思える。無限自由度の可積分系の内で典型的なソリトン方程式の場合には，例えば，浅水波を記述する Korteweg-de Vries（KdV）方程式[6]である

---

[2] 求積とは四則演算・微分・積分・逆関数をとること，微分積分を含まない方程式の解を求める演算のこと。

[3] 筆者は逆散乱法を経由しない Lax 対の構成法を研究課題の一つにしている。

[4] 例えば，ソリトフ（solitoff）解，ドローミオン（dromion）解や筆者が命名した**浮き輪**ソリトン等。

[5] ちなみに筆者の研究では**性質 3，6，7 及び 9** を「可積分」の指針にしている。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\ \ (u=u(x,t)), \tag{1.1}$$

などは上記の**性質1**から**9**の性質が全て満たされていることが知られているが，これはむしろ例外である。ほとんどの可積分系はこれらの性質の内で数個しか満たさない場合がほとんどである。これらの性質が厳密な意味で等価であるかどうかは全く証明されていない[7]。また離散系となるとこれらの性質はさらに怪しくなる（これについては第5章で触れる)。

2 Painlevé 性と Painlevé 方程式

本章では Painlevé 性と Painlevé 方程式についてに解説する[8]（より詳しく知りたい人は［6，7，8，9，10，11］を参照のこと)。

複素平面上の孤立特異点にはいくつかの種類がある。例えば $(z-a)^{-1}$ の特異点 a は極 (pole)，$z^{-1/2}$ や $\log z$ の特異点 $z=0$ は分岐点（branch point)，exp $(z-1)$ の特異点 $z=0$ は真性特異点（essential singularity）である。極以外の特異点をまとめて臨界点（critical point）と呼ぶ。

(図) 特異点のまとめ

$\xi=z-z_0$, $z\to z_0$, $p>0$：整数

$$\begin{cases} \text{極(pole)}：w\sim\xi^{-p} \\ \text{臨界点(critical point)} \begin{cases} \text{真性特異点(essential singularity)}：w\sim\sum_{i=0}^{\infty}\xi^{-p-i} \\ \text{分岐点(branch point)} \begin{cases} \text{代数的(algebraic)分岐点}：w\sim\xi^{1/p} \\ \text{対数的(logarithmic)分岐点}：w\sim\log\xi \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

複素平面における常微分方程式の特異点が積分定数（初期値）に依存するとき，その特異点を**動く特異点**（movable singularity）と呼ぶ。線形常方程式の解の特異点は方程式の係数で決まるのでその特異点は**動かない特異点**である。

(例2.1) 2階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{4}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{2}{z^2}w=0 \tag{2.1}$$

の求積解は

---

[6] 空間変数を x，時間変数を t とする（1＋1）次元偏微分方程式であり，代表的なソリトン方程式の一つである。

[7] むしろ，幸い（?）物理的にはあまり重要でない場合が多いのだが，これらの性質の同値性に関する反例すら存在する。

[8] 本章以降度々**関数**を**函数**と書くことがある。どうしてもこのような内容のものを書くときは**函数**と書くべきではないかと思ってしまう……。

$$w=\frac{z_1}{z}+\frac{z_2}{z^2}\ (z_1, z_2 : 積分定数) \tag{2.2}$$

となる。特異点は積分定数に依存しない（動かない特異点)。

一方，非線形常方程式は動く特異点をもちうる。

（例２．２）　**１階の非線形常微分方程式**

$$\frac{dw}{dz}+w^2=0 \tag{2.3}$$

の求積解は

$$w=\frac{1}{z-z_0} \tag{2.4}$$

となる。z_0は動く特異点である。

常微分方程式が動く臨界点を持たないとき，つまり**極以外の動く特異点を持たないとき**[9]，その微分方程式は**Painlevé 性をもつ**（または P-type である）という。すぐに気づく通りこの Painlevé 性は何階の常微分方程式でももちうる性質である。ではこの P-type であるような常微分方程式はどのように分類されるのか？　現在までに豊富な結果が知られているのは１階及び２階微分の時のみである［12, 13］(３階以上はまだ不明である[10])。１階及び２階について見ていこう（すぐに分かるが２階の時に Painlevé 方程式が出てくる)。

［１］　**１階の常微分方程式**：

１階の常微分方程式（F：zの有理函数で局所的に解析的とする）

$$\frac{dw}{dz}=F(w, z) \tag{2.5}$$

が P-type であるのは一般化された Riccati 方程式

$$\frac{dw}{dz}=F_0(z)+F_1(z)w+F_2(z)w^2 \tag{2.6}$$

のみであることが知られている［７]。この方程式 (2.6) は

$$w(z)=\frac{1}{F_2(z)}\frac{d}{dz}(\ln v(z)) \tag{2.7}$$

とすれば

$$\frac{d^2v}{dz^2}-\frac{1}{F2}\left\{\frac{dF_2}{dz}+F_1F_2\right\}\frac{dv}{dz}+F_0F_2v=0 \tag{2.8}$$

---

[9] 本によっては「初期値に依存する特異点は高々極しかない」,「動く特異点は高々極しかない」や「全ての動く特異点が極のみ」等の表現のときもある。

[10] Bureau は３階の常微分方程式の部分的な分類に成功している（詳しくは［７］を参照のこと)。

と線形化できる。この結果を最初に注目したのは（おそらく）Kovalevskayaであった。彼女はコマの運動の解けるモデルを研究する上で，コマの運動方程式を記述する常微分方程式がP-typeであることを要求した。その結果4種類の解けるモデル（つまり可積分なモデル）を見いだした。その内3つは既知（自明なもの，Eulerのコマそして Lagrange のコマ）で，残りの一つがそれまでに知られていないものであった[11]。現在このコマはKovalevskayaのコマと呼ばれている [14]。

［2］　**2階の常微分方程式：**

Painlevé と Gambier らは2階の常微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}=F(\frac{dw}{dz},w,z) \tag{2.9}$$

を考察した。ただし F は $\frac{dw}{dz}$ について有理函数，w について代数函数そして t については解析函数とする。彼らは全ての可能な（2.9）型方程式の中からP-typeである50個を見つけ出した。そして50個の内で既知の函数（楕円函数や線形方程式の解）で表せるものや変数変換によってその他の方程式になるものを除くと，残りが6個の方程式になることを示した。この6個を **Painlevé 方程式**[12]；

$$\mathrm{P}_1:\frac{d^2w}{dz^2}=6w^2+z, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{P}_2:\frac{d^2w}{dz^2}=2w^3+zw+\alpha, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{P}_3:\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{1}{z}(\alpha w^2+\beta)+\gamma w^3+\delta\frac{1}{w}, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{P}_4:\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{2w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\frac{3}{2}w^3+4zw^2+2(z^2-\alpha)w+\beta\frac{1}{w}, \tag{2.13}$$

$$\mathrm{P}_5:\frac{d^2w}{dz^2}=\left\{\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w+\beta\frac{1}{w}\right)+\gamma\frac{w}{z}+\delta\frac{w(w+1)}{w-1}, \tag{2.14}$$

$$\mathrm{P}_6:\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right\}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right\}\frac{dw}{dz}+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left\{\alpha+\beta\frac{z}{w^2}+\gamma\frac{(z-1)}{(w-1)^2}+\delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right\}, \tag{2.15}$$

と呼ぶ。ここで α,β,γ そして δ は任意パラメータである。下線から Painlevé 方程式を解くためには（パラメータの特別な値の場合を除いて）新しい函数を導入する必要がある。つまり

---

[11] 注目すべきはコマの運動という身近な物理現象の可積分条件を物理的要請ではなく，Painlevé 性という**数理的要請**から得たことだと思う。

[12] 慣例に従って P_1 から P_6 と名付ける。

Painlevé 方程式は**Painlevé 超越函数**という新しい函数を定義している。

最近 Painlevé 方程式または Painlevé 性は物理学の様々な分野で顔を出すようになった。またソリトン方程式との関係及び P_1 から P_6 に至るそれぞれの代数構造や厳密解の解構造についての研究が大変活発である[13]。この中から Painlevé 性とソリトン方程式との関係はこの小論の本題である可積分判定法（Painlevé テスト）の基本的な指針である Ablowitz-Ramani-Segur 予想を与えることとなった（次章で解説する）。

3 Painlevé テスト：連続系の可積分判定テスト

与えられた非線形発展方程式の可積分性を調べることはもっとも基本的な問題の一つである。例えば確かに初期値問題を解いたり N ソリトン解を構成すれば，可積分方程式といえる。しかし，それらを経由せずに可積分性を調べる方法はないものか。そのような方法があれば大変有用である。完全な意味ではまだそのような方法は知られていない[14]。しかし可積分の（あくまでも）**候補**[15]で良いならば，ある程度有効な方法が知られている。それがこの小論の本題である **Painlevé テスト**である[16]。

Painlevé テストには Ablowitz-Ramani-Segur アルゴリズム（**Ablowitz-Ramani-Segur 法**：常微分方程式に対するもの）と Weiss-Tabor-Carnevale アルゴリズム（**Weiss-Tabor-Carnevale 法**：偏微分方程式に対するもの）がある。本章ではまず Painlevé テストというものの動機となった Ablowitz-Ramani-Segur 予想を，その後 Ablowitz-Ramani-Segur 法と Weiss-Tabor-Carnevale 法を続けて，具体例を挙げながら紹介する [16]。

3.1 Ablowitz-Ramani-Segur 予想

Ablowitz-Ramani-Segur（ARS）予想 [17] とは

> 完全可積分な偏微分方程式（PDE）のリダクション（reduction）
> として得られる全ての常微分方程式（ODE）は（たぶん変数変換
> の後で）P-type である[17]。

というものである。この ARS 予想は前章の最後でも触れたが，ソリトン方程式と Painlevé 性の関係を調べるうちに主張されたものである。まず例を用いてこの関係を見ていこう。

---

[13] Hamilton 構造 [7] や Lax 対 [15] 等。

[14] 可積分の定義がはっきりしないので仕方がないとも思う。

[15] この可積分の候補のことを **Painlevé 性をもつという意味での可積分**と呼ぶことにしたい。

[16] 可積分系を研究する者とすれば**候補**でもあればありがたい。しかもその方法が，ある程度慣れは必要だが，アルゴリズムがはっきりしているので機械的にできるのだから!!

