第 11 講

フィッシャー統計学 II

測定理論は次のように定式化された．

$$\bullet \quad \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}$$

第 6 章ではフィッシャー統計学を言語ルール 1 (測定;2.7 節) の中で考察した．本章では，フィッシャー統計学 (特に，回帰分析) を測定理論 (言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節)) の枠組みで記述する．

本章では、「考え方」に重点を置いて説明する．したがって、次を述べておかなければならない．

- 量子言語の奥義は「ツベコベ言わずに、黙って計算すること」であるにもかかわらず、統計学の量子言語的定式化 (信頼区間、仮説検定、分散分析、回帰分析、一般線形モデル、カルマン・フィルター、心理統計) についてはテクニカル過ぎるとして省いてしまった．次の文献 [49] を参照して腕を磨いてもらいたい．

  S. Ishikawa, *Linguistic interpretation of quantum mechanics: Quantum language* Version 3, Research Report (Department of mathematics, Keio university), KSTS-RR-17/007, 2017, 431 pages (`http://www.math.keio.ac.jp/academic/research_pdf/report/2017/17007.pdf`)

11.1 表から見れば測定，裏から見れば推定・制御

本書では，「統計学＝動的システム理論」—微分方程式と確率論という数学の応用的手法という意味では同じもの—と考えるが，「推定問題」は統計学，「制御問題」は動的システム理論と仕切りがされていると考えるのが，普通かもしれない．しかし，この 2 つは同類の問題である．以下にこのことを説明して，「統計学＝動的システム理論」を再確認する．

11.1.1 推定問題 (統計学)

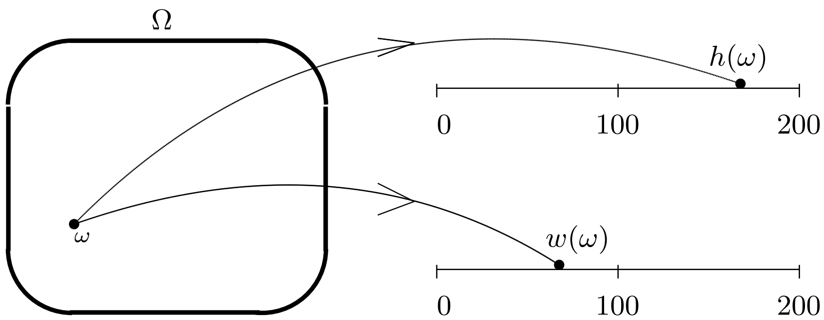
問題 11.1. [推定問題と回帰分析]　$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ をある高校の学生の集合とする．身長関数 $h : \Omega \to [100, 200]$ と体重関数 $w : \Omega \to [30, 110]$ を次のように定義する:

$$\begin{cases} h(\omega_n) = \text{“学生 } \omega_n \text{ の身長”} \\ w(\omega_n) = \text{“学生 } \omega_n \text{ の体重”} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, N) \tag{11.1}$$

簡単のため，$N = 5$ として，たとえば，表 13.1 を仮定する．

表 11.1　学生の身長と体重

身長・体重 ＼ 学生	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
身長 ($h(\omega)$)	150	160	165	170	175
体重 ($w(\omega)$)	65	55	75	60	65



次を仮定する:

(a_1) この高校では健康診断を実施しているので，校長は，表 11.1 のデータ―すべての学生の身長と体重―を正確に把握している．

更に，次の (a_2) を仮定する：

(a_2) ある日，この高校のある学生が川で溺れている少女を助けた．しかし，その学生は名前も名乗らずにその場を立ち去った．わかっていることは，

(i) その学生はこの高校に所属している．

(ii) その学生の身長と体重はそれぞれ約 165 cm と約 65 kg である．

ここで次の問題を考える：

(b) 上の情報 (a_1) と (a_2) から，校長はその学生が誰かを如何に推定するか？

この推定問題 (b) は回帰分析を使う典型的な例で，測定理論の言葉によって解答 11.5 で答える．

11.1.2 制御問題 (動的システム理論)

