第 13 講

平衡統計力学 (エルゴード仮説と等確率の原理)

我々の観点で分類するならば、

- 実在的世界観 (物理学) $\cdots$ ニュートン力学、電磁気学、相対論 $\cdots$
  言語的世界観 (量子言語；工学) $\cdots$ 統計力学、量子力学、経済学 $\cdots$

となる．

この章では、平衡統計力学における基本的な次の 3 つの問題について考える：

(A) 平衡統計力学において、等確率の原理は不可欠か？

(B) 平衡統計力学とエルゴード仮説は関係があるか？

(C) 平衡統計力学において、「確率概念」はどこでいつ生じるか？

平衡統計力学の定式化にはいろいろな意見があって、この意味では、上記の問題 (A)-(C) は未解決とも言える．ここでは測定理論 (=測定 + 因果関係) の立場から、これらの問題を議論する．すなわち、

運動的観点 (i.e, 因果関係の観点) $\cdots$ 13.1 節
確率的観点 (i.e., 測定の観点) $\cdots$ 13.2 節

を議論する．結論としては、

(A) は “No”, しかし, (B) は “Yes”

である．また、(C) は 13.2 節で明らかにする．もちろん、量子言語で、確率に関わる部分は言語ルール 1 だけなのだから、確率の出所は言語ルール 1 に帰着する．

この章は、次の論文の抜粋である．

[35] S. Ishikawa, “Ergodic Hypothesis and Equilibrium Statistical Mechanics in the Quantum Mechanical World View,” *World Journal of Mechanics*, Vol. 2, No. 2, 2012, pp. 125-130. doi: 10.4236/wim.2012.22014.

13.1 平衡統計力学と言語ルール 2(因果関係)

13.1.1 平衡統計力学的現象

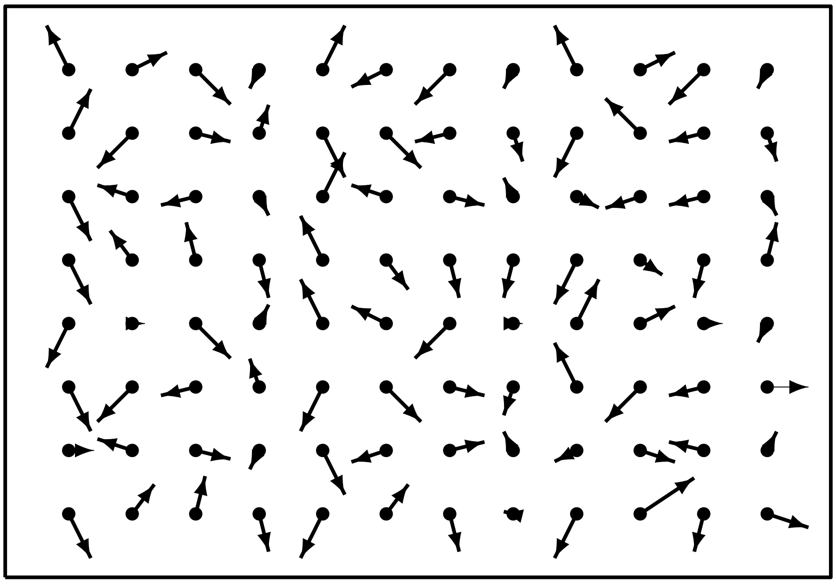
仮定 13.1. [平衡統計力学的現象]. ある箱 (たとえば，一辺が約 30cm の立方体) の中に，約 $N(\fallingdotseq 10^{24})$ 個の同一粒子 (たとえば，水素分子) が入っていて，各粒子が乱雑に運動している．このとき，次の現象① – ④ を観察したとする．

① 粒子たちの運動はニュートンの運動方程式に従う．

② どの粒子もいろいろな場所を動いて，満遍なく運動する．たとえば，ある粒子が，いつも箱の端っこに居続けるようなことはない．

③ どの粒子も時間的な統計的挙動は同じである．

④ 任意のいくつかの粒子たちの時間的な統計的挙動は独立，すなわち，ある粒子と別の粒子の動きは連動しない．



(13.1)

♠ **注釈 13.1.** ② – ④ を簡単な「喩え話」で説明しよう．100 人の幼稚園児が幼稚園の庭で，1 時間の昼休みに，ブランコ，滑り台，砂遊びをするとしよう．ただし，ブランコ，滑り台，砂場はどれも十分あって順番待ちの時間はないとする．このとき，② – ④ は次のような「喩え話」になる．

