慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

| | |
|---|---|
| Title | 第10講：「測定は一回だけ」と(量子)因果関係 |
| Sub Title | |
| Author | 石川, 史郎(Ishikawa, Shiro) |
| Publisher | |
| Publication year | 2018 |
| Jtitle | コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.357- 379 |
| JaLC DOI | |
| Abstract | |
| Notes | 慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版) |
| Genre | Book |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0357 |

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

# 第 10 講

# 「測定は一回だけ」と (量子) 因果関係

前章までで,「量子言語」のすべてを説明した.

$$
\begin{cases}
(\sharp_1):\ \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{純粋型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{純粋型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 2.7\text{ 節})}{\boxed{\text{純粋型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}} \\
(\sharp_2):\ \underset{(=\text{量子言語})}{\boxed{\text{混合型測定理論}}} := \underbrace{\overset{[\text{混合型言語ルール 1}]}{\underset{(cf.\ \ 7.1\text{ 節})}{\boxed{\text{混合型測定}}}} + \overset{[\text{言語ルール 2}]}{\underset{(cf.\ \ 8.3\text{ 節})}{\boxed{\text{因果関係}}}}}_{\text{一種の呪文 (=量子力学の言葉遣い)}} + \underbrace{\overset{[\text{言語的コペンハーゲン解釈}]}{\underset{(cf.\ \ 3.1\text{ 節})}{\boxed{\text{言語的解釈}}}}}_{\text{呪文の使い方のマニュアル}}
\end{cases}
$$

を説明した. これが「すべて」であるが,

- 重要なことは, 演習・訓練で, 特に,

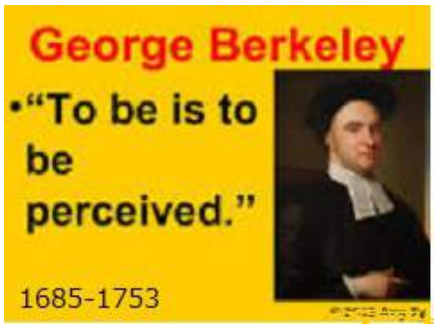
## 「測定と因果関係の絡み」の演習・訓練

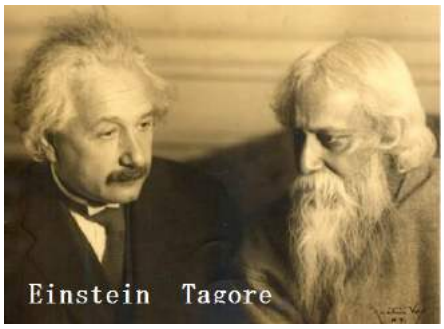
で, これが, 測定理論 (=量子言語=二元論的言語) の「実質的なすべて」と言える. 本章から, これを行う. この意味では, これからが本番である. ただし, 量子系では「測定と因果関係の絡み」は不自由なことが多くて, 制約条件下の議論となって, 深い議論ができない場合が多い. この意味では, 本章 (量子系) は簡単とも言える.

## 10.1 有限実現因果観測量—測定は一回だけ

二元論 (測定理論) では，言語ルール 2(因果関係) が単独で使われることはなくて，常に言語ルール 1(測定) と組みになっている．なぜならば, 同じ意味で,

($A_1$) 測定してみなければ, なにもわからない
($A_2$) 存在するとは, 知覚されること (by George Berkeley(1685 年 - 1753 年))




♠ **注釈 10.1.** バークリーの言葉「存在するとは、知覚されること」は、アインシュタイン=タゴール会談でのアインシュタインの言葉：
(♯) 月は、見ていても、見ていなくても存在する (=[測定者がいなくても、物理学は成立する] )
との対比において、深淵である．すなわち、何度も繰り返し述べていることであり、本講の主要テーマの

| 一元論:測定なし | | 二元論:測定あり |
|---|---|---|
| $\boxed{\text{実在的世界観}}$ | v.s, | $\boxed{\text{言語的世界観 (コペンハーゲン解釈)}}$ |
| ニュートン・アインシュタイン等 | | デカルト・バークリー・ボーア等 |

である．

以下に, 実現因果観測量に関する定理・定義を述べる． この節では,「有限実現因果観測量」に限定するので, いずれも容易に理解できると思う．理論的観点からは，次節の「無限実現因果観測量」のための準備であるが，応用的には,「有限実現因果観測量」でも十分使える． (古典系では無限実現因果観測量でなければ物足りないが、量子系では有限実現因果観測量が普通で、この意味では量子系の方が簡単である).

**定理 10.1.** [因果作用素と観測量] 一般の基本構造

$$[\mathcal{A}_k \subseteq \overline{\mathcal{A}}_k \subseteq B(H_k)] \qquad (k = 1, 2)$$

を考える． $\Phi_{1,2}:\overline{\mathcal{A}}_2\to\overline{\mathcal{A}}_1$ を因果作用素とする． このとき，$\overline{\mathcal{A}}_2$ 内の任意の観測量 $\mathsf{O}_2=(X,\mathcal{F},F_2)$ に対して，$(X,\mathcal{F},\Phi_{1,2}F_2)$ は $\overline{\mathcal{A}}_1$ 内の観測量である．これを $\Phi_{1,2}\mathsf{O}_2=(X,\mathcal{F},\Phi_{1,2}F_2)$ と記す．

**証明** $\Xi\ (\in\mathcal{F})$ の可算分割 $\{\Xi_1,\Xi_2,\ldots,\Xi_n,\ldots\}$ $\Big($ すなわち，$\Xi=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Xi_n$，$\Xi_n\in\mathcal{F},(n=1,2,\ldots)$，$\Xi_m\cap\Xi_n=\emptyset\quad(m\neq n)\Big)$ を考える．因果作用素の定義 8.4 に注意して，任意の $\rho_1(\in{\mathcal{A}_1}^*)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&{}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\rho_1,\Phi_{1,2}F_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Xi_n)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_1}={}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\Phi_{1,2}^*\rho_1,F_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Xi_n)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\Phi_{1,2}^*\rho_1,F_2(\Xi_n)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_2}=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{(\overline{\mathcal{A}}_1)_*}\Big(\rho_1,\Phi_{1,2}F_2(\Xi_n)\Big)_{\overline{\mathcal{A}}_2}
\end{aligned}
$$

よって，$\Phi_{1,2}\mathsf{O}_2=(X,\mathcal{F},\Phi_{1,2}F_2)$ が，$C(\Omega_1)$ 内の観測量であることが証明された． □

この節では, 木半順序集合 $T(t_0)$ が有限の場合を考える． $T(t_0)=\{t_0,t_1,\ldots,t_N\}$ として，ルート $t_0$ をもつ木半順序集合 $(T(t_0),\leqq)$ を考える．その親写像表現を $(T{=}\{t_0,t_1,\ldots,t_N\},\pi:T\setminus\{t_0\}\to T)$ とする．

**定義 10.2.** **[(有限) 因果観測量列]** 一般の基本構造を

$$[\mathcal{A}_k\subseteq\overline{\mathcal{A}}_k\subseteq B(H_k)]\qquad(t\in T(t_0)=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\})$$

として, 因果作用素列 $\{\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ を考える．すなわち， 次を満たすとする ( *cf.* 定義 8.10):

(i) 任意の $(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}$ に対して，因果作用素 $\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}$ が定義されて，$\Phi_{t_1,t_2}\Phi_{t_2,t_3}=\Phi_{t_1,t_3}$ $(\forall(t_1,t_2),\forall(t_2,t_3)\in T^2_{\leqq})$ を満たす．ここに，$\Phi_{t,t}:\overline{\mathcal{A}}_t\to\overline{\mathcal{A}}_t$ は恒等作用素とする．