状態方程式 (一階連立微分方程式) に，測定方程式 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を加えて，以下のように，動的システム理論 (11.2) を考える．すなわち，

$$\boxed{\text{動的システム理論}} = \begin{cases} \text{(i)}: \frac{d\omega(t)}{dt} \underset{(\text{初期条件}\omega(0)=\alpha)}{=} v(\omega(t),t,e_1(t),\beta) & \cdots(\text{状態方程式}) \\ \\ \text{(ii)}: x(t)=g(\omega(t),t,e_2(t)) & \cdots(\text{測定方程式}) \end{cases} \tag{11.2}$$

とする．ここに，α,β はパラメータ，$e_1(t)$ はノイズ，$e_2(t)$ は測定誤差とする．

以下の例は，動的システム理論における制御問題の中で，最も簡単なものである．

問題 11.2. [制御問題と回帰分析]　図 11.1 のように直方体の水槽に水を入れることを考える．時刻 t での水面の高さを関数 $\omega(t)$ で表す．流入速度を β として，時刻 0 での初期水位を α とする．

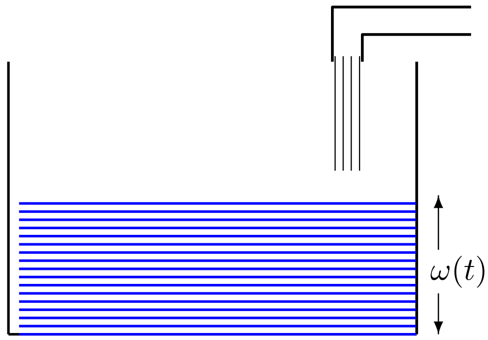


図 11.1　水槽に水を入れる

水位 $\omega(t)$ は次の状態方程式を満たす (ここで，ノイズ $e_1(t)=0$ とした).

$$\frac{d}{dt}\omega(t)=\beta\cdots(\text{状態方程式})$$

$\omega(0)=\alpha$ として，これを解けば，

$$\omega(t)=\alpha+\beta t \tag{11.3}$$

ここに，α と β は未知の固定されたパラメータと考える．実際の測定値は誤差を含むので，測定方程式は次のようになる：

$$x(t)=\alpha+\beta t+e_2(t)\cdots(\text{測定方程式})$$

ここに $e_2(t)$ は測定誤差である．次を仮定する：

$$x(1) = 1.9, \quad x(2) = 3.0, \quad x(3) = 4.7. \tag{11.4}$$

この (11.4) を、以下のように二つの解釈 (制御と推定) をする．

ここで次の制御問題を考える (答えは測定理論の言葉で解答 11.6 で述べる):

(c_1) **[制御問題]**: 時刻 $t = 1, 2, 3$ での水位の目標測定データとして，次の

$$x(1) = 1.9, \quad x(2) = 3.0, \quad x(3) = 4.7$$

を考えたい．この目標測定データを得られるように α と β を設定せよ．

である．

別の見方も重要で，この (c_1) は次の推定問題 (c_2) と同値である．

(c_2) **[推定問題]**: 時刻 $t = 1, 2, 3$ での水位の測定データが

$$x(1) = 1.9, \quad x(2) = 3.0, \quad x(3) = 4.7$$

が得られたとする．このとき，α と β を推定せよ．

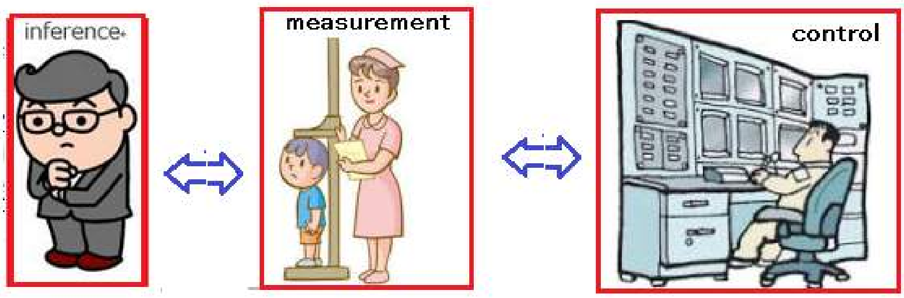
ここで，実質的には (すなわち，測定理論のテクニカルな面としては)，「(c_1) = (c_2)」なので，