[17] そしてこの後「そしてその時のみ逆散乱法で解ける。」と文章は続く。

(例３．１） modified KdV（mKdV）方程式

modified Korteweg-de Vries（mKdV）方程式とは

$$v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0\ (v=v(x,t)) \tag{3.1}$$

で与えられる[18]。mKdV 方程式は名前が示すとおり KdV 方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0\ (u=u(x,t)) \tag{3.2}$$

を変形したものである。両者は Miura 変換[19]

$$u=-v_x-v^2 \tag{3.3}$$

により互いに変換される。

ところでこれからのために，ソリトン理論においてたびたび出てくる degree 計算について触れておきたい。未知関数 $f=f(t_k)$ の degree を $[f]=j$，変数 t_k の degree を $[t_k]=-k$ とする[20]。t_k で微分する度に degree は k だけ増える。例えば $[\partial_{t_k}f]=j+k$ または $[\partial_{t_k}^{-1}]=[\int f dt_k]=j-k$ となる。

それでは話を元に戻して P_2 との関係を見てみる。mKdV 方程式の degree 計算をする。$[x]=-1$ とすると $[v]=1$，$[t]=-3$ となり[21]，mKdV 方程式（3.1）自身は degree 4 の同次式となる。そこで解 $v(x,t)=v(t_1,t_3)$ についてもこの同次であるという条件（**similarity 条件**）

$$v(\lambda^1t_1,\lambda^3t_3)=\lambda^{-1}v(t_1,t_3)\ (\lambda：\text{similarity パラメータ}) \tag{3.4}$$

を課すことがこれからの議論の意味をもつ。この similarity 条件の下で，$v(x,t)=v(t_1,t_3)$ は一変数の関数（similarity 解）

$$v(t_1,t_3)=(3t_3)^{-1/3}w(z),\quad z=(3t_3)^{-1/3}t_1 \tag{3.5}$$

となる。この similarity 解を方程式（3.1）に代入すると $w=w(z)$ の満たす方程式は

$$-(zw)'=6w^2w'-w''' \tag{3.6}$$

となり[22]，一回積分すると

$$w''=2w^3+zw+\alpha \tag{3.7}$$

となる。ここで α は任意な積分定数である。この方程式（3.7）は P_2 である。

(例３．２） KdV 方程式

KdV 方程式（3.2）の degree 計算をすると $[x]=-1$，$[t]=-3$，$[u]=2$ を得る。そして

18　ここで（そしてこれ以降も）添え字の x や t は偏微分を表す。例えば $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$u_{xxx}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 等。

19　この変換はソリトン理論において非常に重要なものである。例えば KdV 方程式の保存量を導出するのに重要な役割をする。この変換自身は Riccati 方程式の一つであり，Bäcklund 変換でもある。

20　慣例的に t_k と書いた。時間変数の t と混同しそうだが，ここでは別ものと考えてほしい。

21　$[x]=-1$ と $[t]=-3$ より $x=t_1$ 及び $t=t_3$ と書ける。

22　ここで（そしてこれ以降も）′ は常微分を表す。例えば $f'=\dfrac{df}{dz}$ 及び $f''=\dfrac{d^2f}{dz^2}$ 等である。

KdV 方程式の degree 自身は 5 である。よって similarity 条件の下で，similarity 解は

$$u(x,t)=u(t_1,t_3)=3(t_3)^{-2/3}y(z),\quad z=(3t_3)^{-1/3}t_1 \tag{3.8}$$

となる。(例 3．1) と同様な計算をすると

$$y'''+6yy'-(2y+zy')=0 \tag{3.9}$$

となる。ここで Miura 変換

$$y=-w'-w^2 \tag{3.10}$$

の下で，方程式 (3.9) は

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2}-2w\frac{d}{dz}\right)\left(w''-2w^3-zw\right)=0 \tag{3.11}$$

となる。したがって w は

$$W''-2w^3-zw=0 \tag{3.12}$$

を満たす。これは $\alpha=0$ のときの P_2 である。

また，別の similarity 解

$$u(x,t)=u(t_1,t_3)=w(z)-\xi t_3,\quad z=t_1+3\xi t_3^2\ (\xi：任意定数) \tag{3.13}$$

を考えると，$w(z)$ は

$$w'''+6ww'-\xi=0 \tag{3.14}$$

を満たす。一回積分し，簡単な係数変換を行うと KdV 方程式 (3.14) は

$$w''=6w^2+z \tag{3.15}$$

となり，これは P_1 である。

更に，進行波解

$$u(x,t)=f(z),\quad z=x-c_1t\ (c_1：任意定数) \tag{3.16}$$

を仮定すると方程式 (3.2) は

$$f'''+6ff'-c_1f'=0 \tag{3.17}$$

となり一回積分すると

$$f''+3f^2-c_1f=c_2\ (c_2：任意の積分定数) \tag{3.18}$$

となる。これは楕円函数を定義しており，その特異点は極のみであることが知られている。つまりこの場合も方程式 (3.2) が P-type であることがいえる。

(例 3．3) Boussinesq 方程式

Boussinesq 方程式は

$$u_{tt}=u_{xx}+uu_{xx}+u_x^2+\frac{1}{4}u_{xxxx}\ (u=u(x,t)) \tag{3.19}$$

進行波解

$$u(x,t)=w(z),\quad z=x-ct\ (c：任意定数) \tag{3.20}$$

を仮定すると方程式 (3.19) は

$$(1-c^2)w''+\frac{1}{2}(w^2)''+\frac{1}{4}w''''=0 \tag{3.21}$$

となる。これは2回積分が可能である。積分定数による係数変換をした後，方程式（3.21）は

$$w''+2w^2+\alpha=0 \text{ または } w''+2w^2+z=0 \tag{3.22}$$

となる。前者は楕円函数で積分可能で，後者は係数違いの P_1 である。

（例3．4） Sine-Gordon（SG）方程式

Sine-Gordon（SG）方程式は

$$u_{xt}=\sin u \quad (u=u(x,t)) \tag{3.23}$$

で与えられる。この方程式は振り子の問題から場の理論まで物理学にはお馴染みの可積分方程式である。これまでと同様に similarity 解

$$u(x,t)=f(z),\quad z=xt \tag{3.24}$$

を考え，更に変数変換

$$w(z)=\exp\Big(if(z)\Big) \tag{3.25}$$

を行うと

$$w''=w^{-1}(w')^2-z^{-1}w'+(2z)^{-1}(w^2-1) \tag{3.26}$$

を得るが，これは P_3 の特別な場合（$\alpha=-\beta=1$，$\gamma=\delta=0$）である。

（例3．1）から**（例3．4）**のようにその他多くのソリトン方程式についても Painlevé 性との関係が知られている[23]。以上が **Ablowitz-Ramani-Segur（ARS）予想**の根拠である。ARS 予想には限定的な証明はある。しかしその一方で，反例もあるためその逆は成立しない。

3．2 Painlevé テスト：Ablowitz-Ramani-Segur 法

Ablowitz-Ramani-Segur は与えられた常微分方程式が **P-type**（すなわち **Painlevé 性をもつという意味での可積分**）であるかどうかを判定するアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは **Ablowitz-Ramani-Segur 法（ARS 法）**と呼ばれている。本節では，例を用いて，このアルゴリズムの紹介をする。

テストする常微分方程式

$$F(y^{(n)},y^{(n-1)},\cdots,y',y)=0 \tag{3.27}$$

の（解がもつ特異点の近傍での解の挙動を調べるため）Laurent 級数解（$z=z_0$ の周り）

$$y=y(z)=\sum_{j=0}^{\infty}y_j(z-z_0)^{j-\alpha} \tag{3.28}$$

を考える。ただし $y_0\neq 0$ とする。そしてこの展開が特異点の周りで十分な情報をもった展開で

---

[23] Painlevé 方程式の中で，full parameter（４つ）の P_6 はソリトン方程式からは導出されていない。もう少し枠を広げて，self-dual Yang-Mills（SDYM）方程式を考えれば導出可能である［8, 18］。SDYM 方程式は，いろいろな群を選び，変数に制限を課すことによりさまざまな可積分系を導出する。いわば可積分系の大きなクラスの親玉であることが知られている（Ward 予想［19］）。

あることを調べればよい。そのために以下の事柄

1．主要特異点挙動（leading order：α で正の整数）を決定する，

2．Laurent 級数展開により resonance（任意定数が現れる j の位置）を求める，

3．resonance の個数に対応する任意定数の存在（整合性）を確かめる，

をチェックするというのが，具体的な ARS 法のアルゴリズムである [16, 17]。各の意味を簡単に説明すると

1．主要項（級数解中の j が 0 の時[24]）の釣り合いを考えることで，正の整数の leading order を探す[25]。（Leading Order 解析），

2．十分な数の任意定数が Laurent 級数展開に入り得ることを示す（Resonance 解析），

3．Laurent 級数展開に矛盾がないことを確認している（Compatibility 条件），

ということである。

（例 3．5） P_1方程式

P_1方程式をもう一度書くと

$$w''=6w^2+z \tag{3.29}$$

である。

0．Laurent 級数解：

$z=z_0$の周りでの級数解

$$w=w(z)=\sum_{j=0}^{\infty} w_j(z-z_0)^{j-\alpha} \tag{3.30}$$

を考える。

1．Leading Order 解析：

級数解（3.30）で $j=0$ とし方程式（3.29）の主要項 2 項 w'' と w^2がつりあうようにすると正の整数の **leading order**

$$\alpha=2,\quad w_0=1 \tag{3.31}$$

を得る。

2．Resonance 解析：

$\alpha=2$ の時の Laurent 級数解を方程式（3.29）に代入して整理すると，係数 w_jの満たす漸化式

$$(j-6)(j+1)w_j=6\sum_{k=1}^{j-1} w_k w_{j-k}+W_j \tag{3.32}$$

を得る。ここで W_jは $W_4=z_0$，$W_5=1$，その他の j では $W_j=0$ である。そしてこれから j を 0，1，…，5 と動かしていくことにより w_jは

24 このとき局所 Laurent 級数展開という。

25 leading order が非整数なら特異点は動く分岐点となる。この場合は変数変換後に動く分岐点を持たなくなることもある。

$$w_0=1,\quad w_1=w_2=w_3=0,\quad w_4=-\frac{z_0}{10},\quad w_5=-\frac{1}{6} \tag{3.33}$$

と一意的に求まる。そして $j=6$ の時 w_6を決める漸化式の左辺と右辺がともに 0 になってしまう。つまり w_6は任意にとれることを意味する。もう一つの任意性は z_0の存在で保証される。この時の j を **resonance** と呼ぶ（今の例では-1 と 6)。

3．Compatibility 条件：

この例の場合は簡単で，2 個の任意パラメータ z_0（resonance-1 に対応）と w_6（resonance 6 に対応）を持つことが明らかである。

4．結論：

以上より方程式（3.29）は 2 個の任意パラメータをもつ Laurent 級数解を持つことが確かめられた。そしてこの時，方程式（3.29）は ARS テストをパスしたという。

（例 3．6） 2 階の常微分方程式

2 階の常微分方程式[26]

$$w''=6w^2+Aw\quad (w=w(z),\ A：定数) \tag{3.34}$$

を考察する。この例は（例 3．5）より複雑となる。

0．Laurent 級数解：

$z=z_0$の周りでの級数解

$$w=w(z)=\sum_{j=0}^{\infty}w_j(z-z_0)^{j-\alpha} \tag{3.35}$$

を考える。

1．Leading Order 解析：

級数解（3.30）で $j=0$ とし方程式（3.29）の主要項 2 項 w''と w^2がつりあうようにすると正の整数の **leading order**

$$\alpha=2,\quad w_0=1 \tag{3.36}$$

を得る。

2．Resonance 解析：

$\alpha=2$ の時の Laurent 級数解を方程式（3.34）に代入して整理すると，係数 w_jの満たす漸化式

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j-3)(j-2)w_j\varsigma^{j-4}=6\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}w_kw_{j-k}+\sum_{j=2}^{\infty}Aw_{j-2}\varsigma^{j-4}\quad (\varsigma=z-z_0) \tag{3.37}$$

を得る。そしてこれから j を 0，1，…，5 と動かしていくことにより ς の各巾を比較することにより w_jは

$$w_0=1,\quad w_1=w_3=w_5=0,\quad w_2=-\frac{A}{12},\quad w_4=\frac{A^2}{240} \tag{3.38}$$