各 $t\in T$ に対して，$\overline{\mathcal{A}}_t$ 内の観測量 $\mathsf{O}_t{=}(X_t,\mathcal{F}_t,F_t)$ を定める．対 $[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T},\{\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}]$ を**因果観測量列**と呼び，$[\mathsf{O}_T]$ または $[\mathsf{O}_{T(t_0)}]$ と記す．すなわち，$[\mathsf{O}_T]=[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T},\{\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}]$ である．木半順序集合 $T(t_0)=\{t_0,t_1,\ldots,t_N\}$ が有限のとき，親写像 $\pi:T\setminus\{t_0\}\to T$ を使って，$[\mathsf{O}_T]=[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T},\{\overline{\mathcal{A}}_t\xrightarrow{\Phi_{\pi(t),t}}\overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{t_0\}})]$ と書くこともある．

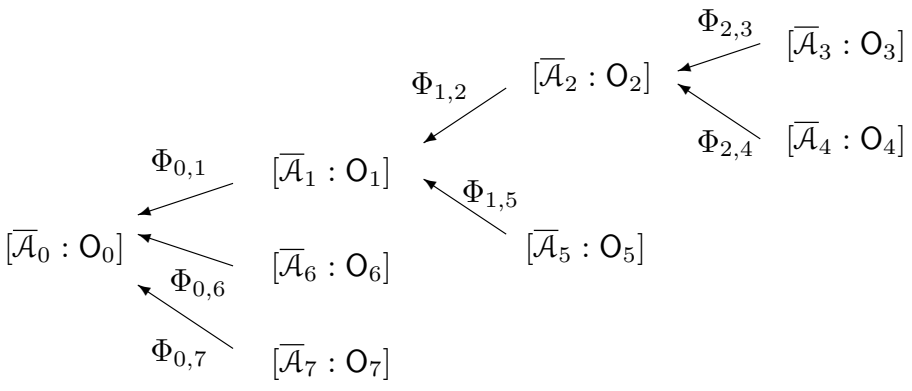



図 10.1：因果観測量列の簡単な例

ここで, 我々の問題は以下の通りである.

**問題 10.3.**

初期純粋状態 $\rho_{t_0} \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*_{t_0})$ を持つシステムに対しての

因果観測量列 $[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}\ ]$ の測定を, 如何に定式化するか？

この問題を解くためには, 言語的解釈 (=言語的コペンハーゲン解釈) に頼らなければならない.

言語的コペンハーゲン解釈では,「測定は一回だけ」で，したがって,「観測量は一つだけ」が要請される．このために，因果観測量列 $[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : \overline{\mathcal{A}}_{t_2} \to \overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}\ ]$ の中の多数の観測量 $\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}$ を一つに合体させなければならい．これは，次の実現因果観測量によって実現される.

**定義 10.4.** [(有限) 実現因果観測量 (realized causal observable)] $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{\pi(t),t} : \overline{\mathcal{A}}_t \xrightarrow{\Phi_{\pi(t),t}} \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{t_0\}}\ ]$ を因果観測量列とする．各 $s\ (\in T)$ に対して，$T_s = \{t \in T \mid t \geqq s\}$ とおく．$\overline{\mathcal{A}}_s$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_s = (\times_{t\in T_s} X_t,\ \boxtimes_{t\in T_s}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_s)$ を以下の規則で定める：

$$\widehat{\mathsf{O}}_s = \begin{cases} \mathsf{O}_s & (s \in T \setminus \pi(T) \text{ のとき}) \\ \mathsf{O}_s \times (\times_{t\in\pi^{-1}(\{s\})} \Phi_{\pi(t),t}\widehat{\mathsf{O}}_t) & (s \in \pi(T) \text{ のとき}) \end{cases} \tag{10.1}$$

(量子系の場合は, $\widehat{\mathsf{O}}_s$ の存在は, 保証されているわけでないことに注意せよ). これを逐次的に用いて，結局，$\overline{\mathcal{A}}_{t_0}$ 内の観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_{t_0} = (\times_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{t_0})$ を得る．$\widehat{\mathsf{O}}_{t_0} = \widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)}$ とおく．$\widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)} = (\times_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_{t_0})$ を，(有限) 因果観測量列 $[\mathsf{O}_{T(t_0)}] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{\pi(t),t} :$


目次; 他

$\overline{\mathcal{A}}_t \to \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{t_0\}}$ ] の **(有限) 実現因果観測量**と呼ぶ.

♠ **注釈 10.2.** 上の (10.1) 式において、積 “$\times$”を擬積 “$\overset{\mathrm{qp}}{\times}$”に置き換えてもよいが、本書では、これに関わらない.

**例 10.5.** [単純な例 (図 10.1 から続く)]

$$
\begin{tikzcd}
 & & & [L^\infty(\Omega_3):\mathsf{O}_3] \arrow[dl, "\Phi_{2,3}"'] \\
 & & [L^\infty(\Omega_2):\mathsf{O}_2] \arrow[dl, "\Phi_{1,2}"'] & \\
 & [L^\infty(\Omega_1):\mathsf{O}_1] \arrow[dl, "\Phi_{0,1}"'] & & [L^\infty(\Omega_4):\mathsf{O}_4] \arrow[ul, "\Phi_{2,4}"] \\
[L^\infty(\Omega_0):\mathsf{O}_0] & [L^\infty(\Omega_6):\mathsf{O}_6] \arrow[l, "\Phi_{0,6}"'] & [L^\infty(\Omega_5):\mathsf{O}_5] \arrow[ul, "\Phi_{1,5}"] & \\
 & [L^\infty(\Omega_7):\mathsf{O}_7] \arrow[ul, "\Phi_{0,7}"] & &
\end{tikzcd}
$$

図 10.2 : 古典因果観測量列の簡単な例

$(T(0)=\{0,1,\ldots,7\},\pi)$ を木半順序集合として，親写像 $\pi : T\setminus\{0\} \to T$ を

$$\pi(1)=\pi(6)=\pi(7)=0,\quad \pi(2)=\pi(5)=1,\quad \pi(3)=\pi(4)=2$$

と定めて，図 10.1 のように，因果作用素列 $\{\Phi_{\pi(t),t} : \overline{\mathcal{A}}_t \to \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{0\}}$ を考える.

さて，因果観測量列 $[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\overline{\mathcal{A}}_t \overset{\Phi_{\pi(t),t}}{\to} \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{0\})}]$ の実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)} = (\bigtimes_{t\in T} X_t,\ \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t,\ \widehat{F}_{t_0})$ を以下のように構成しよう．$T\setminus\pi(T)=\{3,4,5,6,7\}$ であるから，

$$\widehat{\mathsf{O}}_t = \mathsf{O}_t,\qquad \widehat{F}_t = F_t \quad (t=3,4,5,6,7)$$

となる．次に，$\overline{\mathcal{A}}_2$ 内の同時観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_2 = (X_2\times X_3\times X_4, \mathcal{F}_2\boxtimes\mathcal{F}_3\boxtimes\mathcal{F}_4, \widehat{F}_2)$ を次のように構成する.

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2 &= F_2 \times (\bigtimes_{t\in\pi^{-1}(\{2\})} \Phi_{\pi(t),t}\widehat{F}_t) = F_2 \times (\bigtimes_{t=3,4} \Phi_{2,t}\widehat{F}_t) = F_2 \times (\bigtimes_{t=3,4} \Phi_{2,t}F_t) \\
&= F_2 \times \Phi_{2,3}F_3 \times \Phi_{2,4}F_4
\end{aligned}$$

(量子系の場合は, $\widehat{\mathsf{O}}_2$ の存在は, 保証されているわけでないことに注意せよ).