(d) 推定問題と制御問題は同類の問題であり，測定の逆問題である

と言うことで、本質的には、結局、同じ問題, すなわち、

推論 ⇔ 測定 ⇔ 制御

ことに注意してもらいたい．



注意 11.3. [動的システム理論についての注意 (*cf.* [30])]　(11.2) 式で以下に注意しよう：

(♮) ノイズ $e_1(t)$ と測定誤差 $e_2(t)$ は同じ数学構造 (確率過程) を持つ．

これは動的システム理論 (11.2) 式のウィーク・ポイントと考える．異なる概念 (ノイズと測定誤差) なら

ば、異なる数学構造で定式化された方が好ましいと考えるからである．量子言語においては、ノイズと測定誤差の数学構造が異なるので、混乱を避けることができる．

11.2 回帰分析=因果関係+フィッシャーの最尤法

前章の結果 (すなわち，言語ルール 2(因果関係) とフィッシャーの最尤法 (定理 5.6) から直ちに次を得る:

定理 11.4. [回帰分析 (regression analysis) (*cf.* [30])] 木半順序集合を親写像表現 (T=$\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}, \pi : T \setminus \{t_0\} \to T$) で表す．因果観測量列 $[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{\pi(t),t} : L^\infty(\Omega_t) \to L^\infty(\Omega_{\pi(t)})\}_{t\in T\setminus\{t_0\}}\ ]$ の実現因果観測量を $\widehat{\mathsf{O}}_T = (\times_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t,\ \widehat{F}_{t_0})$ として，測定

$$
\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_{t_0})}(\widehat{\mathsf{O}}_T{=}(\mathop{\times}_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{t_0}), S_{[*]})
$$

を考える．この測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_{t_0})}(\widehat{\mathsf{O}}_T, S_{[*]})$ により得られた測定値が $\widehat{\Xi}$ ($\in \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$) に属したとする．このとき，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6) により，次が推定できる：

$$
[\,*\,] = \omega_{t_0}
$$

ここで，ω_{t_0} ($\in \Omega_{t_0}$) は

$$
[\widehat{F}_{t_0}(\widehat{\Xi})](\omega_{t_0}) = \max_{\omega\in\Omega_{t_0}} [\widehat{F}_{t_0}(\widehat{\Xi})](\omega)
$$

によって定まる．

問題 11.1 を測定理論の言葉（すなわち，回帰分析 (定理 11.4)) で答えよう．

解答 11.5. [(問題 11.1(推定問題) から続く) 回帰分析] 木半順序集合を親写像表現 (T=$\{0,1,2\}, \pi : T \setminus \{0\} \to T$) で表して，$\pi(1) = \pi(2) = 0$ とする．状態空間を $\Omega_0 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}$，$\Omega_1 =$ 区間 $[100, 200]$，$\Omega_2 =$ 区間 $[30, 110]$ とおく．もちろん，同一視：

ω_n・・・「少女を助けたのが学生 ω_n である」という状態 $(n = 1, 2, ..., 5)$

を考える．各 t ($\in \{1, 2\}$) に対して, 決定因果写像 $\phi_{0,t} : \Omega_0 \to \Omega_t$ を $\phi_{0,1} = h$(身長関数)，$\phi_{0,2} = w$(体重関数) と定める．よって, 各 t ($\in \{1, 2\}$) に対して, 決定因果作用素 $\Phi_{0,t} : L^\infty(\Omega_t) \to L^\infty(\Omega_0)$ は次のように定まる:

$$
[\Phi_{0,t} f_t](\omega) = f_t(\phi_{0,t}(\omega)) \qquad (\forall\omega \in \Omega_0, \forall f_t \in L^\infty(\Omega_t))
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & L^\infty(\Omega_1) \arrow[dl, "\Phi_{0,1}"'] \\
L^\infty(\Omega_0) & \\
 & L^\infty(\Omega_2) \arrow[ul, "\Phi_{0,2}"]
\end{tikzcd}
$$