② どの園児も，飽きっぽくて，次々と遊びを変える．たとえば，ある園児は，

$$(\sharp)\quad \underset{(5\text{ 分})}{\boxed{\text{ブ}}} \to \underset{(3\text{ 分})}{\boxed{\text{滑}}} \to \underset{(6\text{ 分})}{\boxed{\text{砂}}} \to \underset{(7\text{ 分})}{\boxed{\text{滑}}} \to \underset{(9\text{ 分})}{\boxed{\text{ブ}}} \to \underset{(8\text{ 分})}{\boxed{\text{滑}}} \to \underset{(9\text{ 分})}{\boxed{\text{ブ}}} \to \underset{(6\text{ 分})}{\boxed{\text{砂}}} \to \underset{(7\text{ 分})}{\boxed{\text{ブ}}}$$

のように遊ぶ．すなわち，昼休み中ブランコだけで遊んでいる園児はいない．

③ どの園児も同じ嗜好性を持っている．したがって，3 つのそれぞれの遊びの合計時間は，どの園児も同じである．たとえば，どの園児も

$$\begin{cases} \text{ブランコで遊んだ時間の合計} & 30\text{ 分} \\ \text{滑り台で遊んだ時間の合計} & 18\text{ 分} \\ \text{砂場で遊んだ時間の合計} & 12\text{ 分} \end{cases}$$

である．

④ どの園児も，「ほぼ独立自尊」の精神で遊んでいる．すなわち，他の園児の遊びに影響されることはほとんどない．たとえば，仲良し同士で，ブランコをして，次に滑り台というようにグループ行動しない．

この②–④ をイメージして以下を読めばよい．

本章では、以下の問題に集中する．

(D) 上の「平衡統計学的現象① – ④」を量子言語で記述せよ！

13.1.2 仮定 13.1 の①について

ニュートン力学では，一粒子の状態は，(x 軸方向の位置, y 軸方向の位置, z 軸方向の位置, x 軸方向の運動量, y 軸方向の運動量, z 軸方向の運動量) $= (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^6$ で表される．したがって，箱の中に，約 $N(\fallingdotseq 10^{24})$ 個の粒子が入っていると仮定したのだから，箱の中の粒子たちの状態は，$6N$ 次元空間 $\mathbb{R}^{6N}$ 内の点 (q,p) $\big(=$(位置, 運動量) $= (q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^N\big)$ で表現される．

エネルギー関数 (ハミルトニアン) $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}$ = [全運動エネルギー] + [全相互ポテンシャル

エネルギー U]，すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}\big((q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^N\big) \\
= & \quad [\sum_{n=1}^N \sum_{k=1,2,3} \frac{(p_{kn})^2}{2 \times \text{粒子の質量}}] + U((q_{1n}, q_{2n}, q_{3n})_{n=1}^N)
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

とする．

全エネルギーを $E > 0$ として，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の等エネルギー面 Ω_E を，Ω_E $(= \{(q,p) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \mathcal{H}(q,p) = E\})$ で定めて[*1]，これを状態空間とする．

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の下におけるニュートンの運動方程式，すなわち，ハミルトンの正準方程式：

$$
\frac{dp_{kn}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{kn}}, \quad \frac{dq_{kn}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{kn}}, \qquad (k = 1,2,3, \ \ n = 1,2,\ldots,N) \tag{13.3}
$$

が生成する決定因果写像列を $\phi^E_{t_1,t_2} : \Omega_E \to \Omega_E$ $(-\infty < t_1 \leqq t_2 < \infty)$ とする．すなわち，$\phi^E_{t_1,t_2}(q(t_1), p(t_1)) = (q(t_2), p(t_2))$ とする[*2]．ハミルトニアン $\mathcal{H}(q,p)$ は時変数を持たない (すなわち，$\mathcal{H}(q,p,t)$ という形ではない)．したがって，定常性があって，$\psi^E_{t_2-t_1} = \phi^E_{t_1,t_2}$ と置いて考えた方が簡単になるので，以下の議論では，$\psi^E_{t_2-t_1}$ を使う．