更に，$\overline{\mathcal{A}}_1$ 内の同時観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_1 = (X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \times X_5, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3 \boxtimes \mathcal{F}_4 \boxtimes \mathcal{F}_5, \widehat{F}_1)$ を次のように構成する．

$$\widehat{F}_1 = F_1 \times (\mathop{\times}_{t=2,5} \Phi_{1,t}\widehat{F}_t) = F_1 \times \Phi_{1,5}F_5 \times \Phi_{1,2}\Big(F_2 \times \Phi_{2,3}F_3 \times \Phi_{2,4}F_4\Big)$$

そして，結局，$\overline{\mathcal{A}}_0$ 内の実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_0 = (\times_{t=1}^{7} X_t,\ \boxtimes_{t=1}^{7}\mathcal{F}_t, \widehat{F}_0)$ を以下のように構成できる．

$$\widehat{F}_0 = F_0 \times (\mathop{\times}_{t=1,6,7} \Phi_{0,t}\widehat{F}_t)$$

上の手続きを図示すると

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\mathcal{A}}_0 & \xleftarrow{\Phi_{0,1}} & \overline{\mathcal{A}}_1 & \xleftarrow{\Phi_{1,2}} & \overline{\mathcal{A}}_2 \\
F_0 \times \Phi_{0,6}\widehat{F}_6 \times \Phi_{0,7}\widehat{F}_7 & & F_1 \times \Phi_{1,5}\widehat{F}_5 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\underset{(F_0\times\Phi_{0,6}\widehat{F}_6\times\Phi_{0,7}\widehat{F}_7\times\Phi_{0,1}\widehat{F}_1)}{\widehat{F}_0} & \xleftarrow{\Phi_{0,1}} & \underset{(F_1\times\Phi_{1,5}\widehat{F}_5\times\Phi_{1,2}\widehat{F}_2)}{\widehat{F}_1} & \xleftarrow{\Phi_{1,2}} & \underset{(F_2\times\Phi_{2,3}\widehat{F}_3\times\Phi_{2,4}\widehat{F}_4)}{\widehat{F}_2}
\end{array}$$

このようにして, 因果観測量列 $[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\overline{\mathcal{A}}_t \overset{\Phi_{\pi(t),t}}{\to} \overline{\mathcal{A}}_{\pi(t)}\}_{t\in T\setminus\{0\}}]$ の実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_0 = \widehat{\mathsf{O}}_T$ を得る．$\widehat{F}_0$ を書き下すと，

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}_0(\Xi_0 \times \Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3 \times \Xi_4 \times \Xi_5 \times \Xi_6 \times \Xi_7)] \\
=&F_0(\Xi_0) \times \Phi_{0,1}\Big(F_1(\Xi_1) \times \Phi_{1,5}F_5(\Xi_5) \\
&\qquad \times \Phi_{1,2}\Big(F_2(\Xi_2) \times \Phi_{2,3}F_3(\Xi_3) \times \Phi_{2,4}F_4(\Xi_4)\Big)\Big) \\
&\qquad \times \Phi_{0,6}(F_6(\Xi_6)) \times \Phi_{0,7}(F_7(\Xi_7))
\end{aligned} \tag{10.2}$$

となる．(量子系の場合は, $\widehat{\mathsf{O}}_0$ の存在は, 保証されているわけでないことに注意せよ).

**注意 10.6.** 上で，$t = 2, 6, 7$ で，$\mathsf{O}_t$ が定まっていないとしたら，$t = 2, 6, 7$ に対して，存在観測量 $\mathsf{O}_t^{存}$=$(X_t, \{\emptyset, X_t\}, F_t^{存})$ (*cf.* 例 2.20) を想定すればよい．そうすれば，$[F_t^{存}(X_t)](\omega) = 1$ $(t = 2, 6, 7)$ だから，

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}_0(\Xi_0 \times \Xi_1 \times X_2 \times \Xi_3 \times \Xi_4 \times \Xi_5 \times X_6 \times X_7) \\
=&F_0(\Xi_0) \times \Phi_{0,1}\Big(F_1(\Xi_1) \times \Phi_{1,5}F_5(\Xi_5)
\end{aligned}$$

$$\times\ \Phi_{1,2}\Big(\Phi_{2,3}F_3(\Xi_3)\times\Phi_{2,4}F_4(\Xi_4)\Big)\Big) \tag{10.3}$$

となる．存在観測量を考えないで，$T'=\{0,1,3,4,5\}$ として，$[\mathsf{O}_{T'}]=[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T'},\{\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in(T')^2_{\leqq}}]$ とすると，その実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_{T'(0)}=(\times_{t\in T'}X_t,\ \boxtimes_{t\in T'}\mathcal{F}_t,\ \widehat{F}'_0)$ は，

$$\begin{aligned}&\widehat{F}'_0(\Xi_0\times\Xi_1\times\Xi_3\times\Xi_4\times\Xi_5)\\ =&F_0(\Xi_0)\times\Phi_{0,1}\Big(F_1(\Xi_1)\times\Phi_{1,5}F_5(\Xi_5)\\ &\qquad\times\Phi_{1,4}F_4(\Xi_4)\times\Phi_{1,3}F_3(\Xi_3)\times\Phi_{1,4}F_4(\Xi_4)\Big)\end{aligned} \tag{10.4}$$

となって，(10.3) 式とは違う結果になってしまうので注意を要する．以下の定理や例の中では，存在観測量を省略して議論することもあるが，その場合は細心の注意のもとに省略していると思ってもらいたい．

////

以上により, 問題 10.3 に次のように答えることができる．

**問題 10.7.** [問題 10.3 の再掲]

$$\text{初期状態 }\rho_{t_0}\left\{\begin{array}{ll}\in\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*_{t_0}): & \text{純粋状態}\\ \in\overline{\mathfrak{S}}^m((\overline{\mathcal{A}}_{t_0})_*): & W^*-\text{混合状態}\\ \in\mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*_{t_0}): & C^*-\text{混合状態}\end{array}\right\}\text{を持つシステムに対しての}$$

因果観測量列 $[\mathsf{O}_T]=[\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T},\{\Phi_{t_1,t_2}:\overline{\mathcal{A}}_{t_2}\to\overline{\mathcal{A}}_{t_1}\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}]$ の測定を, 如何に定式化するか？

**解答：** 実現観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_{t_0}$ が存在するならば,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{純粋測定 }\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}_{t_0}}(\widehat{\mathsf{O}}_{t_0},S_{[\rho_{t_0}]})\\ W^*-\text{混合測定 }\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}_{t_0}}(\widehat{\mathsf{O}}_{t_0},S_{[*]}(\rho_{t_0}))\\ C^*-\text{混合測定 }\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}_{t_0}}(\widehat{\mathsf{O}}_{t_0},S_{[*]}(\rho_{t_0}))\end{array}\right\}$$

と定式化できる．

実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_T(=\widehat{\mathsf{O}}_{t_0})$ に，言語ルール 1(純粋測定) を適用すれば,

$(B_1)$ 測定 $\mathsf{M}_{\overline{\mathcal{A}}_{t_0}}(\widehat{\mathsf{O}}_T, S_{[\rho_{t_0}]})$ により得られる測定値 $(x_t)_{t\in T}$ が $\widehat{\Xi}(\in \boxtimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ に属する確率は,

$$\mathcal{A}^*\left(\rho_{t_0}, \widehat{F}_{t_0}(\widehat{\Xi})\right)_{\overline{\mathcal{A}}_{t_0}} \tag{10.5}$$

となる.

を得る. また, 混合測定に対しては, 言語ルール 1(混合測定) を適用すればよい.

したがって,

$(B_2)$ 初期状態 $\rho_0$ は固定されていて, **状態は変化しない.**

と言える.

次の定理は, 古典系という制約の下で成立する定理であるが, 非常に頻繁に使われる.