と一意的に求まる。そして $j=6$ の時 w_6を決める漸化式は

[26] この方程式は楕円函数を用いて解けるので P-type である。

$$0 \times w_6 = w_4(12w_2 + A) = 0 \tag{3.39}$$

となり左辺と右辺がともに 0 になってしまう。つまり w_6は任意にとれることを意味する。resonance は $j=6$となる。

3．Compatibility 条件：

2 階の常微分方程式なので 2 個の任意パラメータがあるはず。そして 2 個の任意パラメータ z_0（resonance -1 に対応）と w_6（resonance 6 に対応）を持つことは明らか。

4．結論：

以上より方程式（3.34）は 2 個の任意パラメータをもつ Laurent 級数解を持つことが確かめられた。つまり方程式（3.34）は ARS テストをパスした。

（補足説明）

(i) もし Laurent 級数解（3.35）と仮定した時に leading order α が整数でなければ，解は動く**代数的分岐点**を含むことになるだろう[27]。

(ii) もし leading order α が整数であったとしても，（3.39）において右辺が 0 でない時，通常，Laurent 級数解（3.35）の $w_6 \varsigma^4 + O(\varsigma^3)$ を $(w_6 + y_6 \log \varsigma)\varsigma^4 + O(\varsigma^3)$ で置き換える必要があり，この場合，解は動く**対数的分岐点**を持つことになるであろう（ここで y_6は適当な係数)。

（例 3．7） 2 元 1 次連立常微分方程式

この節の最後の例として 2 元 1 次連立常微分方程式（$x=x(z)$，$y=y(z)$）

$$\begin{cases} x' = x(a-y) \\ y' = y(x-b) \end{cases} \qquad (a, b：定数) \tag{3.40}$$

を考える。

0．Laurent 級数解：

$$\begin{cases} x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j (z-z_0)^{j-\alpha} \\ y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j (z-z_0)^{j-\beta} \end{cases} \tag{3.41}$$

を考える。$z=z_0$の周りでの級数解を考えているが，この方程式（3.41）は自励系であるから，常に $z_0=0$ として計算しても一般性を失わない。よって計算の簡単のため Laurent 級数解は

$$\begin{cases} x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{j-\alpha} \\ y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{j-\beta} \end{cases} \tag{3.42}$$

とする。

27　もし現れた分数の分母で Laurent 級数解の巾をくくった状態で Painlevé テストを続けることが出来れば，テストされた方程式は **Weak（弱）Painlevé** 性をもつという。そしてこの時のテストを **Weak（弱）Painlevé** テストと呼ぶ［1，7，16，22]。偏微分方程式の時も同様の議論ができる。しかし残念ながら Weak Painlevé テストについてはこの小論では扱わない。

1．Leading Order 解析：

leading order（α, β）は方程式（3.41）の主要項を比較することにより

$$\alpha=\beta=-1 \tag{3.43}$$

また，$j=0$ の時の係数

$$x_0=-y_0=-1 \tag{3.44}$$

を得る。

2．Resonance 解析：

計算過程は複雑なので，結果のみを記す。方程式（3.40）の z^{j-2}の係数に注目すると

$$\begin{cases} (j-1+y_0)x_j+x_0y_j=ax_{j-1}-\sum_{k=1}^{j-1}x_{j-k}y_k \\ -y_0x_j+(j-1-x_0)y_j=-by_{j-1}-\sum_{k=1}^{j-1}x_ky_{j-k} \end{cases} \tag{3.45}$$

を得る。これらをまとめると

$$\begin{pmatrix} (j-1+y_0) & x_0 \\ -y_0 & (j-1-x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_{j-1}-\sum_{k=1}^{j-1}x_{j-k}y_k \\ -by_{j-1}-\sum_{k=1}^{j-1}x_ky_{j-k} \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

という漸化式を得る。この右辺は x_k, y_k（$k=0, 1, \cdots, j-2, j-1$）のみを含むから，漸化式で x_0, y_0から順に求まっていく。2元1次連立方程式なので考えている Laurent 級数解（3.41）に矛盾がないようにするためには**2個の任意パラメータ**が決まるはずである。今テストしている方程式（3.40）は自励系なので z を $z-z_0$で置き換え，z_0を**1つの任意定数**と考えることはいつでも可能である。従って級数解の係数の中に任意定数を1つとることが出来ればよい。しかし，関係式（3.46）を見れば，全ての x_j, y_jは何もなければ x_0, y_0から一意的に決まってしまい，任意定数が入る余地はない。唯一，関係式（3.46）を x_j, y_jに関する連立1次方程式だと見た時に解は不定になり，つまり連立1次方程式（3.46）の左辺の行列の行列式が0になる時**のみ**に任意パラメータを得られるはずである。（3.44）に注意すると

$$\det\begin{vmatrix} (j-1+y_0) & x_0 \\ -y_0 & (j-1-x_0) \end{vmatrix}=(j+1)(j-1)=0 \tag{3.47}$$

となり，

$$j=\pm 1 \tag{3.48}$$

を得る。これより $j=1$ の時つまり x_1または y_1がのどちらかが不定（任意パラメータ）になる可能性がある。ちなみに $j=-1$ **に対応する任意パラメータは** z_0**である。**

3．Compatibility 条件：

$j=1$ の時，連立1次方程式（3.46）を書き直すと

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

となる。矛盾がないためには

$$a+b=0 \tag{3.50}$$

でなければならない。この時，方程式（3.49）は

$$x_1-y_1=-a \tag{3.51}$$

となり，x_1もしくはy_1のどちらかを任意にとることができる。よって2個の任意パラメータは二つの可能性 (z_0, x_1) もしくは (z_0, y_1) があることを確認した。

4．結論：

以上より方程式（3.40）は $a+b=0$ のときのみ2個の任意パラメータをもつLaurent級数解を持つことが確かめられた。つまり方程式（3.40）は $a+b=0$ のときのみARSテストをパスした。この場合は可積分Lotka-Volterra方程式として知られている。このようにARS法は与えられた常微分方程式が可積分[28]かどうか判定するだけでなく，可積分[29]となるような条件を求めるのにも役立つことが分かる（偏微分方程式に対する同様な試みは第4章で紹介する）。

以上，例を用いて，Painlevéテストの一つであるARS法について紹介した[30]。

3．3　Painlevéテスト：Weiss-Tabor-Carnevale法

偏微分方程式の可積分性を調べるためにPainlevéテスト（ARS法）を使う際，いちいち常微分方程式へのリダクションを行うのは非常に不便である。確かに偏微分方程式でも（**例3．1**）から（**例3．4**）で扱った方程式のように幅広く研究され，可積分性が既に知られているものにはARS法でも可能である。しかし偏微分方程式から常微分方程式へのリダクションする変換を見つける方法に一般的なものは存在していない。そこでWeiss-Tabor-Carnevaleは偏微分方程式のままPainlevéテストを行えるアルゴリズムを提案した [20, 21, 22]。現在このアルゴリズムは**Weiss-Tabor-Carnevale法（WTC法）**と呼ばれている。本節では，例を用いて，このWTCアルゴリズムの紹介をする[31]。

多変数の複素関数の特異点は1変数の場合のように孤立特異点ではありえない。特異点（singular point）に代わって多変数の場合は**特異多様体**（singular manifold）が現れる。一般に，n 個の独立な複素変数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$の関数 $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の特異点が，ある関数関係式

$$\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)=0 \quad (\phi：任意関数で\ \phi_x\neq 0) \tag{3.52}$$

で表されるとする。この関係式（3.52）を特異多様体とよぶ。非線形発展方程式

$$u_t=K[u],\quad u=u(z_1, z_2, \cdots, z_n) \tag{3.53}$$

の解 $u(z_1, z_2, \cdots, z_n)$[32]が特異多様体 $\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の周りで極しかもたないで，かつ特異多様体の近傍で実際に一価であるとするならば，方程式（3.53）はPainlevé性をもつ。言い換えれば解 $u(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が $\phi=0$ の近傍で

[28] ここで云う可積分とは**Painlevé性をもつという意味での可積分である．**
[29] 同上。
[30] ただし各の例毎で計算方法を少し変えてみた。
[31] 筆者が偏微分方程式の可積分性に興味があるということもあり，少し詳しく紹介することにする。
[32] この解にある種のmeromorphicity（一価性）の要請が下線の事柄を要請する。

$$u(z_1, z_2, \cdots, z_n)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{u}_j(z_1, z_2, \cdots, z_n)\phi^{j-\alpha}(z_1, z_2, \cdots, z_n) \tag{3.54}$$

と Laurent（型の）展開ができる（ただし収束性については何も触れない）こと意味している。ここで，α(leading order）は正の整数，$u_j(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ は特異多様体 $\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)=0$ の近くで正則な関数である（そして少なくとも $u_0\neq0$ である）。今考えている偏微分方程式（系）の order が N であるとすれば，その一般解は（原理的には）N 個の任意関数を使って表現されるべきである。よって解 $u(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が一価であり，一般的な初期条件に対して $\phi=0$ で特異性を持つとすれば，その展開（3.54）において，展開係数関数 $u_j(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の中には（$N-1$）個の任意関数が含まれていなければならない（**残りの1個は $\phi=\phi(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の任意性におしつける**）。

このような要請は考える**偏微分方程式（系）の形**，または**その係数に現れるパラメータに制限**を与える。この事実を調べることが Painlevé テスト（WTC 法）となる。

WTC 法の具体的なアルゴリズムは［6，9，11］

1．局所 Laurent 展開により leading order を決定する（Leading Order 解析），

2．一般化 Laurent 展開により resonance を求める（Resonance 解析），

3．resonance の個数に対応する任意関数の存在（整合性）を確かめる（Compatibility 条件），

というものである。

（例3．8） Burgers 方程式（order 2）

Burgers 方程式

$$u_t-uu_x+u_{xx}=0 \quad (u=u(x, t)) \tag{3.55}$$

は非線形散逸方程式である。

1．Leading Order 解析：

$$u(x, t)\sim u_0(x, t)\phi^{-\alpha}(x, t) \tag{3.56}$$

とし（局所 Laurent 展開），（3.55）式に代入すると，ϕ の最低次数を持つ項 uu_x，u_{xx} より

$$\alpha=1 \tag{3.57}$$

となる。つまり leading order は1である。

2．Resonance 解析：

leading order が1より，

$$u(x, t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x, t)\phi^{j-1}(x, t) \tag{3.58}$$

とする（一般化 Laurent 展開）。これを（3.55）式に代入すると，ϕ^{-3}，ϕ^{-2}などに比例する $u_0=-2\phi_x$，$\underline{u_1=(\phi_{xx}+\phi_t)/\phi_x}$などが得られ，$u_j$は次の漸化式

$$(j+1)(j-2)\phi_x^2 u_j = F_j(u_{j-1}, \cdots, u_0, \phi_t, \phi_x, \cdots) \tag{3.59}$$

に従って決まることが分かる。

$$j = -1,\ 2 \tag{3.60}$$

の時 $F_j=0$ ならば，漸化式（3.59）より u_j は任意関数となる。この（3.60）を **resonance** と呼ぶ。

3．Compatibility 条件：

$j=-1$ **は ϕ 自身の任意性により**，どんな方程式に対しても存在する resonance である。この方程式の order 2 なので任意関数は ϕ 自身の任意性を除いて残り 1 個ある。これを確かめる。漸化式（3.59）より展開の各段階で得られる関係は

$$j=2：0\times\phi_x^2 u_2 = \underline{(-\phi_t + u_1\phi_x - \phi_{xx})_x} = 0, \tag{3.61}$$

$$j=3：4\phi_x^2 u_3 = -u_{1t} + u_1 u_{1x} - u_{1xx} - 2u_2\phi_{xx} - 4u_{2x}\phi_x \tag{3.62}$$