$t=1,2$ として，標準偏差 $\sigma_t>0$ を持つ $C(\Omega_t)$ 内の正規観測量 $\mathsf{O}_{G_{\sigma_t}}=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},G_{\sigma_t})$，すなわち，

$$
[G_{\sigma_t}(\Xi)](\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\int_{\Xi}e^{-\frac{(x-\omega)^2}{2\sigma_t^2}}dx \quad (\forall\Xi\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\forall\omega\in\Omega_t)
$$

を考えて，決定因果観測量列 $[\{\mathsf{O}_{G_{\sigma_t}}\}_{t=1,2},\{\Phi_{0,t}:L^\infty(\Omega_t)\to L^\infty(\Omega_0)\}_{t=1,2}]$ を得る．このとき，$L^\infty(\Omega_0)$ 内の実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T=(\mathbb{R}^2,\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2},\widehat{F}_0)$ を次のように得る:

$$
\begin{aligned}
[\widehat{F}_0(\Xi_1\times\Xi_2)](\omega)&=[\Phi_{0,1}G_{\sigma_1}](\omega)\cdot[\Phi_{0,2}G_{\sigma_2}](\omega)\\
&=[G_{\sigma_1}(\Xi_1)](\phi_{0,1}(\omega))\cdot[G_{\sigma_2}(\Xi_2)](\phi_{0,2}(\omega))\\
&\qquad\qquad(\forall\Xi_1,\Xi_2\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \forall\omega\in\Omega_0=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_5\})
\end{aligned}
$$

十分に大きな自然数 N に対して，区間 $\Xi_1,\Xi_2\subset\mathbb{R}$ を，

$$
\Xi_1=\Big[165-\frac{1}{N},165+\frac{1}{N}\Big], \qquad \Xi_2=\Big[65-\frac{1}{N},65+\frac{1}{N}\Big]
$$

とおく．測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\widehat{\mathsf{O}}_T,S_{[*]})$ により得られた測定値は (165,65) $(\in\mathbb{R}^2)$ であるから，測定値は $\Xi_1\times\Xi_2$ に属す．ここで，定理 11.4[回帰分析] (または，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6)) より，問題は，

($\sharp$) $[\widehat{F}_0(\{\Xi_1\times\Xi_2)](\omega)$ を最大とするような ω_0 $(\in\Omega_0)$ を見つけよ．

という問題に帰着される．N は十分に大きいから，

$$
\begin{aligned}
(\sharp)&\Longrightarrow\max_{\omega\in\Omega_0}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}\int_{\Xi_1\times\Xi_2}\exp\Big[-\frac{(x_1-h(\omega))^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_2-w(\omega))^2}{2\sigma_2^2}\Big]dx_1dx_2\\
&\Longrightarrow\max_{\omega\in\Omega_0}\exp\Big[-\frac{(165-h(\omega))^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(65-w(\omega))^2}{2\sigma_2^2}\Big]\\
&\Longrightarrow\min_{\omega\in\Omega_0}\Big[\frac{(165-h(\omega))^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(65-w(\omega))^2}{2\sigma_2^2}\Big]\\
&\qquad(\text{ 簡単のため，}\sigma_1=\sigma_2\text{ と仮定して})\\
&\Longrightarrow\omega_4\text{ のとき，最小値}\frac{(165-170)^2+(65-60)^2}{2\sigma_1^2}\text{を得る．}
\end{aligned}
$$