**定理 10.8. [決定因果観測量列の実現因果観測量]** 有限木半順序集合を $(T(t_0), \leqq)$ とする. 各 $t \in T(t_0)$ に対して, 古典系の基本構造

$$[C_0(\Omega_t) \subseteq L^\infty(\Omega_t, \nu_t) \subseteq B(L^2(\Omega_t, \nu_t))]$$

を考える. 因果観測量列 $[\mathsf{O}_T] = [\{\mathsf{O}_t\}_{t\in T}, \{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}]$ において, $\{\Phi_{t_1,t_2} : L^\infty(\Omega_{t_2}) \to L^\infty(\Omega_{t_1})\}_{(t_1,t_2)\in T^2_{\leqq}}$ が決定因果作用素列ならば, 実現因果観測量 $\widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)}$ は次のように表現できる:

$$\widehat{\mathsf{O}}_{T(t_0)} = \bigtimes_{t\in T} \Phi_{t_0,t}\mathsf{O}_t$$

すなわち,

$$[\widehat{F}_{t_0}(\bigtimes_{t\in T} \Xi_t)](\omega_{t_0}) = \bigtimes_{t\in T}[\Phi_{t_0,t}F_t(\Xi_t)](\omega_{t_0}) = \bigtimes_{t\in T}[F_t(\Xi_t)](\phi_{t_0,t}\omega_{t_0})$$
$$(\forall\omega_{t_0} \in \Omega_{t_0}, \forall\Xi_t \in \mathcal{F}_t)$$

が成立する.

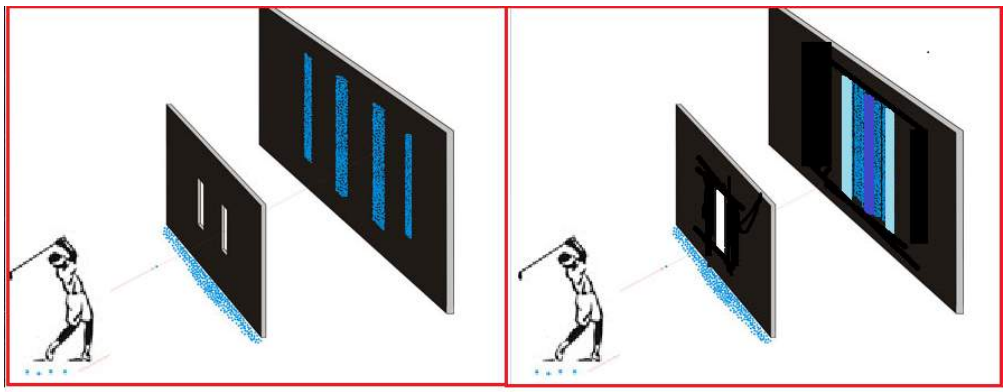
**証明** 一般の場合も同様なので, 例 10.5(すなわち, 図 10.1) の場合について示す. 定理 8.6 を繰り返し使って,

$$\widehat{F}_0 = F_0 \times (\bigtimes_{t=1,6,7} \Phi_{0,t}\widehat{F}_t)$$
$$= F_0 \times (\Phi_{0,1}\widehat{F}_1 \times \Phi_{0,6}\widehat{F}_6 \times \Phi_{0,7}\widehat{F}_7)$$
$$= F_0 \times (\Phi_{0,1}\widehat{F}_1 \times \Phi_{0,6}F_6 \times \Phi_{0,7}F_7)$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times(\Phi_{0,1}\widehat{F}_1)\\
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times\Phi_{0,1}(F_1\times(\mathop{\times}_{t=2,5}\Phi_{1,t}\widehat{F}_t))\\
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,1,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times\Phi_{0,1}(\mathop{\times}_{t=2,5}\Phi_{1,t}\widehat{F}_t)\\
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,1,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times\Phi_{0,1}(\Phi_{1,2}\widehat{F}_2\times\Phi_{1,5}\widehat{F}_5)\\
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,1,5,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times\Phi_{0,1}(\Phi_{1,2}\widehat{F}_2)\\
&=\Big(\mathop{\times}_{t=0,1,5,6,7}\Phi_{0,t}F_t\Big)\times\Phi_{0,1}(\Phi_{1,2}(F_2\times(\mathop{\times}_{t=3,4}\Phi_{2,t}\widehat{F}_t)))\\
&=\mathop{\times}_{t=0}^{7}\Phi_{0,t}F_t
\end{aligned}
$$

を得る． □

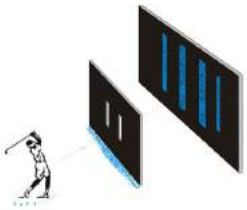
## 10.2 二重スリット実験



### 10.2.1 干渉あり

各 $t \in T = [0, \infty)$ に対して, 量子基本構造を次のようにする：

$$[\mathcal{C}(H_t) \subseteq B(H_t) \subseteq B(H_t)],$$



ここに $H_t = L^2(\mathbb{R}^2)$ $(\forall t \in T)$.

初期波動関数 $u_0 \in H_0 = L^2(\mathbb{R}^2)$ $(k_0 > 0$, small $\sigma > 0)$ を以下に定める：

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &\approx \psi_x(x, 0)\psi_y(y, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\sigma}} \exp\Big(ik_0 x - \frac{x^2}{2\sigma^2}\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\sigma}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\Big), \end{aligned}$$

ここで、平均運動量 $(p_1^0, p_2^0)$ は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} (p_1^0, p_2^0) &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_x(x, 0) \cdot \frac{\hbar \partial \psi_x(x, 0)}{i\partial x} dx, \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_y(y, 0) \cdot \frac{\hbar \partial \psi_y(y, 0)}{i\partial y} dy\Big) \\ &= (\hbar k_0, 0). \end{aligned}$$

したがって、粒子 $P$ の初期状態は $|u_0\rangle\langle u_0|$ となる.

以下に、次図を説明しよう.

**図 10.9.** $\mathsf{M}_{B(H_0)}(\Phi_{0,t_2}\mathsf{O}_2 = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \Phi_{0,t_2}F_2), S_{[|u_0\rangle\langle u_0|]})$

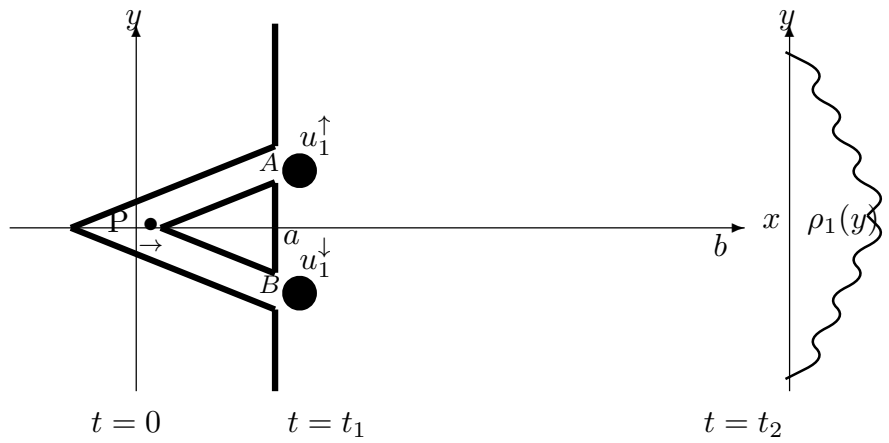



Figure 10.3(1) Potential $V(x,y)=\infty$ on the thick line, $=0$ (elsewhere)

次のシュレーディンガー方程式を想定する：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_t(x,y)=\mathcal{H}u_t(x,y),\qquad \mathcal{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V(x,y)$$

したがって、$0<s<t<\infty$ として、次の因果関係 $\{\Phi_{s,t}:B(H_t)\to B(H_s)\}_{0<s<t<\infty}$ を得る．ここで、

$$\Phi_{s,t}A=e^{\frac{\mathcal{H}(t-s)}{i\hbar}}Ae^{-\frac{\mathcal{H}(t-s)}{i\hbar}}\qquad(\forall A\in B(H_t)=B(L^2(\mathbb{R}^2)))$$

すなわち, 図 12.9 において、$(\Phi_{0,t_1})_*(u_0)=u_1^{\uparrow}+u_1^{\downarrow}$.