のように与えられる。u_2 は（3.61）より任意にとれることが分かる。そして $u_j(x, t)$（$j \geq 3$）は一義的に決まる。

4．結論：

以上より，Burgers 方程式は任意関数 ϕ，u_2 を含む形で Laurent 展開できるので WTC 法をパスする。

（例 3．9） KdV 方程式（order 3）

KdV 方程式（3.2）に対して WTC 法を適用する。

1．Leading Order 解析：

$$u(x, t) \sim u_0(x, t)\phi^{-\alpha}(x, t) \tag{3.63}$$

とし（局所 Laurent 展開），（3.2）式に代入すると，ϕ の最低次数を持つ項 uu_x，u_{xxx} より

$$\alpha = 2 \tag{3.64}$$

となる。つまり，leading order は 2 である。

2．Resonance 解析：

leading order が 2 より，

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t)\phi^{j-2}(x, t) \tag{3.65}$$

とする（一般化 Laurent 展開）。これを（3.2）式に代入すると，ϕ^{-5}，ϕ^{-4} などに比例する $u_0 = -2\phi_x^2$，$u_1 = 2\phi_{xx}$ などが得られ，u_j は次の漸化式

$$(j+1)(j-4)(j-6)\phi_x^3 u_j = F_j(u_{j-1}, \cdots, u_0, \phi_t, \phi_x, \cdots) \tag{3.66}$$

に従って決まることがわかる。

$$j = -1, 4, 6 \tag{3.67}$$

の時 $F_j=0$ ならば，漸化式（3.66）より u_j は任意関数となる。

3．Compatibility 条件：

$j=-1$ は ϕ 自身の任意性により，どんな方程式に対しても存在する resonance である。

この方程式の order 3 なので任意関数は ϕ 自身の任意性を除いて残り 2 個ある。これを確かめる。漸化式（3.66）より展開の各段階で得られる関係は

$$j=0:\ u_0=-2\phi_x^2 \tag{3.68}$$

$$j=1:\ u_1=2\phi_{xx} \tag{3.69}$$

$$j=2:\ \phi_x\phi_t+6u_2\phi_x^2+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi^2{}_{xx}=0 \tag{3.70}$$

$$j=3:\ \underline{\phi_{xt}+6u_2\phi_{xx}-6u_3\phi_x^2+\phi_{xxxx}}=0 \tag{3.71}$$

$$j=4:\ 0\times\phi_x^3u_4=\underline{(\phi_{xt}+6u_2\phi_{xx}-6u_3\phi_x^2+\phi_{xxxx})}_x=0 \tag{3.72}$$

となる。u_2と u_3は（3.70）と（3.71）より得られる。（3.72）から u_4が任意にとれることが分かる。さらに高次の関係から u_6が任意にとれること，および展開を矛盾なく実行できることがいえる[33]。

4．結論：

以上より，KdV 方程式は任意関数 ϕ, u_4, u_6を含む形で展開できるので WTC 法をパスする。

（例 3．10） SG 方程式（order 2）

SG 方程式（3.23）に WTC 法を適用するためには sin を消す必要がある。そのため変数変換

$$U=U(x,t)=\exp\Big(iu(x,t)\Big) \tag{3.73}$$

により

$$UU_{xt}-U_xU_t=\frac{1}{2}(U^3-U) \tag{3.74}$$

と変形する。この方程式（3.74）に対して WTC 法を適用する

1．Leading Order 解析：

$$U\sim U_0(x,t)\phi^{-\alpha}(x,t) \tag{3.75}$$

とし，（3.74）式に代入すると，最低次数を持つ項 UU_{xt}，U_xU_t，U^3より

$$\alpha=2,\quad U_0=4\phi_x\phi_t \tag{3.76}$$

となる。つまり leading order は 2 である。

2．Resonance 解析・Compatibility 条件・結論：

これまでと同様の計算をすると resonance $j=-1,\ 2$ を得る。この方程式の order 2 なので任意関数は ϕ 自身の任意性を除いて残り 1 個ある。そして resonance に対応する任意関数 ϕ，U_2を確かめられる。よって WTC 法をパスする。

（補足説明）

(i) 非線形偏微分方程式の形のままではなくて，一度広田変換（τ 関数）により広田の双線形

[33] 偏微分方程式になると手計算ではやる気がなくなるような場合もある。そのために筆者は共同研究者の兪 成周氏と数式処理の **Mathematica** を用いたアルゴリズムを作った。いつかどこかで発表しようと思って，未発表のままである。

形式［5］に書き直してからWTC法を行うアルゴリズムもある［23, 24］。

(ii) このWTC法をパスした時に，その副産物としてCole-Hopf変換，auto-Bäcklund変換，τ関数，Lax対等を導出できる[34]［25］。このことに少し触れよう。

（例） **Burgers方程式の場合**：

級数展開（3.58）中でu_2は任意にとれるので，$u_2=0$とすると

$$j=3: 4\phi_x^2\times u_3=-u_{1t}+u_1u_{1x}-u_{1xx} \tag{3.77}$$

となるので，

$$u_{1t}-u_1u_{1x}+u_{1xx}=0 \tag{3.78}$$

を要請すれば，$u_3=0$となり，更に$u_4=u_5=\cdots=0$となることが確かめられる。結局この場合，Burgers方程式（3.55）の解の級数展開は

$$u=-2\frac{\phi_x}{\phi}+u_1, \tag{3.79}$$

$$\phi_t=u_1\phi_x-\phi_{xx} \tag{3.80}$$

となる。u_1がBurgers方程式（3.78）を満たすならば，uはBurgers方程式（3.55）の解となる。更に$u_1=0$（自明な解）とおけば，（3.79）がCole-Hopf変換

$$u=-2\frac{\phi_x}{\phi} \tag{3.81}$$

となり，（3.80）が拡散方程式（線形方程式）

$$\phi_t=-\phi_{xx} \tag{3.82}$$

となる。つまりBurgers方程式（3.55）が**Cole-Hopf変換**を通して，**拡散方程式**に帰着することが分かる。また$u_1=\phi$とおけば，

$$u=-2\frac{\phi_x}{\phi}+\phi, \tag{3.83}$$

$$\phi_t=\phi\phi_x-\phi_{xx} \tag{3.84}$$

となる。これはBurgers方程式（3.55）の解をそれ自身の解に変換する**auto-Bäcklund変換**である。

（例） **KdV方程式の場合**：

級数展開（3.65）中でu_4とu_6は任意にとれるので，$u_4=u_6=0$とすると

$$j=2: \phi_x\phi_t+6u^2\phi_x^2+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi_{xx}^2=0 \tag{3.85}$$

$$j=3: \phi_{xt}+6u^2\phi_{xx}-6u^3\phi_x^2+\phi_{xxxx}=0 \tag{3.86}$$

となる。ここで$u_3=0$を要請して

$$u_{2t}+6u_2u_{2x}+u_{2xxx}=0 \tag{3.87}$$

が成り立つ時に$u_j=0$（$j\geq3$）となる。従って

$$j=2: \phi_x\phi_t+6u^2\phi_x^2+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi_{xx}^2=0 \tag{3.88}$$

---

[34] ただしどの方程式においても導出されるとは限らない。

$$j=3:\ \phi_{xt}+6u^2\phi_{xx}+\phi_{xxxx}=0 \tag{3.89}$$

の時

$$u=2(\ln\phi)_{xx}+u_2 \tag{3.90}$$

はKdV方程式（3.2）の解である。故に（3.87），（3.88）及び（3.89）はKdV方程式からそれ自身への**auto-Bäcklund変換**である。また$\phi_x=\psi^2$とおくと，（3.88）と（3.89）は

$$\psi_{xx}+u_2\psi=\lambda\psi, \tag{3.91}$$

$$\psi_t+3u_2\psi_x+3\lambda\psi_x+\psi_{xxx}=0 \tag{3.92}$$

（λ：スペクトルパラメータ）を得るが，これはKdV方程式の**Lax対**[35]である。また（3.90）の形[36]から直ぐにわかる通り，広田の直接法とも一定の関係があることが知られている。このようにWTC法は多くの有用な情報（副産物）をもたらす。

(iii) また非可積分系においても有用な情報をもたらす事がある。その一例としてKdV-Burgers方程式

$$u_t+uu_x+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}=0\ (u=u(x,t)) \tag{3.93}$$

（α,β：0でない定数）を考える。

$$u(x,t)\sim u_0(x,t)\phi^{-\alpha}(x,t) \tag{3.94}$$

としてLeading Order解析より

$$\alpha=2 \tag{3.95}$$

を得る。級数解を

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x,t)\phi^{j-2}(x,t) \tag{3.96}$$

と仮定すると

$$u_0=-12\beta\phi_x^2,\quad u_1=12\beta\phi_{xx}+\frac{12}{5}\alpha\phi_x \tag{3.97}$$

となる。この場合$u_j=0(j\geq 2)$が成り立つならば

$$u(x,t)=\underline{12\beta(\log\phi(x,t))_{xx}}+\underline{\underline{\frac{12}{5}\alpha(\log\phi(x,t))_x}} \tag{3.98}$$

が得られる。これは<u>広田変換</u>[37]と<u>Cole-Hopf変換</u>の重ね合わせである。uが（3.98）を満たすように展開が切れる条件から

$$\phi(x,t)=1+\exp(kx+\omega t),\quad \omega=-\frac{6}{5}\alpha k^2,\quad k=\pm\frac{\alpha}{5\beta} \tag{3.99}$$

という摂動解を得る。よって変換（3.98）を経由するとKdV-Burgers方程式（3.93）の解

---

35 両立条件$(\psi_{xx})_t=(\psi_t)_{xx}$を計算すると$\frac{d\lambda}{dt}=0$の下でKdV方程式（3.2）を導出できる。

36 この形はそのままτ関数の定義である。

37 広田変換としてみた時はϕよりτとしたほうがいいかも（τ関数の定義）。

38 KdV-Burgers方程式（3.93）は非可積分なので解（3.100）を重ね合わせることはできない。

$$u(x,t)=3\beta k^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{kx+\omega t}{2}\right)+\frac{12\alpha}{5}\frac{\exp(kx+\omega t)}{1+\exp(kx+\omega t)} \tag{3.100}$$

を得る。これはソリトン解[38]と衝撃波解を重ね合わせたものになっている。

以上までWTC方法の例として（1+1）次元の方程式を用いたが，（2+1）次元以上の非線形偏微分方程式に対しても同様にWTC方法を行うことができる。例えばself-dual Yang-Mills方程式にもWTC方法は適用できる［26］。筆者は高次元可積分方程式について興味がある。以下ではこれまでに筆者が研究した（2+1）次元可積分方程式にWTC方法を適用してみよう。