等エネルギー面 Ω_E 上の測度 ν_E を次のように定める：

$$
\nu_E(B) = \int_B |\nabla \mathcal{H}(q,p)|^{-1} dm_{6N-1} \quad (\forall B \in \mathcal{B}_{\Omega_E} : \text{ボレル集合体}^{*3})
$$

ここに，$|\nabla \mathcal{H}(q,p)| = [\sum_{n=1}^N \sum_{k=1,2,3} \{(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{kn}})^2 + (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{kn}})^2\}]^{1/2}$，また，$dm_{6N-1}$ は $\mathbb{R}^{6N-1}$ 内の通常の測度 (ルベーグ測度) とする．このとき，リューヴィルの定理 (*cf.* [58]) より，

$$
\nu_E(S) = \nu_E(\psi^E_t(S)) \qquad (0 \leqq \forall t < \infty, \quad \forall S \in \mathcal{B}_{\Omega_E})
$$

が成立する．

正規測度 (=確率測度) $\overline{\nu}_E$ を $\overline{\nu}_E = \frac{\nu_E}{\nu_E(\Omega_E)}$ と定義して、正規測度空間 (=確率測度空間) $(\Omega_E, \mathcal{B}_{\Omega_E}, \overline{\nu}_E)$ を得る．

(Ω_E のコンパクト性から) $\mathcal{A} = C_0(\Omega_E) = C(\Omega_E)$ とおいて、次の基本構造を得る：

$$
[C(\Omega_E) \subseteq L^\infty(\Omega_E, \nu_E) \subseteq B(L^2(\Omega_E, \nu_E))]
$$

ここで、$T = \mathbb{R}$ として、(13.1) 式を解いて、$\omega_t = (q(t), p(t))$, $\phi_{t_1.t_2} = \psi^E_{t_2-t_1}$, $\Phi^*_{t_1.t_2}\delta_{\omega_{t_1}} = \delta_{\phi_{t_1.t_2}(\omega_{t_1})}$ $(\forall \omega_{t_1} \in \Omega_E)$ を得る．さらに、決定因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_E) \to L^\infty(\Omega_E)\}_{(t_1.t_2) \in T^2_{\leqq}}$ を得る (*cf.* 定義 8.4)．

[*1] 当然，Ω_E はコンパクト集合となる．

[*2] 本章では，決定因果写像列 $\{\phi^E_{t_1,t_2} : \Omega_E \to \Omega_E\}_{-\infty < t_1 \leqq t_2 < \infty}$ を多用するが，ハイゼンベルグ描像の決定因果作用素列 $\{\Phi^E_{t_1,t_2} : C(\Omega_E) \to C(\Omega_E)\}_{-\infty < t_1 \leqq t_2 < \infty}$ でも同値の議論ができることは言うまでもない．

[*3] ボレル集合体: すべての開集合を含む最小の σ-集合体

目次; 他

13.1.3 仮定 13.1 の②について

箱の中の N 個の粒子のうちの一つの粒子 a_1 を考えて，$S_{a_1} = \{\omega \in \Omega_{\scriptscriptstyle E} \mid \omega$ は粒子 a_1 が箱の端っこにいる状態 $\}$ としよう．当然，$S_{a_1} \subsetneq \Omega_E$ となる．また，もし $\psi_t^E(S_{a_1}) \subseteq S_{a_1}$ $(0 \leqq \forall t < \infty)$ とすると，粒子 a_1 がいつも端っこに居続けることになって，② に反する．したがって，② は次を意味すると考える:

②' [エルゴード性]: コンパクト集合 $S(\subseteq \Omega_{\scriptscriptstyle E}, S \neq \emptyset)$ が，$\psi_t^E(S) \subseteq S$ $(0 \leqq \forall t < \infty)$ を満たすならば，$S = \Omega_{\scriptscriptstyle E}$ が成り立つ．

である．

このとき，エルゴード定理 (*cf.* [77]) から，$\nu_{\scriptscriptstyle E}$ を正規化して (すなわち，$\overline{\nu}_{\scriptscriptstyle E} = \frac{\nu_E}{\nu_{\scriptscriptstyle E}(\Omega_E)}$ とおいて)，次が言える：

$$\underset{((\text{状態})\ \text{空間平均})}{\int_\Omega f(\omega)\overline{\nu}_{\scriptscriptstyle E}(d\omega)} = \lim_{T\to\infty} \underset{(\text{時間平均})}{\frac{1}{T}\int_0^T f(\psi_t^E(\omega_0))dt} \quad (\forall f \in C(\Omega_{\scriptscriptstyle E}), \quad \forall \omega_0 \in \Omega_{\scriptscriptstyle E}) \tag{13.4}$$