ここで、$\mathsf{O}_2=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},F_2)$ を $B(L^2(\mathbb{R}^2)$ 内の $y$ 方向に位置観測量とする．すなわち、

$$[F(\Xi)](x,y)=\chi_\Xi(y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\mathbb{R}\times\Xi\\ 0 & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\Xi\end{cases}$$

したがって、測定 $\mathsf{M}_{B(H_0)}(\Phi_{0,t_2}\mathsf{O}_2=(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\Phi_{0,t_2}F_2),S_{[|u_0\rangle\langle u_0|]})$ を得る．言語ルール 1(測定: §2.7) によれば、次が言える：

(A) $\mathsf{M}_{B(H_0)}(\Phi_{0,t_2}\mathsf{O},S_{|u_0\rangle\langle u_0|})$ によって得られた測定値 $a\in\mathbb{R}$ が $(-\infty,y]$ に属する確率は次で与えられる：

$$\langle u_0,(\Phi_{0,t_2}F((-\infty,y]))u_0\rangle=\int_{-\infty}^{y}\rho_1(y)dy$$

♠ **注釈 10.3.** もうすこし正確に言うと、以下のようになる．$\Delta$, $\epsilon$ を小さい正数とする．各正数 $k \in \mathbb{Z} = \{k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, , , , , \}$ に対して，長方形 $D_k$ を次のように定める．

$$D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < b\},$$
$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b \leq x, (k-1)\Delta < y \leq k\Delta\}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$
$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b \leq x, k\Delta < y \leq (k+1)\Delta\}, \quad k = -1, -2, -3, ...$$

ここで、$B(L^2(\mathbb{R}^2))$ 内の観測量 $\mathsf{O}_2^\Delta = (\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, F_2^\Delta)$ を次のように定める：

$$[F(\{k\})](x, y) = 1 \ \ ((x, y) \in D_k), \quad = 0 \ \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_k) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

よって、次のように考えればよい．

- 各 $t_n = t_2 + n\epsilon (n = 0, 1, 2, ...)$ に対して，射影観測量 $\mathsf{O}_2^\Delta$ を射影仮説 9.7 の意味で測定する．

### 10.2.2 どっちのスリットを通ったか？

次の図を説明しよう．

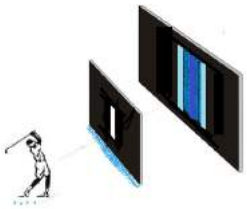


**図 10.10.** どっちのスリットを通ったか？
測定 $\mathsf{M}_{B(L^2(\mathbb{R}^2))}(\Phi_{0,t_1}(\Psi(\mathsf{O}_G \otimes \Phi_{t_1,t_2}\mathsf{O}_2)), S_{[|u_0\rangle\langle u_0|]})$ の測定値が $\{\uparrow\} \times (-\infty, y]$ に属した場合

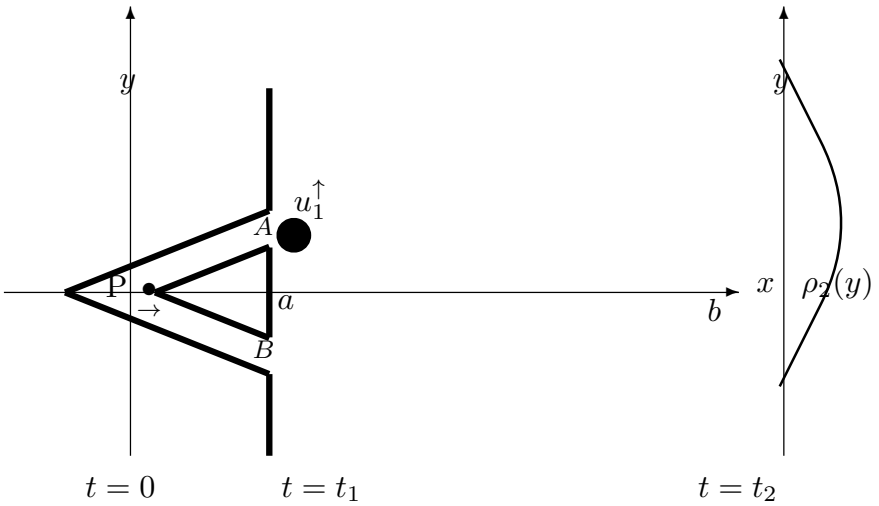



Figure
12.3(2) Potential $V(x, y) = \infty$ on the thick line, $= 0$ (elsewhere)

上図を説明する．$B(L^2(\mathbb{R}^2))$ 内の射影観測量 $\mathsf{O}_1 = (\{\uparrow, \downarrow\}, 2^{\{\uparrow,\downarrow\}}, F_1)$ を次のように定める：

$$[F_1(\{\uparrow\})](x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$
$$[F_1(\{\downarrow\})](x,y) = 1 - [F_1(\{\uparrow\})](x,y)$$

射影仮説 9.7 を使うために、完全正規直交系 $\{e_1, e_2\}$ $(\in \mathbb{C}^2)$ を固定する．前共役作用素 $\Psi_* : Tr(L^2(\mathbb{R}^2)) \to Tr(\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^2))$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}&\Psi_*(|u\rangle\langle u|)\\ &= |(e_1 \otimes F_1(\{\uparrow\})u) + (e_2 \otimes F_1(\{\downarrow\})u)\rangle\langle(e_1 \otimes F_1(\{\uparrow\})u) + (e_2 \otimes F_1(\{\downarrow\})u)|\end{aligned}$$

よって、　因果作用素 $\Psi : B(\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^2)) \to B(L^2(\mathbb{R}^2))$ を $\Psi = (\Psi_*)^*$ で得る．$B(\mathbb{C}^2)$ 内の観測量 $\mathsf{O}_G = (\{\uparrow,\downarrow\}, 2^{\{\uparrow,\downarrow\}}, G)$ を次のように定める：

$$G(\{\uparrow\}) = |e_1\rangle\langle e_1|, \qquad G(\{\downarrow\}) = |e_2\rangle\langle e_2|$$

よって、テンソル観測量 $\mathsf{O}_G \otimes \Phi_{t_1,t_2}\mathsf{O}_2$ (in $B(\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^2))$) を得て、測定 $\mathsf{M}_{B(L^2(\mathbb{R}^2))}(\Phi_{0,t_1}(\Psi(\mathsf{O}_G \otimes \Phi_{t_1,t_2}\mathsf{O}_2)), S_{[|u_0\rangle\langle u_0|]})$ も得る．言語ルール 1 ( measurement: §2.7) によって、次が言える：

(B) 測定 $\mathsf{M}_{B(L^2(\mathbb{R}^2))}(\Phi_{0,t_1}(\Psi(\mathsf{O}_G \otimes \Phi_{t_1,t_2}\mathsf{O}_2)), S_{[|u_0\rangle\langle u_0|]})$ によって得られた測定値 $(\lambda, y) \in \{\uparrow,\downarrow\} \times \mathbb{R}$ が $\{\uparrow\} \times (-\infty, y]$ に属する確率は次のようになる：

$$\langle u_1^{\uparrow}, (\Phi_{t_1,t_2}F_2((-\infty, y]))u_l^{\uparrow}\rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y} \rho_2(y)dy$$

♠ **注釈 10.4.** 「粒子 $P$ がホール $A$ を通る」という命題は量子言語では記述できないが、上の議論をもうすこし正確に言うならば、次の手続き (i) と (ii) を考えればよい：

(i) 時刻 $t_1$ で, 射影観測量 $\mathsf{O}_1$ を射影仮説 9.7 の意味で測定する

(ii) 各 $t_n = t_2 + n\epsilon (n = 0, 1, 2, ...)$ に対して, 射影観測量 $\mathsf{O}_2^{\Delta}$ を射影仮説 9.7 の意味で測定する．

ここまでも何度も繰り返し述べていることであるが、

- 量子言語とは、「臭いものに蓋をする」こと

なのだと思う．言語ルール 1 と 2 で、「言葉遣い」を明確に定めておいて、それ以外の言葉遣いを禁じて、「語りえぬものには、沈黙しなければならない」というのが、量子言語である．

## 10.3 ウィルソンの霧箱

この節では、ウィルソンの霧箱 ( i.e., 容器内の過飽和蒸気を荷電粒子が通過すると霧滴が生じる現象を観測 するもの) の一つのモデルを議論する. (*cf.* 文献 [23, 24, (1991, 1994, S. Ishikawa, *et al.*)] ).