よって，少女を助けたのは，学生 ω_4 と推定される． $\square$

さて，次に問題 11.2 を測定理論の言葉 (すなわち，回帰分析 (定理 11.4)) で解答しよう．

解答 11.6. [(問題 11.2(制御問題) から続く) 回帰分析] 問題 11.2 では，離散時間 $T = \{0,1,2,3\}$ が直列構造を持つと考えるのが自然で，親写像 $\pi : T \setminus \{0\} \to T$ を $\pi(t) = t-1 \quad (t=1,2,3)$ と定める．4 つの状態空間を, たとえば，$\Omega_0 = [0,\ 1] \times [0,\ 2]$，$\Omega_1 = [0,\ 4] \times [0,\ 2]$，$\Omega_2 = [0,,\ 6] \times [0,\ 2]$，$\Omega_3 = [0,\ 8] \times [0,\ 2]$ と置く．各 $t = 1,2,3$ に対して, 決定因果写像 $\phi_{\pi(t),t} : \Omega_{\pi(t)} \to \Omega_t$ を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{0,1}(\omega_0) = (\alpha+\beta, \beta) && (\forall \omega_0 = (\alpha,\beta) \in \Omega_0 = [0,\ 1] \times [0,\ 2]) \\
&\phi_{1,2}(\omega_1) = (\alpha+\beta, \beta) && (\forall \omega_1 = (\alpha,\beta) \in \Omega_1 = [0,\ 4] \times [0,\ 2]) \\
&\phi_{2,3}(\omega_2) = (\alpha+\beta, \beta) && (\forall \omega_2 = (\alpha,\beta) \in \Omega_2 = [0,\ 6] \times [0,\ 2])
\end{aligned}
$$

よって, 決定因果写像列 $\{\phi_{\pi(t),t} : \Omega_{\pi(t)} \to \Omega_t\}_{t \in \{1,2,3\}}$ を得て，決定因作用素列 $\{\Phi_{\pi(t),t} : L^\infty(\Omega_t) \to L^\infty(\Omega_{\pi(t)})\}_{t \in \{1,2,3\}}$ を得る．図式で書けば,

$$
L^\infty(\Omega_0) \xleftarrow{\Phi_{0,1}} L^\infty(\Omega_1) \xleftarrow{\Phi_{1,2}} L^\infty(\Omega_2) \xleftarrow{\Phi_{2,3}} L^\infty(\Omega_3)
$$

となる．ここで，$\phi_{0,2}(\omega_0) = \phi_{1,2}(\phi_{0,1}(\omega_0))$，$\phi_{0,3}(\omega_0) = \phi_{2,3}(\phi_{1,2}(\phi_{0,1}(\omega_0)))$，したがって，$\Phi_{0,2} = \Phi_{0,1} \cdot \Phi_{1,2}$，$\Phi_{0,3} = \Phi_{0,1} \cdot \Phi_{1,2} \cdot \Phi_{2,3}$ に注意せよ．

$$
\begin{tikzcd}
 & L^\infty(\Omega_1) \arrow[dl, "\Phi_{0,1}"'] \\
L^\infty(\Omega_0) & L^\infty(\Omega_2) \arrow[l, "\Phi_{0,2}"'] \\
 & L^\infty(\Omega_3) \arrow[ul, "\Phi_{0,3}"]
\end{tikzcd}
$$

更に，$\sigma > 0$ を標準偏差として，各 $t = 1,2,3$ に対して，$L^\infty(\Omega_t)$ 内の正規観測量 $\mathsf{O}_t = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, G_\sigma)$ を次のように定義する:

$$
[G_\sigma(\Xi)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_\Xi e^{-\frac{(x-\omega)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\forall \Xi \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \forall \omega \in \Omega_t = [0,\ 2t+2])
$$

よって，決定因果観測量列 $[\{\mathsf{O}_t\}_{t=1,2,3}, \{\Phi_{\pi(t),t} : L^\infty(\Omega_t) \to L^\infty(\Omega_{\pi(t)})\}_{t \in \{1,2,3\}}]$ を得る．このとき，$L^\infty(\Omega_0)$ 内の実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T = (\mathbb{R}^3, \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}, \widehat{F}_0)$ は，定理 10.8 より，次のように定まる:

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{F}_0(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3)](\omega_0) = \big[\Phi_{0,1}\big(G_\sigma(\Xi_1)\Phi_{1,2}(G_\sigma(\Xi_2)\Phi_{2,3}(G_\sigma(\Xi_3)))\big)\big](\omega_0) \\
=&[\Phi_{0,1}G_\sigma(\Xi_1)](\omega_0) \cdot [\Phi_{0,2}G_\sigma(\Xi_2)](\omega_0) \cdot [\Phi_{0,3}G_\sigma(\Xi_3)](\omega_0) \\
=&[G_\sigma(\Xi_1)](\phi_{0,1}(\omega_0)) \cdot [G_\sigma(\Xi_2)](\phi_{0,2}(\omega_0)) \cdot [G_\sigma(\Xi_3)](\phi_{0,3}(\omega_0))
\end{aligned}
$$

$$(\forall \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \forall \omega_0 = (\alpha, \beta) \in \Omega_0 = [0,\ 1] \times [0,\ 2])$$

さて，問題 11.2(制御問題) は，測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\ \widehat{\mathsf{O}}_T,\ S_{[*]})$ によって，測定値：

$$(1.9,\ 3.0,\ 4.7)\ (\in \mathbb{R}^3)$$

を得ることを期待しているのであった．十分に大きな N に対して，

$$\Xi_1 = \left[1.9 - \frac{1}{N}, 1.9 + \frac{1}{N}\right], \Xi_2 = \left[3.0 - \frac{1}{N}, 3.0 + \frac{1}{N}\right], \Xi_3 = \left[4.7 - \frac{1}{N}, 4.7 + \frac{1}{N}\right]$$

とおいて，フィッシャーの最尤法 (定理 5.6)) より，問題 11.2 は

($\sharp$) $[\widehat{F}_0(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3)](\alpha, \beta)$ を最大とするような (α, β) $(= \omega_0 \in \Omega_0)$ を見つけよ．

という問題に帰着される．N は十分大きな自然数と仮定しているので，

$$\begin{aligned}
(\sharp) \Longrightarrow & \max_{(\alpha,\beta)\in\Omega_0} [\widehat{F}_0(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3)](\alpha, \beta) \\
\Longrightarrow & \max_{(\alpha,\beta)\in\Omega_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^3} \iiint_{\Xi_1\times\Xi_2\times\Xi_3} e^{[-\frac{(x_1-(\alpha+\beta))^2+(x_2-(\alpha+2\beta))^2+(x_3-(\alpha+3\beta))^2}{2\sigma^2}]} \\
& \qquad \times dx_1 dx_2 dx_3 \\
\Longrightarrow & \max_{(\alpha,\beta)\in\Omega_0} \exp(-J/(2\sigma^2)) \\
\Longrightarrow & \min_{(\alpha,\beta)\in\Omega_0} J
\end{aligned}$$

ここに

$$J = (1.9 - (\alpha+\beta))^2 + (3.0 - (\alpha+2\beta))^2 + (4.7 - (\alpha+3\beta))^2$$

($\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\cdots\} = 0, \frac{\partial}{\partial\beta}\{\cdots\} = 0$ として)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \begin{cases} (1.9 - (\alpha+\beta)) + (3.0 - (\alpha+2\beta)) + (4.7 - (\alpha+3\beta)) = 0 \\ (1.9 - (\alpha+\beta)) + 2(3.0 - (\alpha+2\beta)) + 3(4.7 - (\alpha+3\beta)) = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad (\alpha, \beta) = (0.4, 1.4)
\end{aligned}$$

よって，目標測定値 (1.9, 3.0, 4.7) を得るための，(α, β) の制御状態 (0.4, 1.4) を得る．以上であるが，11.1.2 節の (d) で述べた「制御問題 (c_1) と推定問題 (c_2) の実質的同値性」を再度確認してもらいたい． □

注意 11.7. 念のために、確認すると、

- 理論的観点からは、,

  "推定" ＝ "制御" で、しかも "測定" の逆

目次; 他

である．したがって、統計学 (推定が主) と動的システム理論 (制御が主) は本質的には同じと考える．再掲すると、