（例3.11） Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程式

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程式[39]［27, 28, 29］

$$u_t+u_{xxz}+4uu_z+2u_x\partial_x^{-1}u_z=0 \quad (u=u(x,z,t)) \tag{3.101}$$

とは高次元[40]KdV方程式の一つである[41]。この方程式のソリトン解[42]やHierarchy構造等は既に知られている［30, 31, 32］。WTC法を適用するためには∂_x^{-1}を消す必要があるので，変数変換

$$u(x,z,t)=\frac{\partial U(x,z,t)}{\partial x} \tag{3.102}$$

により

$$U_{xt}+U_{xxxz}+4U_xU_{xz}+2U_{xx}U_z=0 \tag{3.103}$$

と書き直す。

1．Leading Order解析：

$$U\sim U_0(x,z,t)\phi^{-\alpha}(x,z,t) \tag{3.104}$$

とし，（3.103）式に代入すると，最低次数を持つ項U_{xxxz}，$U_{xx}U_z$，U_xU_{xz}より

$$\alpha=1,\quad U_0=2\phi_x \tag{3.105}$$

となる。

2．Resonance解析：

（1+1）次元の場合と同様をすればよい。ただこの時の計算量は（1+1）次元よりは手間がかかる。そこで結果のみを記すと

$$(j+1)(j-1)(j-4)(j-6)U_j\Phi_z=F_j(U_{j-1},\cdots,U_0,\Phi_t,\Phi_z,\cdots) \tag{3.106}$$

である。よってresonance $j=-1,1,4,6$を得る。

39　空間変数x, z，時間変数tの（2＋1）次元方程式である。

40　（1＋1）次元を**低次元**と呼び，それ以上変数が増えたものは全て**高次元**と呼ぶ。

41　高次元KdV方程式で有名なものには他にKadomtsev-Petviashvili方程式やBoiti-Leon-Manna-Pempinelli方程式等がある。

42　この方程式は特別な条件下でV字型のソリトン解をもつ（筆者は**Vソリトン**と呼んでいる）。

3．Compatibility 条件：

ここで Kruskal 予想というものを用いる [22, 26]。それは

$$\phi(x, z, t)=x+\Phi(z, t),\quad U_j(x, z, t)=U_j(z, t) \tag{3.107}$$

と出来るというものである。例えばこの時，

$$U_0=2\phi_x=2 \tag{3.108}$$

というようになる。

この Kruskal 予想を用いて，数式処理を使って確かめると resonance $j=1, 4, 6$ に対応する任意関数は U_1, U_4, U_6 となっている。また resonance $j=-1$ に対応する任意関数は ϕ である。

4．結論：

resonance に対応する任意関数が確かめられる。よって WTC 法をパスする。

（例 3．12） modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式

modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [30, 31, 32]

$$v_t+v_{xxz}-4v^2v_z-2v_x\partial_x^{-1}(v^2)_z=0\quad (v=v(x, z, t)) \tag{3.109}$$

とは高次元 mKdV 方程式の一つである[43]。WTC 法を適用するためには ∂_x^{-1}を消す必要がある。そのために方程式を

$$\rho_x+v^2=0, \tag{3.110}$$

$$v_t+v_{xxz}+4\rho_xv_z+2v_x\rho_z=0 \tag{3.111}$$

に分離する。この時の 2 つの特異多様体

$$\rho(x, z, t)=\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(x, z, t)\phi^{j+\alpha}(x, z, t),$$

$$v(x, z, t)=\sum_{j=0}^{\infty}v_j(x, z, t)\phi^{j+\beta}(x, z, t) \tag{3.112}$$

を考える。

1．Leading Order 解析：

$$\rho\sim\rho_0\phi^{\alpha},\quad v\sim v_0\phi^{\beta} \tag{3.113}$$

とし (3.110) 式と (3.111) 式に代入して，主要項に注目すると

$$\alpha=\beta=-1,\quad \rho_0+\phi_x=0\quad v_0^2+\phi_x^2=0 \tag{3.114}$$

となる。

2．Resonance 解析：

計算結果のみ記すと resonance $j=-1, 1, 3, 4$ となる。

3．Compatibility 条件：

Kruskal 予想を用いて数式処理を用いて確かめると resonance $j=-1, 1, 3, 4$ に対応する

[43] 高次元 mKdV 方程式で有名なものには modified Kadomtsev-Petviashvili 方程式や modified Boiti-Leon-Manna-Pempinelli 方程式等がある。

[44] この方程式は Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 (3.101) の Möbius 変換（一次分数型点変換）に不変な形である。

任意関数が見つけられる。

4．結論：

resonance に対応する任意関数が確かめられる。よって WTC 法をパスする。

(例 3.13) 高次元 Schwarz-KdV 方程式

高次元 Schwarz-KdV 方程式[44] [33] は

$$\frac{\phi_t}{\phi_x}+S_{2+1}[\phi;x]=0,\quad (\phi=\phi(x,z,t)) \tag{3.115}$$

で与えられ，ここで

$$S_{2+1}[\phi;x]\equiv\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)_z-\frac{1}{2}\partial_x^{-1}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)_z^2 \tag{3.116}$$

である。WTC 法を用いるために，変数変換

$$\phi=\exp(\Phi), \tag{3.117}$$

の後，もう一度変数変換

$$\Phi_x=U,\quad \Phi_t=V. \tag{3.118}$$

をすると

$$U_2V_x-UU_xV+\frac{1}{4}U^2U_{xxz}-\frac{1}{4}UU_{xx}U_z-\frac{3}{4}UU_xU_{xz}+\frac{3}{4}U_x^2U_z-\frac{1}{4}U^4U_z=0, \tag{3.119}$$

$$U_t=V_x, \tag{3.120}$$

を得る。この方程式に WTC 法を適用する。

1．Leading Order 解析：

$$U\sim U_0\phi^{\alpha},\quad V\sim V_0\phi^{\beta}. \tag{3.121}$$

とし (3.119) 式と (3.120) 式に代入すると，主要項に注目すると

$$\alpha=\beta=-1, \tag{3.122}$$

及び

$$U_0^2=\phi_x^2,\quad U_0\phi_t=V_0\phi_x. \tag{3.123}$$

を得る。

2．Resonance 解析：

級数解

$$U=\sum_{j=0}^{\infty}U_j\phi^{j-1},\quad V=\sum_{j=0}^{\infty}V_j\phi^{j-1}, \tag{3.124}$$

を方程式 (3.119) と (3.120) に代入して Kruskal 予想を用いて計算すると resonance $j=-1,1,1,2$ を得る。

3．Compatibility 条件：

数式処理を用いて確かめると resonance $j=-1,1,1,2$ に対応する任意関数が見つけられる。

4．結論：

resonance に対応する任意関数が確かめられる。よって WTC 法をパスする。

(例 3.14) cylindrical Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式

cylindrical Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式[45]

$$u_t+u_{xxz}+4uu_z+2u_x\partial_x^{-1}u_z+\frac{d-1}{2t}u=0\quad(u=u(x,z,t)) \tag{3.125}$$

とは高次元 cylindrical KdV 方程式[46]である [34]。WTC 法を適用するためには ∂_x^{-1}を消す必要がある。そのため変数変換

$$u(x,z,t)=\frac{\partial U(x,z,t)}{\partial x} \tag{3.126}$$

により

$$U_{xt}+U_{xxxz}+4U_xU_{xz}+2U_{xx}U_z+\frac{d-1}{2t}U_x=0 \tag{3.127}$$

となる。

1. Leading Order 解析：

$$U\sim U_0(x,z,t)\phi^{-\alpha}(x,z,t) \tag{3.128}$$

とし，(3.127) 式に代入すると，最低次数を持つ項 U_{xxxz}, U_xU_{xz}, $U_{xx}U_z$より

$$\alpha=1,\quad U_0=2\phi_x \tag{3.129}$$

となる。

2. Resonance 解析：

これも計算結果のみにする。resonance $j=-1,1,4,6$ はである。

3. Compatibility 条件：

この Kruskal 予想を用いて数式処理を用いて確かめると resonance $j=-1,1,4,6$ に対応する任意関数が見つけられる。

4. 結論：

resonance に対応する任意関数が確かめられる。よって WTC 法をパスする。

以上，例を用いて，Painlevé テストの一つである WTC 法について紹介した。

4 WTC 法を用いた可積分方程式の探索 (Quest)

前章では可積分判定に有効な Painlevé テスト (ARS 法及び WTC 法) を紹介した。この章では与えられた偏微分方程式が **Painlevé 性をもつという意味で可積分**となるための条件を

---

[45] この方程式は筆者が Lax 対を用いた高次元化により導出した。ソリトン解（厳密解）や保存量は分かっている。またもう少し一般化できる。

[46] 円筒座標で記述した KdV 方程式であり，二次元のイオンプラズマ波ソリトンに対する方程式である [35]。$\frac{d-1}{2t}u$ 項は円筒座標による波面の曲がりの効果を表す。球 KdV 方程式の高次元化した方程式についても同様の議論ができる [34]。

WTC 法から得られる例について紹介する。つまり既知の方程式を拡張して（各項にパラメータをふっておく），それに WTC 法を適用し Painlevé 性を持つという意味で可積分となるようにパラメータの満たすべき条件を求める。

（例 4．1） coupled KdV 方程式

coupled KdV 方程式としてパラメータ A, B, C（そして$A \neq 0$）をもつ

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxx} + 6uu_x - 3vv_{xx} \\ u_t = -Av_{xxx} + Bv_x u + Cvu_x \end{cases} \quad (u=u(x,t),\ \ v=v(x,t)) \tag{4.1}$$

を考える。WTC 法を適用して coupled KdV 方程式が Panlevé 性を持つという意味で可積分となるようにパラメータ A, B, C の満たすべき条件を求める。級数解を[47]

$$u=\sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+\alpha},\quad v=\sum_{j=0}^{\infty} v_j \phi^{\frac{3}{4}(j+\beta)} \tag{4.2}$$

ここで

$$\phi=\phi(x,z,t)=0,\quad \phi_x \neq 0, \tag{4.3}$$

$(u_j=u_j(x,z,t), v_j=v_j(x,z,t), u_0 \neq 0, v_0 \neq 0)$ と仮定して，WTC 法を適用する。

1．Leading Order 解析：

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha},\quad v \sim v_0 \phi^{\frac{3}{4}\beta}, \tag{4.4}$$

方程式（4.1）に代入して，主要項に注目すると

$$\alpha=\beta=-2, \tag{4.5}$$

が求まる。

2．Resonance 解析：

級数解（4.2）を，方程式（4.1）に代入すると

$$u_{j-3,t}+(j-4)u_{j-2}\Phi_t+(j-2)(j-3)(j-4)u_j-3(j-4)\sum_{k=0}^{\infty} u_k u_{j-k} + \frac{3}{2}(j-4)\sum_{k=0}^{j+1} v_k v_{j+1-k}(j+1-2k)=0, \tag{4.6}$$

及び

$$v_{j-3,t}+(j-4)v_{j-2}\Phi_t+A(j-2)(j-3)(j-4)v_j-B\sum_{k=0}^{\infty} v_k v_{j-k}(j-k-2) - C\sum_{k=0}^{j} v_k u_{j-k}(j-k-2)=0, \tag{4.7}$$

を得る。計算を簡単にするため，この例ではこの段階では Kruskal 予想

$$\phi(x,t)=x+\Phi(t),\quad u_j(t),\quad v_j=v_j(t) \tag{4.8}$$

を用いる。そして u_jと v_jに関して整理すると

---

[47] v の級数解で ϕ の巾で $\frac{3}{4}(j+\beta)$ としているのは Weak Painlevé テストから応用している。degree 計算すると $[x]=-1$とすると $[u]=2$と $[v]=\frac{3}{2}$ を得る。ここから巾を $\frac{3}{4}$ でくくることになる（$\frac{3}{2}$ でくくってもよいが，この方が計算が楽になる）。

$$\begin{pmatrix} g_1 & -3v_1(j-1)(j-4) \\ v_0(2B+2C-Cj) & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