### 10.3.1 量子粒子の厳密な軌道は無意味だが、近似的ならば、...

一次元実空間 $\mathbb{R}$ 内の粒子 $P$ の初期状態を $|u\rangle\langle u|$ とする. ここに、波動関数 $u(x) \in H = L^2(\mathbb{R})$. を次のように仮定する：

$$u(x) = \begin{cases} l/\sqrt{2}, x \in (-3/2, -1/2) \cup (1/2, 3/2) \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} \tag{10.6}$$

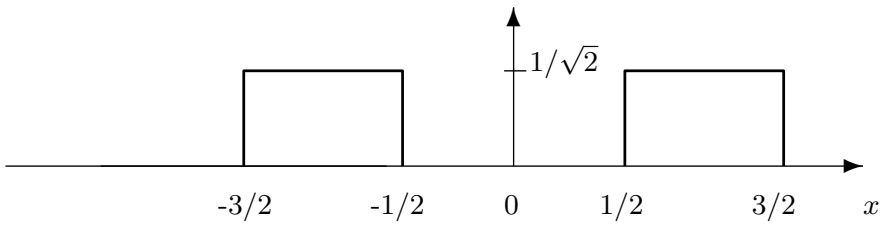



図 10.4 初期波動関数 $u(x)$

$A_0$ を $B(H)$ 内の位置観測量 (の自己共役作用素表現) とする. すなわち、

$$(A_0 v)(x) = xv(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\forall v \in H = L^2(\mathbb{R})$$

この観測量表現は、$A_0$ のスペクトル分解 $\mathsf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, E_{A_0})$ で表現される. すなわち、

$$A_0 = \int_{\mathbb{R}} x E_{A_0}(dx)$$

さて、次のハイゼンベルグの方程式を考える：

$$-i\hbar \frac{dA_t}{dt} = \mathcal{H}A_t - A_t\mathcal{H}, \quad -\infty < t < \infty, \text{ where } A_0 = A \tag{10.7}$$

ここで、ハミルトニアンは $\mathcal{H} = -(\hbar^2/2m)\partial^2/\partial x^2$ (すなわち、ポテンシャル $V(x) = 0$) と仮定する.

ここで、$U_t = \exp(-itA)$ とおいて、次を得る.

$$A_t = U_t^* A U_t = U_t^* x U_t = x + \frac{\hbar t}{im}\frac{d}{dx} \tag{10.8}$$

ここで、$t = 1/4$, $\hbar/m = 1$ とおいて、さらに、

$$A = A_0(= x), \qquad B = A_{1/4}(= x + \frac{1}{4i}\frac{d}{dx}) = U_{1/4}^* A_0 U_{1/4} = \Phi_{0,1/4} A_0$$

として、次の因果作用素を得る：

$$\begin{array}{ccc} \text{位置観測量: } A_0 & & \text{位置観測量: } A_0 \\ \boxed{B(H_0)} & \xleftarrow[\Phi_{0,1/4}]{} & \boxed{B(H_{1/4})} \\ \text{初期波動関数:} u_0 & & \end{array}$$

しかしながら、, $A_0(= A)$ と $\Phi_{0,1/4}A_0(= B)$ は非可換で、すなわち、

$$AB - BA = x(x + \frac{1}{4i}\frac{d}{dx}) - (x + \frac{1}{4i}\frac{d}{dx})x = i/4 \neq 0$$

となる. したがって、実現因果観測量は存在しない. この意味では、

粒子 $P$ の軌道は無意味である.

### 10.3.2 そうならば、近似的軌道を考える

粒子 $P$ の軌道は厳密な意味では無意味であるが、近似的には意味を持つ. これを以下のように考える. 自己共役作用素の組 $\{A, B\}$ の近似同時測定 (= 定義 4.13) を復習しよう.

**定義 10.11.** (=定義 4.13). $A$ と $B$ をヒルベルト空間 $H$ 上の自己共役作用素とする. 4 つ組 $(K, s, \widehat{A}, \widehat{B})$ が次を満たすとき、$A$ と $B$ の近似同時観測量と呼ぶ.

(A$_1$) $K$ はヒルベルト空間、. $s \in K$, $\|s\|_K = 1$ とする. $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ はテンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ 上の可換な自己共役作用素で、次の平均値一致条件を満たす：

$$\langle u \otimes s, \widehat{A}(u \otimes s)\rangle = \langle u, Au\rangle, \qquad \langle u \otimes s, \widehat{B}(u \otimes s)\rangle = \langle u, Bu\rangle \tag{10.9}$$
$$(\forall u \in H, \|u\|_H = 1)$$

また, 測定 $\mathsf{M}_{B(H\otimes K)}(\mathsf{O}_{\widehat{A}} \times \mathsf{O}_{\widehat{B}}, S_{[\widehat{\rho}_{us}]})$ は、$\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_A,\ S_{[\rho_u]})$ と $\mathsf{M}_{B(H)}(\mathsf{O}_B,\ S_{[\rho_u]})$ との近似同時測定と呼ばれる. ここに、

$$\widehat{\rho}_{us} = |u \otimes s\rangle\langle u \otimes s| \qquad (\|s\}_K = 1)$$

さらに、近似同時測定 $\mathsf{M}_{B(H\otimes K)}(\mathsf{O}_{\widehat{A}}\times\mathsf{O}_{\widehat{B}}, S_{[\widehat{\rho}_{us}]})$ の誤差を以下のように定義する：
(A$_2$) $\Delta^{\widehat{\rho}_{us}}_{\widehat{N}_1}$ $(=\|(\widehat{A}-A\otimes I)(u\otimes s)\|)$, $\Delta^{\widehat{\rho}_{us}}_{\widehat{N}_2}$ $(=\|(\widehat{B}-B\otimes I)(u\otimes s)\|)$

さて、近似同時観測量 $(K, s, \widehat{A}, \widehat{B})$ を以下のように構成しよう.

$$K = L^2(\mathbb{R}_y), \qquad s(y) == \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega_1|y|^2}{2}\right)$$

ここで $\omega_1$ は後に、$\omega_1 = 4,\ 16,\ 64$ と考える. ここで、$\|s\|_{L^2(\mathbb{R}_y)} = 1$ (i.e., $\|s\|_K = 1$ ) として、次を満たすとしよう：

$$\langle s, As\rangle = \langle s, Bs\rangle = 0 \tag{10.10}$$

さらに、

$$\widehat{A} = A\otimes I + 2I\otimes A$$
$$\widehat{B} = B\otimes I - \frac{1}{2}I\otimes B$$