以後，T は十分大きいとして，

$$\int_\Omega f(\omega)\overline{\nu}_{\scriptscriptstyle E}(d\omega) \fallingdotseq \frac{1}{T}\int_0^T f(\psi_t^E(\omega_0))dt \tag{13.5}$$

とする．

$m_{\scriptscriptstyle T}(dt) = \frac{dt}{T}$ とおいて，上の意味で，確率空間 $([0,T], \mathcal{B}_{[0,T]}, m_T)$ を (正規) **第 1 滞在時間空間**，確率空間 $(\Omega_{\scriptscriptstyle E}, \mathcal{B}_{\Omega_{\scriptscriptstyle E}}, \overline{\nu}_{\scriptscriptstyle E})$ を，(正規) **第 2 滞在時間空間**と呼ぶ*4.

13.1.4 仮定 13.1 の③と④ について

$D_N = \{1, 2, \ldots, N(\fallingdotseq 10^{24})\}$ とする．各 k $(\in D_N)$ に対して，写像 $X_k : \Omega_{\scriptscriptstyle E}(\subset \mathbb{R}^{6N}) \to \mathbb{R}^6$ を次のように定める：

$$\begin{aligned} X_k(\omega) = X_k(q,p) = X_k&((q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^N) \\ &= (q_{1k}, q_{2k}, q_{3k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}) \\ (\ \forall \omega = (q,p) = (q_{1n},\ q_{2n},\ &q_{3n},\ p_{1n},\ p_{2n}, p_{3n})_{n=1}^N \in \Omega_{\scriptscriptstyle E}(\subset \mathbb{R}^{6N})\ ) \end{aligned} \tag{13.6}$$

また，任意の部分集合 D $(\subseteq D_N{=}\{1, 2, \ldots, N(\fallingdotseq 10^{24})\})$ に対して，写像 $R_D^{(\cdot)} : \Omega_{\scriptscriptstyle E}(\subset \mathbb{R}^{6N}) \to \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6)$

*4 「確率空間」は数学用語で，全体の測度が 1 の測度空間のことであって (ここでは，$m_T([0,T]) = \overline{\nu}_{\scriptscriptstyle E}(\Omega_{\scriptscriptstyle E}) = 1$)，「確率概念」と関係する必要はない．ここでも，「(正規) 滞在時間」は，ニュートン力学からの帰結であって，「確率概念」とは関係しない．測定理論の精神「測定なくして，確率なし (言語的コペンハーゲン解釈 (*cf.* 3.1 節)) 」を思い出して欲しい.」

を，点測度 $\delta_{(\cdot)}$ $(\in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6))$ を用いて，次のように定める：

$$R_D^{(q,p)} = \frac{1}{\sharp[D]} \sum_{k \in D} \delta_{X_k(q,p)} \qquad (\forall (q,p) \in \Omega_E (\subset \mathbb{R}^{6N}))$$

ここに，$\sharp[D]$ は集合 D の要素の個数とする．

状態 $\omega_0 (\in \Omega_E)$ を任意に固定する．各 n $(\in D_N)$ に対して，関数 $Y_n^{\omega_0} : [0,T] \to \mathbb{R}^6$ を

$$Y_n^{\omega_0}(t) = X_n(\psi_t^E(\omega_0)) \qquad (\forall t \in [0,T]) \tag{13.7}$$

で定義して，$\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ を確率空間 $([0,T], \mathcal{B}_{[0,T]}, m_T)$ 上の確率変数列 (すなわち，関数列) と見る．③と④ はそれぞれ次を意味すると考える．

③ $\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ は「だいたい」同一分布をもつ．すなわち，次を満たすような $\rho_E \in \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6)$ が存在する：

$$m_T(\{t \in [0,T] \ : \ Y_n^{\omega_0}(t) \in \Xi\}) \doteqdot \rho_E(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, n = 1,2,\ldots,N) \tag{13.8}$$