と書き直される。ここで $f_i=f_i(u_{j-1},\cdots,u_0,v_{j-1},\cdots,v_0\phi)$ $(i=1,2)$ となる。ただし f_1, f_2 は異なるものである。また

$$g_1=(j-2)(j-3)(j-4)-6u_0(j-4), \tag{4.10}$$

$$g_2=A(j-2)(j-3)(j-4)+u_0(2B+2C-Bj) \tag{4.11}$$

である。resonance j は

$$\det\begin{vmatrix} g_1 & -3v_1(j-1)(j-4) \\ v_0(2B+2C-Cj) & g_2 \end{vmatrix}=0 \tag{4.12}$$

により与えられる。よって $u_0=2+\frac{1}{2}v_0v_1$ に注意しながら，行列式を v_0v_1 に注目して整理すると

$$(j+1)(j-4)(j-6)[A(j-2)(j-3)(j-4)+2(2B+2C-Bj)]+v_0v_1P(j)=0 \tag{4.13}$$

とまとめられる。ここで $P(j)$ は j に関する 4 次の多項式である。もし v_0v_1 が任意だとすると，

$$(j+1)(j-4)(j-6)[A(j-2)(j-3)(j-4)+2(2B+2C-Bj)]=0 \tag{4.14}$$

$$P(j)=0 \tag{4.15}$$

より (4.14) から j が 6 個，そして (4.15) から j が 4 個の計10個を得る[48]（重複でも別に数える）。つまり級数展開で現れる任意関数は10個現れる。しかし，現在考えている coupled KdV 方程式はそれぞれ order 3 の計 order 6 の方程式である（つまり必要な任意関数は 6 個）。よって j（任意関数の数）が 4 個余分である。よって

$$v_0v_1=0 \tag{4.16}$$

としなければならない。そのときは (4.13) は

$$(j+1)(j-4)(j-6)\underline{[A(j-2)(j-3)(j-4)+2(2B+2C-Bj)]}=0 \tag{4.17}$$

のみとなる。よって現段階で resonance j

$$j=-1,4,6 \tag{4.18}$$

が求まるが，この resonance は方程式 (4.1) で $v=0$ とした時[49]の resonance である。つまりこの時は対応する任意関数は ϕ, u_4, u_6 である（詳しくは例 3．9 を参照のこと）。残

[48] 負ではない整数であるとして，つまり全て負ではない整数となるようにパラメータに条件付けできたとして。

[49] この時，coupled KdV 方程式 (4.1) は KdV 方程式 (3.2) にリダクションされる。細かい事をいうと KdV 方程式 (3.2) とリダクションされた KdV 方程式は係数が異なる。しかし leading order や resonance の数及び任意関数の場所は変わらない。

[50] 最初にこの問題に取り組んだ時はもっと複雑な計算をした [34]。今回この小論を書くにあたり整理された形にまとめ直した。何で最初に気づかなかったのだろうかと不思議であり恥ずかしくもある。しかしその一方で複雑な計算ノートの方が愛おしく思ってしまうのも事実である。

りの resonance は，**パラメータの値に制限を課すことにより**，方程式（4.17）中の下線部から**負ではない整数として**得られるはずである。それを見ていく[50]。残りの resonance の個数は3個なので j_1, j_2, j_3（全て負ではない整数）として，それぞれ対応する任意関数を $v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}$ とする[51]。この時，下線部が j に対して3次方程式

$$A(j-j_1)(j-j_2)(j-j_3)=0 \quad (A\neq 0) \tag{4.19}$$

という形になるはずである。3次方程式の「解と係数の関係」より

$$j_1+j_2+j_3=9,\quad j_1j_2+j_2j_3+j_3j_1=26-\frac{2B}{A},\quad j_1j_2j_3=24-\frac{4(B+C)}{A} \tag{4.20}$$

を得る。よって（4.20）を満たす負ではない整数 j_1, j_2, j_3 を求めればよい。今の場合

$$j_3>j_2>j_1\geq 0 \tag{4.21}$$

という大小関係を課しても一般性は失われない。そして

Case (i)　$j_1=0,\ j_2=2,\ j_3=7$ の時：$B=6A,\ C=0$

Case (ii)　$j_1=0,\ j_2=3,\ j_3=6$ の時：$B=4A=2C$

Case (iii)　$j_1=0,\ j_2=4,\ j_3=5$ の時：$B=3A=C$

Case (iv)　$j_1=1,\ j_2=2,\ j_3=6$ の時：$B=3A,\ C=0$

Case (v)　$j_1=1,\ j_2=3,\ j_3=5$ の時：$B=\frac{3}{2}A=2C$

Case (vi)　$j_1=2,\ j_2=3,\ j_3=4$ の時：$B=C=0$

が求まる。

3．Compatibility 解析：

$\phi, u_4, u_6, v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}$ が本当に任意関数になるかどうか，級数解（4.2）を coupled KdV 方程式（4.1）に代入して確かめる。計算過程は複雑なので略すが，結果としてはパラメータが **Case** (iii)と **Case** (v)のみ $\phi, u_4, u_6, v_{j_1}, v_{j_2}$，そして v_{j_3} が確かに任意関数になっている。

Case (iii)の時：

この時の coupled KdV 方程式は超対称性[52]を持つ可積分系[53]であることが知られている。[37]

Case (v)の時：

この時の coupled KdV 方程式は bi-Hamilton 構造を持つ可積分系であることが知られている［38］。

である。

---

[51] KdV 方程式（$v=0$の時）の WTC 法に対する結果より，これ以上 u の展開係数関数 u_j には任意性は見いだせないなずである。よって残りの任意性は v の展開係数関数 v_j に現れなければならない。

[52] u と v が $\delta_\varepsilon u=\varepsilon v_x$ かつ $\delta_\varepsilon v=\varepsilon u$ を満たす時にこのように呼ばれる。ここで ε は anticommuting parameter（$\varepsilon^2=0$）である。この場合 u はボゾン場，v はフェルミ場である。

[53] この系は super KdV 方程式と呼ばれ，super Kadomtsev-Petviashvili 方程式からのリダクションで得られる。また最近筆者はこの super KdV 方程式の Lax 対からの高次元化に成功している［36］。

4．結論：

パラメータが **Case** (iii)または **Case** (v)の条件を満たすときのみ WTC 法をパスする。

筆者は高次元可積分方程式の構成法に興味がある。我々の住んでいる世界が（3+1）次元であるにも関わらず，現在までに知られている非線形可積分系の多くは（1+1）次元である。高次元可積分系はほとんど知られていない。低次元可積分系を単純に高次元にしてもその**可積分性は保たれない**。よって，低次元非線形偏微分方程式の**可積分**という性質（可積分性）を残すような次元拡張法（高次元化法）の構築を筆者の研究課題にしている。現在までに微分作用素型 Lax 対[54]に対する高次元法を提案している[55]。次の例では Lax 対からの高次元化ではなく，既知の低次元可積分方程式に考えられる高次元化方程式の一般的な形（各項にパラメータをふっておく）を与えて，それに WTC 法を適用し Painlevé 性を持つという意味で可積分となるようにパラメータの満たすべき条件を求める。

（例4．2） 高次元 mKdV 方程式

高次元 mKdV 方程式（3.109）を一般化した

$$v_t+v_{xxz}+Av^2v_z+Bv_x(\partial_x^{-1}vv_z)+Cvv_x(\partial_x^{-1}v_z)=0,\quad (v=v(x,z,t)) \tag{4.22}$$

に WTC 法を適用して方程式（4.22）が Painlevé 性を持つという意味で可積分となるようにパラメータ A,B,C の満たすべき条件を求める [39]。ただし方程式（4.22）がリダクション（$z=x$）したときに mKdV 方程式（3.1）になるためには

$$A+\frac{B}{2}+C\neq 0, \tag{4.23}$$

でなければならない。

WTC 法を適用するためには ∂_x^{-1}を消す必要がある。そのために方程式を（$u=u(x,z,t)$, $v=v(x,z,t)$, $w=w(x,z,t)$）を用いて

$$u_x-Bvv_z=0, \tag{4.24}$$

$$w_x-Cv_z=0, \tag{4.25}$$

$$v_t+v_{xxz}+Av^2v_z+uv_x+vv_xw=0, \tag{4.26}$$

と分離する。級数解を

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^{j+\alpha},\quad v=\sum_{j=0}^{\infty}v_j\phi^{j+\beta},\quad w=\sum_{j=0}^{\infty}w_j\phi^{j+\gamma} \tag{4.27}$$

ここで

$$\phi=\phi(x,z,t)=0,\quad \phi_x\neq 0, \tag{4.28}$$

（$u_j=u_j(x,z,t)$, $v_j=v_j(x,z,t)$, $w_j=w_j(x,z,t)$, $u_0\neq 0$, $v_0\neq 0$, $w_0\neq 0$）と仮定して，

[54] Lax 対には微分作用素型と行列型とがある。

[55] この方法は「**非可換空間の場合**」や「**超対称性を持つ場合**」にも有効であろう（実際部分的にではあるが成功している）。

WTC 法を適用する。

1．Leading Order 解析：

$$u \sim u_0\phi^{\alpha},\quad v \sim v_0\phi^{\beta},\quad w \sim w_0\phi^{\gamma}, \tag{4.29}$$

(4.24) 式から (4.26) 式に代入して，主要項に注目すると

$$\alpha=-2,\quad \beta=\gamma=-1, \tag{4.30}$$

及び

$$u_0=\frac{B}{2}\frac{\phi_z}{\phi_x}v_0^2,\quad w=C\frac{\phi_z}{\phi_x}v_0 \text{ and } v_0^2=-\frac{6\phi_x}{A+B/2+C} \tag{4.31}$$

が求まる。

2．Resonance 解析：

級数解 (4.27) を (4.24) 式から (4.26) 式代入すると，漸化式 (Σ は f_i に含まれている)

$$(j-2)\phi_x u_j - B(j-2)v_j = f_1, \tag{4.32}$$

$$(j-1)\phi_x w_j - C(j-1)\phi_z v_j = f_2, \tag{4.33}$$

$$v_0\phi_x u_j - G(j)v_j + v_0^2\phi_x w_j = f_3, \tag{4.34}$$

を得る。ここで

$$G(j)=\frac{12A+6C+j(A+B/2+C)(j-1)(j-5)}{A+B/2+C} \tag{4.35}$$

であり，$f_i=f_i(u_{j-1},\cdots,u_0,u_{j-1},\cdots,v_0,w_{j-1},\cdots,w_0,\phi)$ ($i=1,2,3$) となる。ただし f_1, f_2, f_3 は全てことなるものである。漸化式 (4.32) から (4.34) より

$$\begin{pmatrix} (j-2)\phi_x & -B(j-2) & 0 \\ 0 & -C(j-1)\phi_z & (j-1)\phi_x \\ v_0\phi_x & -G(j) & v_0^2\phi_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ f \\ f \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

と書き直される。resonance j は

$$\det\begin{vmatrix} (j-2)\phi_x & -B(j-2) & 0 \\ 0 & -C(j-1)\phi_z & (j-1)\phi_x \\ v_0\phi_x & -G(j) & v_0^2\phi_x \end{vmatrix}=0 \tag{4.37}$$