として、可換性 (i.e., $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{A}$ ) に注意しよう. また、(10.10) によって、

$$\langle u\otimes s, \widehat{A}(u\otimes s)\rangle = \langle u\otimes s, (A\otimes I + 2I\otimes A)(u\otimes s)\rangle = \langle u, Au\rangle \tag{10.11}$$
$$\langle u\otimes s, \widehat{A}(u\otimes s)\rangle = \langle u\otimes s, (B\otimes I - 2I\otimes A)(u\otimes s)\rangle = \langle u, Bu\rangle \tag{10.12}$$
$$(\forall u\in H, i = 1, 2)$$

だから、近似同時測定 $\mathsf{M}_{B(H\otimes K)}(\mathsf{O}_{\widehat{A}}\times\mathsf{O}_{\widehat{B}}, S_{[\widehat{\rho}_{us}]})$ を得る. したがって、誤差は以下のように計算できる.

$$\delta_0 = \Delta^{\widehat{\rho}_{us}}_{\widehat{N}_1} = \|(\widehat{A}-A\otimes I)(u\otimes s)\| = \|2(I\otimes A)(u\otimes s)\| = 2\|As\| \tag{10.13}$$
$$\delta_{1/4} = \Delta^{\widehat{\rho}_{us}}_{\widehat{N}_2} = \|(\widehat{B}-B\otimes I)(u\otimes s)\| = (1/2)\|(I\otimes B)(u\otimes s)\| = (1/2)\|Bs\| \tag{10.14}$$

並行測定

$\Big((x$

これは以下

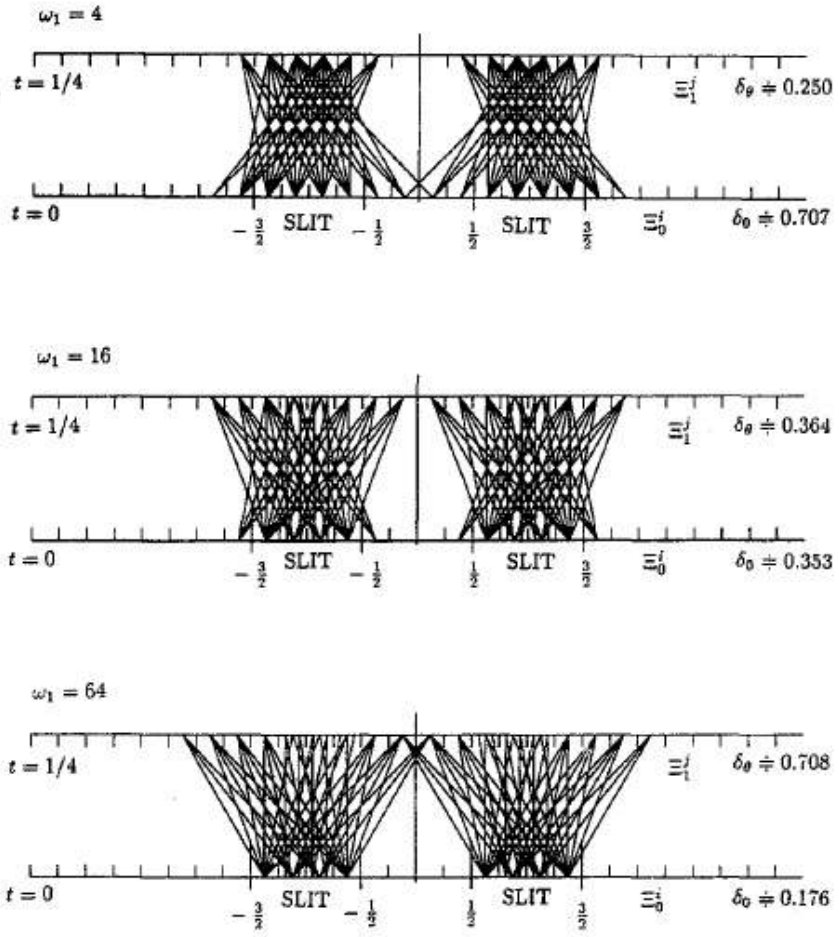



Figure10.5: 2 点 (i.e., $x_k$ and $x'_k$) $(k = 1, 2, ...)$ を線分で結ぶ

ここで、$\delta_\theta (= \delta_{1/4})$ と $\delta_0$ は $\omega_1$ に依存することに注意せよ.

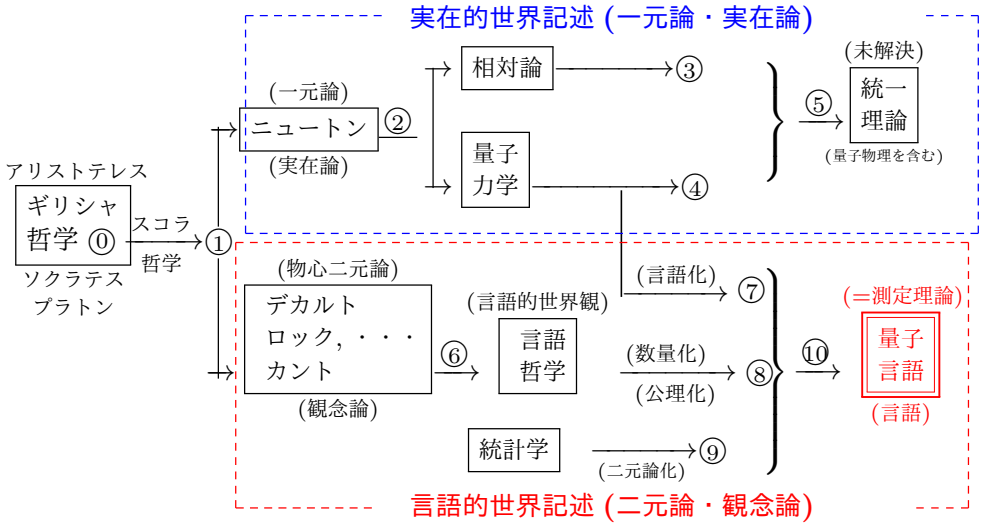
♠ **注釈 10.5.** この節の議論の詳細は、以下を見よ：

($\sharp_1$) [23]: S. Ishikawa, *Uncertainties and an interpretation of nonrelativistic quantum theory,* International Journal of Theoretical Physics 30, 401–417 (1991)
doi: 10.1007/BF00670793

($\sharp_2$) [24]: Ishikawa, S., Arai, T. and Kawai, T. *Numerical Analysis of Trajectories of a Quantum Particle in Two-slit Experiment,* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 33, No. 6, 1265-1274, 1994
doi: 10.1007/BF00670793

## 10.4 二種類のトンデモ性—観念論と二元論

何度も繰り返し述べているように、我々の主張は下図である：




測定理論は「二種類のトンデモ性」を持つ．すなわち，「観念論＝言語的科学観」と思って，

$$(\sharp_2)\ \text{測定理論の「トンデモ性」}\begin{cases}\text{観念論}\quad\cdots\quad\text{言語的科学観}\\ \qquad\qquad\text{(靴に足を合わせる:10.4.2 節)}\\ \text{二元論}\quad\cdots\quad\text{測定}\\ \qquad\qquad\text{(観客は舞台に上がらない:10.4.1 節)}\end{cases}$$

となる．本節では，この「トンデモ性」についての注意を述べる．

### 10.4.1 測定—観客は舞台に上がらない

日常言語は，一元論とか二元論とかが決まっているわけでなくて，「時制」も当たり前のこととして，取り込んで渾然一体としてしまうモンスター言語である．日常言語のコギト命題「我思う、故に我あり」は一人称的記述であり、二元論的もどきであったが、観客が舞台に上がってしまったので、量子言語による記述ではない．観客が舞台に影響をあたえてはならないのだから、波束の収縮も禁忌である．