④ $\{Y_n^{\omega_0}\}_{n=1}^N$ は，「だいたい」独立，すなわち，$1 \leqq \sharp[D_0] \ll N$（つまり，$\frac{\sharp[D_0]}{N} \doteqdot 0$）を満たす任意の $D_0 \subset \{1,2,\ldots,N (\doteqdot 10^{24})\}$ に対して

$$\begin{aligned} & m_T(\{t \in [0,T] \ : \ Y_k^{\omega_0}(t) \in \Xi_k (\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\}) \\ \doteqdot & \bigtimes_{k \in D_0} m_T(\{t \in [0,T] \ : \ Y_k^{\omega_0}(t) \in \Xi_k (\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6})\}) \end{aligned}$$

とする．

よって、$1 \ll \sharp[D_0] \ll N$ (すなわち，$\frac{1}{\sharp[D_0]} \doteqdot 0 \doteqdot \frac{\sharp[D_0]}{N}$）として，ほとんどの時刻 t $(\in [0,T])$ で

$$\frac{1}{\sharp[D_0]} \sum_{k \in D_0} \delta_{Y_k^{\omega_0}(t)} \doteqdot \rho_E \qquad (\forall \omega_0 \in \Omega_E, (\text{③と④より}))$$

を得る．

注意 13.2. **[区間 $[0,T]$ の評価]**. 典型的な例として、辺の長さが 0.3m の立方体内の 10^{24} 個の粒子の運動で、粒子の平均速度$=5 \times 10^2$m/秒, 平均自由行程$=10^{-7}$m と思って，$T =$ 数秒，$\sharp[D_0] \doteqdot 10^{10} \ll 10^{24}$ ぐらいとすれば，$\sharp[D_0]$ 個の粒子同士は滅多に衝突しないので，「だいたい」独立である．したがって，(13.4) 式の T を宇宙の年齢ぐらい長い時間—永劫回帰時間—と思う必要は決してない (*cf.* [35]). ///

さて、「定義関数$\chi \notin C(\Omega_E)$」であるが，(13.4) 式の中で f を χ と置き換えても良いので

$$\begin{aligned} & m_T(\{t \in [0,T] \ : \ Y_k^{\omega_0}(t) \in \Xi_k (\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\}) \\ = & m_T(\{t \in [0,T] \ : \ X_k(\psi_t^E(\omega_0)) \in \Xi_k (\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}), k \in D_0\}) \\ = & m_T(\{t \in [0,T] \ : \ \psi_t^E(\omega_0) \in ((X_k)_{k \in D_0})^{-1}(\bigtimes_{k \in D_0} \Xi_k)\}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{T}\int_0^T \chi_{((X_k)_{k\in D_0})^{-1}(\times_{k\in D_0}\Xi_k)}(\psi_t^E(\omega_0))dt \\
&\doteqdot \int_{\Omega_E} \chi_{((X_k)_{k\in D_0})^{-1}(\times_{k\in D_0}\Xi_k)}(\omega)\overline{\nu}_E(d\omega) \\
&=\overline{\nu}_E\big(((X_k)_{k\in D_0})^{-1}(\bigtimes_{k\in D_0}\Xi_k)\big)
\end{aligned}
\tag{13.9}
$$

特に，$D_0=\{k\}$ として，

$$
m_T(\{t\in[0,T]\ :\ Y_k^{\omega_0}(t)\in\Xi\})\doteqdot(\overline{\nu}_E\circ X_k^{-1})(\Xi) \qquad (\forall\Xi\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}) \tag{13.10}
$$

が成立する．

以上の準備の下で，日常言語の文言③と④を，$\{X_n\}_{n=1}^N$ の言葉で書くと以下のようになる．

仮定 13.3. [= **仮定 13.1 の③ と④**] $D_N=\{1,2,\ldots,N(\doteqdot 10^{24})\}$ とする．$\mathcal{H}$, E, ν_E, $\overline{\nu}_E$, $X_k:\Omega_E\to\mathbb{R}^6$ は上述の通りとする．このとき，③と④ は次を意味する．

(b) $\{X_k:\Omega_E\to\mathbb{R}^6\}_{k=1}^N$ は，次の (♯) の近似的な意味で，同一分布をもつ独立な確率変数列である．すなわち，

(♯) 次を満たす ρ_E $(\in\mathcal{M}_{+1}(\mathbb{R}^6))$ が存在する．

$$
\bigotimes_{k\in D_0}\rho_E(=\text{“直積測度”})\doteqdot\overline{\nu}_E\circ((X_k)_{k\in D_0})^{-1} \tag{13.11}
$$

$(\forall D_0\subset\{1,2,\ldots,N(\doteqdot 10^{24})\}$，しかも，$1\leqq\sharp[D_0]\ll N$とする$)$.