で与えられる。簡単な計算により

$$j=\pm1, 2, 3, 4 \tag{4.38}$$

が求まる。

3．Compatibility 解析：

Kruskal 予想

$$\phi(x,z,t)=x+\Phi(z,t),\quad u_j=u_j(z,t),\quad v_j=v_j(z,t),\quad v_j=v_j(z,t),\quad w_j=w_j(z,t) \tag{4.39}$$

により計算の負担を軽減してから，数式処理により任意関数が出るようにパラメータの条件を求める。計算過程は複雑なので略すが，結果としては以下の関係を求めれた（条件

(4.23) も考慮して)；

$j=-1$ に対応する任意関数はϕである。残りの $j=1,2,3,4$ に対応する任意関数とその時の条件は

Case(i)$A=B\neq 0$ の時：

$j=1$ に対応する任意関数は $\{u_1, v_1, w_1\}$ のどれか一つ，$j=2$ に対応する任意関数は $\{u_2, v_2, w_2\}$ のどれか一つ，$j=3$ に対応する任意関数は $\{u_3, v_3, w_3\}$ のどれか一つ，$j=4$ に対応する任意関数は $\{u_4, v_4, w_4\}$ のどれか一つである。

Case(ii)$A=B+C$ かつ $3B+4C\neq 0$ の時：

$j=1$ に対応する任意関数は $\{u_1, v_1, w_1\}$ のどれか一つ，$j=2$ に対応する任意関数は $\{u_2, v_2, w_2\}$ のどれか一つ，$j=3$ に対応する任意関数は v_3，$j=4$ に対応する任意関数は $\{u_4, v_4, w_4\}$ のどれか一つである。

Case(iii)$A=B+C/2$ かつ $B+C\neq 0$ の時：

$j=1$ に対応する任意関数は $\{u_1, v_1, w_1\}$ のどれか一つ，$j=2$ に対応する任意関数は v_2，$j=3$ に対応する任意関数は $\{u_3, v_3, w_3\}$ のどれか一つ，$j=4$ に対応する任意関数は $\{u_4, v_4, w_4\}$ のどれか一つである。

である。

4．結論：

resonance に対応する任意関数が確かめられる。よってパラメータが **Case**(i)から **Case**(iii)の条件を満たすときのみ WTC 法をパスする。**Case**(i)の場合は方程式 (4.22) は modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 (3.109) であり，Lax 対や保存量，ソリトン解が知られている [30]。

5　特異点閉じ込め法：離散系の可積分判定テスト

最近，数理工学や物理学において離散可積分系が直接現れ，離散（差分）方程式自身の数学的構造（代数構造や特殊関数の性質等）の研究が今まで以上に活発になってきている。本章では，非線形離散（差分）方程式の可積分性，離散の世界における Painlevé 性に相当する概念である「**特異点閉じ込め**」及びその判定法について解説する[56]。

5.1　非線形離散系の可積分性

第1章で有限及び無限自由度の可積分性について簡単にまとめた。そこで無限自由度になる

[56] この分野での日本人の研究者の活躍は目覚ましい。まさに日本の可積分系の研究者は猫も杓子もといった状態である。しかし残念ながら筆者は離散可積分系については耳学問程度しか知らない。故にこの章をまとめるにあたり複数の文献を参考にした。そのリストを [40] に挙げておく。

と「可積分性」と呼ばれる概念がはっきりしなくなることを見た。それでは離散（差分）系に関する可積分性はどうであろうか？ **実は連続系以上に確立されていない。**連続系の場合の性質と比べるとどうなるか見てみよう；

1. **Lax 対の存在**：
   Lax 対は多くの離散方程式に対して構成されているが，非常に形式的である。離散方程式[57]に対して逆散乱法（のような方法）で初期値問題が解析された例は少なくとも筆者は知らない。
2. **Liouville-Arnold の意味での「可積分性」**：
   確立された離散時間 Hamilton 系の概念が未だない（と思う）。
3. **無限個の保存量・対称性の存在**：
   Lax 対が存在すれば形式的には保存量（保存密度）は作れる。対称性に関する研究は最近流行の離散 Painlevé 方程式 [41] に関するものしか知られていない（と思う）。
4. **厳密解の存在**：
   広田の直接法や Bäcklund 変換などにより（N-ソリトン解のような）広いクラスの厳密解の存在は多くの離散方程式に対して示されている[58]。
5. **Painlevé 性**：
   離散系の Painlevé 性に相当する概念は何だろうか？ 実は「**特異点閉じ込め**」と呼ばれる性質がそれであると主張されている。この後詳しく述べる。

当然のことながら，これらの性質の同値性はほとんど議論されていない。従って連続系以上に離散系では何をもって可積分と称するかが全くはっきりしていない。

5.2 特異点閉じこめ

本節ではまず「**特異点閉じ込め**（Singularity Confinement；以後略して **SC** と書く）」について，引き続いて SC テストについて説明する。

Grammaticos と共同研究者達は Quispel 系と呼ばれる「保存量をもつという意味で可積分」な一群の 2 階差分方程式 [42] が共通して SC をもつことを見い出した [43]。そして彼らはこの性質こそが Painlevé 性の離散版であると主張した。SC とは以下のような性質である；

「可積分写像」ならば

- 初期値に依存してあるステップで特異性が現れた時，その特異性は何ステップか後に打ち消しあってなくなってしまう（つまり特異点は有限領域に閉じ込められる）。
- 初期値に関する情報は特異点[59]を通過した後でも失われない。

[57] 戸田方程式のような微分差分方程式は除く。

[58] 連続系における状況と似通っている（多分）唯一の性質であろう。

[59] 諄いようであるが，注意すべき事はここでいう特異点とは「動く特異点」の事である。「動かない特異点」は以下の議論の対象から除かれなければならない。

[60] この方程式は離散 Painlevé 方程式に帰着できる。

まずこの主張を具体例で見てみよう。

(例5.1) 離散 KdV 方程式[60]にはいろいろなタイプがあるが可積分なものとしては

$$x_j^{i+1}=x_{j+1}^{i-1}+\frac{1}{x_j^i}-\frac{1}{x_{j+1}^i} \tag{5.1}$$

が有名である。これを例にとる。今 $x_j^i=\varepsilon\to 0$ になったとしよう。この時逐次的に漸化式を解くと

$$x_{j-1}^{i+1}=-\frac{1}{\varepsilon}+O(\varepsilon_0)\ \to\infty, \tag{5.2}$$

$$x_j^{i+1}=\frac{1}{\varepsilon}+O(\varepsilon_1)\ \to\infty, \tag{5.3}$$

$$x_{j-1}^{i+2}=-\varepsilon+O(\varepsilon_2)\ \to 0, \tag{5.4}$$

となり特異点が生じるが，その他は**有限値となり特異点は打ち消しあってなくなってしまう。**更に**初期値の情報は失われていない。**この状況は Painlevé 性の概念に非常に類似していると言える。事実多くの離散可積分系がこの性質をもっていることが調べられている。

離散 KdV 方程式 (5.1) の例で見た特異点の解析での過程は，実は，そのまま離散系における可積分判定法のアルゴリズムを与える。これは「**特異点閉じ込めテスト (SC テスト)**」と呼ばれる。

ここに SC テストのアルゴリズムを整理すると

1. 与えられた差分方程式の初期値を特異性が生じるように選ぶ，
2. その初期値に微少量の摂動を加え，逐次的に発展させる，
3. 何ステップかの後に ε の負巾の項が消え，定数項に初期値の情報が残っているかどうかをチェックする，

で与えられる。例を用いて SC テストを具体的に見てみよう。

(例5.2)　2階の差分方程式

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{ax_n}{1-x_n}\ \ (a：定数) \tag{5.5}$$

を考える。初期値として，例えば，$(x_0, x_1)=(b, \pm 1)$ と選んでみると

$$x_2=\frac{ax_1}{1-x_1}-x_0=\frac{\pm a}{0}-b=\infty \tag{5.6}$$

となってしまう。このように初期値の選び方により生じる特異点を**動く特異点**と呼ぶ（ここまでが**アルゴリズム1**）。動く特異点が生じた時の，その周りでの情報の伝搬を見たい。そこで ε を微少量として，b を定数とし初期値を $(x_0, x_1)=(b, 1+\varepsilon)$ とおき，これを代入して計算を進めていく；

$$x_2=-\frac{a}{2}\varepsilon^{-1}-\frac{a+4b}{4}+O(\varepsilon_1), \tag{5.7}$$

$$x_3=-1+\varepsilon+O(\varepsilon_2), \tag{5.8}$$

$$x_4=-b+O(\varepsilon_1)\ （ここまでが\textbf{アルゴリズム2}）。 \tag{5.9}$$

明らかなように，x_2で現れた特異性と，x_3で現れた−1による特異性が上手く打ち消しあうことでx_4が有限値となっている。更にx_4に初期値bの情報が残っている（ここまでが**アルゴリズム3**）。以上より離散方程式（5.5）はSCテストに通ったことになる。

今見てきたのは，SCによる，与えられた離散（差分）方程式が「可積分[61]」かどうかの判定であったが，この章の締めとして，SCが一群の離散方程式の中から「可積分」な方程式を抽出することに対しても極めて簡単で強力な手法であることを見ていく。

方程式（5.5）を少し一般化して[62]f_nをnの任意関数として

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{y_n x_n}{1-x_n} \tag{5.10}$$

を考えてみる。y_nの値によって離散方程式（5.10）は可積分にもなり，非可積分ともなりえる。方程式（5.10）が可積分となるようなy_nの条件を求めてみよう。この場合も$(x_n, x_{n+1})=(b, 1+\varepsilon)$から始めて，（例5．2）と同様の計算すると，$x_{n+4}$で特異性が打ち消される条件として，方程式

$$y_{n+3}-2y_{n+2}+y_{n+1}=0 \tag{5.11}$$

が得られる。条件式（5.11）つまり

$$y_n=\alpha n+\beta\ (\alpha, \beta：定数) \tag{5.12}$$

の時のみ，与えられた離散方程式（5.10）はSCテストに通る[63]。つまり（少なくとも[64]）方程式（5.10）中のy_nが（5.12）を満たすときは離散可積分系になることが分かった。直ぐに分かるように$\alpha=0$の時が方程式（5.5）である。

（追加）

連続の世界のソリトン解（またはそれに類似する解）をもつ方程式に対してN-ソリトン解などの構成には「広田の直接法」が強力な手法である。同様に離散の世界でもこの方法の適用は可能ではあるが，連続系ほど単純にはいかないようである。ところが，SCテストを適用した際に現れる特異点の伝搬パターンを補助的に用いることによって，簡単に「広田の直接法」の適用が可能になる事例の存在が報告されている［44, 45］。故にSCテストは可積分系を（一応）判定し，それからroutine workで解を構成できるという優れた方法であると言える。

---

[61] ここで云う可積分とは**SCをもつという意味での可積分**である。

[62] 方程式（5.5）中の定数aを変数y_nに置き換えた。

[63] 実はこのようにして得られる方程式は離散Painlevé方程式の一つになる。

[64] これも諄いようであるがSCはあくまでも離散系の可積分性の性質の一つに過ぎない。

6 まとめ

可積分系といえども，その「可積分性」の本質は背後の代数的な構造にあり，解析的な性質の解明はまた別問題である。すなわち，ほとんどの場合，考えている方程式が可積分だとしても，一般の初期値問題が「解ける」わけではない。この小論では可積分の性質の一つである **Painlevé 性**に注目して，その性質をもつかどうかを判定する Painlevé テストを（筆者の研究成果も含めて）紹介した。