また，状態 $(q,p)(\in\Omega_E)$ は，$R_{D_N}^{(q,p)}\doteqdot\rho_E$ を満たすとき，**平衡状態** (equilibrium state) と呼ばれる．

13.1.5 エルゴード仮説

ここで，次の定理を得る[*5]:

定理 13.4. [**エルゴード仮説** (ergodic hypothesis)] ほとんどの時刻 t で，

$$
R_{D_N}^{(q(t),p(t))}\doteqdot\overline{\nu}_E\circ X_k^{-1}\ (\doteqdot\rho_E\ ) \quad (k=1,2,\ldots,N(\doteqdot 10^{24})) \tag{13.12}
$$

が成立する．すなわち，$0\leqq\ m_T(\{t\in[0,T]:(13.12)$ が成立しない $\})\ll 1$，つまり，「平衡状態でないような時間帯」は無視できる．

---

*5 通常の定式化では，等確率の原理から始めるので，「エルゴード」という言葉は，「等確率の原理」や「(13.4) 式」の意味やいろいろな意味で使われている．しかし，本講では，「エルゴード仮説」をこの定理および系 13.5 の意味と解釈する．また，条件② の「エルゴード性」を「エルゴード仮説」と呼ぶこともあるが，本書では区別する．

目次; 他

証明　$1 \ll N_0(\doteqdot \sharp[D_0]) \ll N(\doteqdot 10^{24})$，$k \in \{1, 2, \ldots, N(\doteqdot 10^{24}\}$ とする．仮定 13.3 から，大数の法則 (4.2 節) より，次が成り立つ:

$$R_{D_0}^{(q(t),p(t))} \doteqdot \overline{\nu}_E \circ X_k^{-1} \;(\doteqdot \rho_E) \qquad (\text{ほとんどの時刻 } t \text{ で}) \tag{13.13}$$

D_N の分割 $\{D_{(1)}, D_{(2)}, \ldots, D_{(L)}\}$ を考える (すなわち，$D_N = \bigcup_{l=1}^{L} D_{(l)}$，$D_{(l)} \cap D_{(l')} = \emptyset \;\; (l \neq l')$)．ここに，$\sharp[D_{(l)}] \doteqdot N_0$ $(l = 1, 2, \ldots, L)$ とする．(13.13) より，各 k $(= 1, 2, \ldots, N$ $(\doteqdot 10^{24}))$ に対して，

$$R_{D_N}^{(q(t),p(t))} = \frac{\sum_{l=1}^{L} [\sharp[D_{(l)}] \times R_{D_{(l)}}^{(q(t),p(t))}]}{N} \doteqdot \frac{\sum_{l=1}^{L} [\sharp[D_{(l)}] \times \rho_E]}{N} \doteqdot \overline{\nu}_E \circ X_k^{-1} \;(\doteqdot \rho_E) \tag{13.14}$$

が，ほとんどすべての時刻 t で，成り立つことがわかる．　$\square$

この定理は次のことを主張している：

系 13.5. [エルゴード仮説]

ほとんどすべての時刻 t での $N(\doteqdot 10^{24})$ 個のすべての粒子の
(位置，運動量) の分布
$=$ 任意の一つの粒子の *(位置，運動量)* の時間的挙動の意味での分布

注意 13.6.　状態 $(q, p)(\in \Omega_E)$ のエントロピーを $H(q, p) = C \log[\nu_E(\{(q', p') \in \Omega_E \mid R_{D_N}^{(q,p)} \doteqdot R_{D_N}^{(q',p')})\})]$ と定める．ここに，

$$C = [\text{ボルツマン定数}] \times ([\text{プランク定数}]^{3N} N!)^{-1}).$$

とする．Ω_E 内のほとんどの状態が平衡状態なので，どんな初期状態 (q, p) からスタートしても，直ちに平衡状態に落ち着いて，そのエントロピーは，最大値の $C \log \nu_E(\Omega_E)$ になる．したがって，エントロピー増大則を，「目的因 (8.1.1 節)」とは見なさない．