第1章で述べた通り，常微分方程式のような有限自由度系ではかなりはっきりとした**可積分性の定義**（つまり **Liouville-Arnold の定理の意味での可積分**）がある。しかし無限自由度の場合には可積分性の定義はぼやけてくる。そこでは定義というよりは可積分方程式の共通してそうな性質だけが分かっている。常微分方程式の可積分性と関係がある Painlevé 性に着目して第2章で簡単に紹介した。そして第3章で見た通り，Painlevé テストにはテストする方程式が常微分方程式か偏微分方程式かでそのアルゴリズムが異なる（それぞれ ARS 法，WTC 法と呼ばれている)。例えば常微分方程式に対する Painlevé テスト（ARS 法）では**動く特異点が高々極**であること，つまり動く特異点の周りで一般解が Laurent 級数の形で求まるかどうかチェックしている。ということは，解は複素平面で1価であり，動く特異点があったとしてもその周りで情報が欠落していないことを意味している（ただし動かない特異点に関してまで極であることは制限が非常にきつすぎる)。明らかに Painlevé 性という意味での可積分と Liouville-Arnold の定理の意味での可積分には大きなギャップがある。勿論，厳密には Painlevé 性が可積分の必要十分条件だということにはならない。少なくとも必要条件ではない。実際に Liouville-Arnold の定理の意味での可積分であっても Painlevé 性をもたない簡単な例が知られている（動く特異点として**代数的分岐点**まで許しても同様の議論ができる例も存在する（**弱 Painlevé 性**))。ただ経験的に Painlevé 性が可積分の十分条件としては受け入れられる。偏微分方程式に対する Painlevé テスト（WTC 法）については特異点が特異多様体に代わるなど異なる点もあるが，それ以外は基本的に ARS 法と同様である。このことは第3章で挙げたさまざまな例から体感してもらえたであろう。更に Painlevé テストは可積分を判定するだけではなく，可積分方程式を導出するツールとしても役に立つことを，筆者の研究成果を例にとり第4章で紹介した。ただ **Weak（弱）Painlevé テスト，Painlevé 性と Schwarz 形式**[65]**との関係**［46, 47, 48］や **WTC 法の問題点**（例えばテストを適用するために必要な方程式の分離の困難［32］等[66]）に触れることが出来なかったことが心残りである[67]。

---

[65] 微分方程式の Möbius 変換に対して不変な形のこと。

[66] Painlevé テストのこのような問題点は不思議と語られない。

[67] このことは富山県立大学の紀要にでも書くことにしよう。

また第5章では離散系に対するPainlevé性に相当する（と考えられている）概念であるSCとその判定であるSCテストを，筆者の専門外ではあるが，簡単に紹介した。そこで「果たしてSCテストに通ったからと言って，その離散（差分）方程式を「可積分」と考えてよいのか？」という根本的な疑問が湧いてきたであろう。ところが離散系において「可積分性」という概念が連続系以上に確立されていない現状ではこの疑問に対して解答をしようがない[68]。つまりSCの厳密な意味での妥当性や数学的根拠は現在のところ全く分かっていない。

ところで1990年，高橋らは「究極の離散系」であるセル・オートマトン系を考察し，ソリトンだけからなる**ソリトン・セル・オートマトン**を提唱した [50]。この系は長年謎めいたものであったが，最近時弘とその共同研究者達により**超離散化**と呼ばれる一種の非解析的極限によって既知の離散（差分）ソリトン方程式からソリトン・セル・オートマトンが組織的に構成されることが分かってきた [51]。得られる超離散方程式は＋と max 代数だけからなる代数系（max-plus 代数と呼ばれる）の上の方程式であり，離散数学と可積分系を結びつけると期待され，更に工学の応用にも注目されている。また「超離散化」は「可積分性」とは独立の手続きであるため，非可積分系，特にカオス的な振る舞いを示す系に対する手法として注目されており，更なる発展が期待されている[69]。しかしこの超離散の世界でのPainlevé性に相当する概念については筆者の知る限り知られていない（現時点では候補すらない）。

筆者の研究は低次元から高次元に拡張される際の**世襲される性質**と**消滅する性質**，及び**新しく生まれる性質**を一貫して探求している[70]。ここから，系が高次元に拡張される際に可積分性が保持されるための条件が決定されると確信している。加えて非可換空間の場合，超対称性をもつ場合や離散系も含めて高次元可積分方程式の数理構造に対する新しい知見が得られることを期待している。現在までに数理工学や数理科学の多くの局面に「可積分系の数理構造」があるだけでなく，可積分系の方法論の有効性が広く認識されるようになってきた。今後はさらに徹底してこの独自性の高い研究テーマを推進したい。

謝辞

第4章においては平成13年度笹川科学研究助成（日本科学財団）の補助により進められた筆者の研究による結果を紹介している。それらは慶應義塾大学在職中に得られたものである。普段自由に研究する環境を提供して下さった表實先生をはじめ日吉物理学教室の諸先生に感謝します。

---

[68] SCテストには通るがカオス的な挙動を示すようなある種の常差分方程式，すなわち「SCテストには通れば可積分である」という主張に対する唯一の反例が知られている [49]。

[69] 最近では可解格子模型との関係も見えてきている [52]。超離散に関する研究成果や情報はその発見者の一人である高橋氏のホームページ：http://www.math.waseda.ac.jp/daisuke/public/papers.html で見ることができる。

[70] たまに脇道にそれることもあるが……

最後に原稿提出の遅れを我慢強く待ってくださった紀要編集委員の先生方に心からのお詫びと御礼を申し上げます。

References

[1] この定理についての文献はいろいろある。ここでは可積分系について詳しく論述しているものを紹介しておく：大貫義郎・吉田春夫,「力学」(岩波講座現代の物理学1), 岩波書店, 1994。

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).

[3] P. D. Lax, *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, 467 (1968).

[4] M. Blaszak,「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, Springer-Verlag, 1998.

[5] 広田良吾,「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店, 1992。

[6] これらの定義についての文献もいろいろある. 代表的なものを挙げておく：

- V. E. Zakharov (編),「What Is Integrability?」, Springer-Verlag, 1990,
- 和達三樹,「非線形波動」(岩波講座現代の物理学14), 岩波書店, 1992。

[7] 岡本和夫,「パンルヴェ方程式序説」(上智大学数学講究録 NO. 19), 上智大学数学教室, 1985。

[8] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson,「Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering」, Cambridge University Press, 1991.

[9] 川原琢治,「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店, 1993。

[10] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas,「*Complex Variables Introduction and Applications*」(Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press, 1997.

[11] R. Conte (編),「*The Painlevé Property One Century Later*」, Springer-Verlag, 2000.

[12] E. L. Ince,「*Ordinary differential equations*」, Dover Publications, 1956.

[13] E. Hille,「*Ordinary Differential Equations in Complex Plane*」, Wiley-Interscience, 1976.

[14] 戸田盛和,「波動と非線形問題の30講」(物理学30講シリーズ3), 朝倉書店, 1995。

[15] A. A. Kapaev and E. Hubert, *J. Phys.* A **32**, 8145 (1999).

[16] A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis, *Phys. Rep.* **180**, 159 (1989).

[17] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur, *J. Maths. Phys.* **21**, 715 (1980).

[18] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse,「*Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory*」Oxford Science Publications, 1996.

[19] Ward予想はまだ証明されてはいないし, その一方反例もない。筆者は博士課程後期課程のピカピカの一年生の時にDurham大学(英国)に一週間ほど滞在する機会があった。

その際 Ward 本人に会いこの予想の話をした。その際に筆者が以下にある Ward 予想の論文を読んでから可積分に関する研究を始めたといったら,「それほど深い考察をして主張したわけではない……」と言われてしまった……：

● R. S. Ward「*Pkil.rans. R. Soc. London A*, 315, 451-457, 1985,

●「*Proceeding, Meudon and Paris VI*」(Lect. Notes Phys., 280, Springer-Verlag, 1986) 中収録の R. S. Ward 論文。

[20] J. Weiss, J. Math. Phys. 24, 1405 (1983).

[21] J. Weiss, M. J. Tabor and G. Carnevale, *J. Maths. Phys.* **24**, 522 (1983).

[22] M. D. Kruskal, N. Joshi and R. Halbrud, solv-int/9710023.

[23] B. Grammaticos, A. Ramani and J. Hietarinta, *J. Maths. Phys.* **31**, 2572 (1990).

[24] J. Hietarinta, B. Grammaticos and A. Ramani, solv-int/9411003.

[25] J. D. Gibbon, P. Radmore, M. Tabor and D. Wood *Studi. Appl. Math.* **72**, 39 (1985).

[26] M. Jimbo, M. D. Kruskal and T. Miwa, *Phys. Lett.* A **92**, 59 (1982).

[27] F. Calogero, *Lett. Nuovo Cimento* **14**, 4453 (1979).

[28] O. I. Bogoyavlenskii, *Maths. USSR. Izv.* **34**, 245 (1990).

[29]「*Painlevé Transendents, Their Asymtopics and Physical Applications*」(Plenum, 1992) 中収録の J. Schiff の論文。

[30] S.-J. Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 3337 (1998).

[31] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *J. Phys.* A **31**, 10181 (1998).

[32] S.-J. Yu, K. Toda and T. Fukuyama, *Reps. Maths. Phys.* **44**, 241 (1999).

[33] K. Toda and S.-J. Yu, *J. Maths. Phys.* **41**, 4747 (2000).

[34] K. Toda, 論文投稿中。

[35] 渡辺慎介,「ソリトン物理入門」, 培風館, 1985。

[36] M. Hamanaka and K. Toda, 論文準備中。

[37] Y. A. Manin and A. O. Radul, *Commun. Math. Phys.* **98**, 65 (1985).

[38] B. A. Kupershmidt, *Phys. Lett.* A **213**, 102 (1984).

[39] K. Toda, *J. Nonlinear Maths. Phys.* **9**, 206 (2002).

[40] 離散可積分系については現在活発に研究されている。その成果を紹介している本としては以下が挙げられる：

●広田良吾,「差分学入門—情報化時代の微積分学—」(情報数理シリーズ A—2), 培風館, 1998,

●中村佳正 (編),「可積分系の応用数理」, 裳華房, 2000,

●広田良吾,「差分方程式講義」(SGC ライブラリー8), サイエンス社, 2001。

[41] 野海正俊,「パンルヴェ方程式」(すうがくの風景 4), 朝倉書店, 2000。

[42] G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson, *Physica* D **34**, 183 (1989).

[43] B. Grammaticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **67**,

1825 (1991).

[44] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma, *J. Phys.* A **28**, 4655 (1995).

[45] K. Maruno, K. Kajiwara, S. Nakao and M. Oikawa, *Phys. Lett.* A **229**, 173 (1997).

[46] M. C. Nucci, *J. Maths. Phys.* **22**, 2897 (1989).

[47] S. Lou, *J. Phys.* A **30**, 4803 (1997).

[48] S. Lou, *J. Maths. Phys.* **39**, 2112 (1998).

[49] J. Hietarinta and C. Viallet, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 325 (1998).

[50] D. Takahashi and J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 3514 (1990).

[51] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247 (1996).

[52] 時弘哲治，「ソリトンと超離散—箱と玉の系と無限次元可積分系—」数理科学，**435**，18，(1999)。