13.2 平衡統計力学と言語ルール 1(測定)

前節 (13.1 節) の議論では，「確率概念」に関わらなかったことに注意せよ．ここからは，平衡統計力学の確率的側面について考えよう．もちろん，本章の冒頭の「要旨」の問題 ($\sharp_2$) で述べたこと，すなわち，

(a) 平衡統計力学がニュートン力学から導出されるべきものだとして，「確率概念」を持たないニュートン力学から，なぜ「確率概念」が生じたのだろうか？

が我々の興味であるが，測定理論 (=量子言語) は「確率概念」—言語ルール 1(測定;2.7 節) —を持っているので，この (a) は意外と簡単に解答できる．

箱の中の $N(\fallingdotseq 10^{24})$ 個の水素分子の (位置，運動量) の比を考えることも，壷問題 (壷の中の球の「白・黒の比」) を考えることも同じと考える．すなわち，前節の結論は，

(b) 箱の中で，$N(\fallingdotseq 10^{24})$ 個の粒子が運動しているとき，ほとんどすべての時刻 t で，「(位置, 運動量) $\in \Xi(\in \mathbb{R}^6)$」であるような粒子の個数は，$\rho_{{}_E}(\Xi) \times N$ である．

であった．

ここで，$C(\Omega_E)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F)$ を次のように定める:

$$
[F(\Xi)](q,p) = [R_{D_N}^{(q,p)}](\Xi)\Big(=\frac{\sharp[\{k \mid X_k(q,p) \in \Xi\}]}{\sharp[D_N]}\Big) \qquad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, \forall (q,p) \in \Omega_{{}_E}(\subset \mathbb{R}^{6N})) \tag{13.15}
$$

ここに，$\sharp[D_N]$ $(= N \fallingdotseq 10^{24})$ は非常に大きいので，$F(\Xi) \in C(\Omega_E)$ と考えてよい．よって，時刻 t における測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}{=}(\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F), S_{[(q(t),p(t))]})$ を得る．すなわち、

(c) N 個の粒子の中から，1 つの粒子を選んで，その (位置, 運動量) を測定すること

である．言語ルール 1(測定 (2.7 節)) により，ほとんどすべての時刻 t で，

(d) 測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}{=}(\mathbb{R}^6, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6}, F), S_{[(q(t),p(t))]})$ により得られる測定値が $\Xi(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^6})$ に属する確率は $\rho_{{}_E}(\Xi)$ で与えられる．

となる．よって、

- 平衡統計力学における確率の出所は、上の (d) である

また，決定因果写像 $\psi_t^E : \Omega_E \to \Omega_E$ によって定まる決定因果作用素を $\Psi_t^E : C(\Omega_{{}_E}) \to C(\Omega_{{}_E})$ とすれば，明らかに $\Psi_t^E \mathsf{O} = \mathsf{O}$ が成り立つ．したがって，時刻 $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n$ における測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}, S_{[(q(t_k),p(t_k))]})$ たちを考えるとしても， 同時測定 $\mathsf{M}_{C(\Omega_E)}(\mathsf{O}^n, S_{[(q(0),p(0))]})$ を考えればよい．

♠ **注釈 13.2.** 本章の議論では，量子言語という言語体系 (「言葉が先，世界が後」) を初めに決めておいて，それで，13.1 節の①–④という事実 (＝世界) を記述して，「平衡統計力学」という形而下学を構築した．したがって，平衡統計力学は，言語的記述法によって構築された諸科学の一つとなる．

つまり、

$$\bullet \begin{cases} \text{実在的世界観} \atop \text{(物理学)} & \cdots \text{ニュートン力学、電磁気学、相対論} \cdots \\[2ex] \text{言語的世界観} \atop \text{(量子言語；コペンハーゲン解釈)} & \cdots \text{(平衡) 統計力学、量子力学、経済学} \cdots \end{cases}$$

となる.

注意 13.7. [等重率 (統計力学)]. 上の (c) は

($\sharp_1$) N 個の粒子たちから一つの粒子を選ぶ

であって、

($\sharp_2$) 状態空間 Ω_E から一つの状態を選ぶ

ではない. ($\sharp_2$) は等重率と呼ばれるが、本章の「平衡統計力学の量子言語による定式化」ではこれに関係しない.