**問題 10.12.** **[観客は舞台に上がらない]** 高校の数学の教科書から，日常言語で記述された次の問題を考えよう．次の手順 (a) と (b) を考える:

(a) 壷の中に，白球と黒球が，それぞれ $m$ 個と $n$ 個入っている．壷の中から球を一つ取り出して，もしそれが白球ならば，手元におく．もしそれが黒球ならば，壷の中に戻す．この試行を 3 回行う．また，最初に，壷の中に，白球と黒球が，それぞれ 3 個と 2 個入っているとする．

(b) (a) の試行後に，手元に白球が 2 つになる確率を求めよ．

**解答** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする．壷の中に，白球と黒球が，それぞれ $m$ 個と $n$ 個入っている状態を，

$(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ と記す．双対因果写像 $\Phi^* : \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{N}_0^2) \to \mathcal{M}_{+1}(\mathbb{N}_0^2)$ を，点測度 $\delta_{(\cdot)}$ を使って表現すると，

$$\Phi^*(\delta_{(m,n)}) = \begin{cases} \frac{m}{m+n}\delta_{(m-1,n)} + \frac{n}{m+n}\delta_{(m,n)} & (m \neq 0 \text{ のとき}) \\ \delta_{(0,n)} & (m = 0 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{10.15}$$

$T = \{0,1,2,3\}$ を離散時間として，各 $t \in T$ に対して，$\Omega_t = \mathbb{N}_0^2$ とする．したがって，

$$\begin{aligned}
&[\Phi^*]^3(\delta_{(3,2)}) = [\Phi^*]^2\left(\frac{3}{5}\delta_{(2,2)} + \frac{2}{5}\delta_{(3,2)}\right) \\
=&\Phi^*\left((\frac{3}{5}(\frac{2}{4}\delta_{(1,2)} + \frac{2}{4}\delta_{(2,2)}) + \frac{2}{5}(\frac{3}{5}\delta_{(2,2)} + \frac{2}{5}\delta_{(3,2)})\right) \\
=&\Phi^*\left(\frac{3}{10}\delta_{(1,2)} + \frac{27}{50}\delta_{(2,2)} + \frac{4}{25}\delta_{(3,2)}\right) \\
=&\frac{3}{10}(\frac{1}{3}\delta_{(0,2)} + \frac{2}{3}\delta_{(1,2)}) + \frac{27}{50}(\frac{2}{4}\delta_{(1,2)} + \frac{2}{4}\delta_{(2,2)}) + \frac{4}{25}(\frac{3}{5}\delta_{(2,2)} + \frac{2}{5}\delta_{(3,2)}) \\
=&\frac{1}{10}\delta_{(0,2)} + \frac{47}{100}\delta_{(1,2)} + \frac{183}{500}\delta_{(2,2)} + \frac{8}{125}\delta_{(3,2)}
\end{aligned} \tag{10.16}$$

$C(\Omega_3)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, F)$ を，次のように定める:

$$[F(\Xi)](m,n) = \begin{cases} 1 & (m,n) \in \Xi \times \mathbb{N}_0 \subseteq \Omega_3 \\ 0 & (m,n) \notin \Xi \times \mathbb{N}_0 \subseteq \Omega_3 \end{cases}$$

したがって，測定 $\mathsf{M}_{Linfty(\mathbb{N}_0^2)}(\Phi^3\mathsf{O}, S_{[(3,2)]})$ により，測定値「2」を得る確率，すなわち，手元に白球が 2 つ残る確率は，

$$[\Phi^3(F(\{2\}))](3,2) = \int_{\Omega_3} [F(\{2\})](\omega)([\Phi^*]^3(\delta_{(3,2)}))(d\omega) = \frac{183}{500} \tag{10.17}$$

である． □

上は簡単な演習問題であったが，次の (c) は注意すべきである．

(c) (a) の部分は因果関係で，(b) の部分が測定に関係する．

通常は，(a) の部分でも，測定者が活躍しているように考えるかもしれないが，測定理論では，言語的解釈では，測定対象の中に，測定者が登場することはない．喩えて言うならば，

観客は舞台に上がらない

であり，したがって，(a) の文言の中の「試行者」は，測定者 (=我) でない．「ロボット」と思うのがわかり易い．

♠ **注釈 10.6.** それでは，「注意 6.25 の手続き (a) 内には，『確率概念』は無いのか？」と問うかもしれない．これは「測定 (言語ルール 1 (測定;2.7 節)) の確率」とは違うので，測定理論 (=量子言語) の原則に従うならば，手続き (a) 内には，「確率概念」は無いと言うしかない．したがって，「測定対象内の確率」には，別の名前，たとえば，「マルコフ確率」などして区別するのも一つの方法である．ただし，本書では，「測定なくして，確率なし」の量子力学の精神に従っているので，「マルコフ確率」という言葉は使わない．すなわち，

($\sharp_1$) 量子力学で「確率」を表現するときの文言と同じ形の文言で表現されるものを測定理論でも「確率」と呼びたい，すなわち，言語的解釈は，量子力学と測定理論で共通と思いたい

からである．

### 10.4.2 言語的科学観—靴に足を合わせる

日常言語は，何でも曖昧に取り込んで渾然一体としてしまうモンスター言語である．日常会話では，一元論とか二元論とかが決まっているわけでなくて，「時制」も当たり前のこととして，臨機応変に会話する．したがって，当然であるが，「測定」と「因果関係」という言葉の使い方も，測定理論と日常言語ではズレがある．と言うより，日常言語の中では，「測定」と「因果関係」という言葉は気分で使われているに過ぎない．本節では，このズレについての注意点を述べる．

**注意 10.13.** **[測定と因果関係の混用 (例 2.31 の続き)]** 例 2.31 の [コップの水の冷・熱の測定] を思い出そう．測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{冷熱}, S_{[\delta_\omega]})$ で，$\omega = 5$ ℃ の場合に，

(a) **測定** $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}_{冷熱}, S_{[\omega(=5)]})$ により得られる**測定値** $x(\in X = \{\text{冷}, \text{熱}\})$ が，

$$\text{集合}\begin{bmatrix} \emptyset(=\text{空集合}) \\ \{\text{冷}\} \\ \{\text{熱}\} \\ \{\text{冷}, \text{熱}\} \end{bmatrix}\text{に属する確率は}\begin{bmatrix} 0 \\ [F(\{\text{冷}\})](5) = 1 \\ [F(\{\text{熱}\})](5) = 0 \\ 1 \end{bmatrix}\text{である．}$$

と記述した．ここで，「5 ℃」が原因で，「冷たい」が結果，とは考えない．すなわち，

(b) $$\underset{(\text{原因})}{\boxed{5\,℃}} \longrightarrow \underset{(\text{結果})}{\boxed{\text{冷たい}}}$$

を「因果関係」と考えなかった．その理由は，もちろん，言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) が使われていないからである．測定理論では，因果関係は，測定対象内だけの関係で，「測定者と測定対象にまたがる」ことはない．日常会話の中では，一元論と二元論の区別なく混用されているので注意が必要である．

♠ **注釈 10.7.** もちろん，「見方」の問題で，上の (b) を，「測定」と見ないで，「現象」と見ることもできる．すなわち，冷熱–測定器の内部回路と思えば，「因果関係」である．つまり，双対因果作用素 $\Phi^* : \mathcal{M}([0, 100]) \to \mathcal{M}(\{\text{冷}, \text{熱}\})$ を

$$[\Phi^*\delta_\omega](D) = f_{冷}(\omega) \cdot \delta_{冷}(D) + f_{熱}(\omega) \cdot \delta_{熱}(D) \qquad (\forall\omega \in [0, 100]$$
$$\forall D \subseteq \{\text{冷}, \text{熱}\})$$

と定めれば，因果関係と見ることもできる．すなわち，

(♯) **同じことでも記述の仕方により「測定」にも「因果関係」にもなる**

のが，言語的世界記述法である．

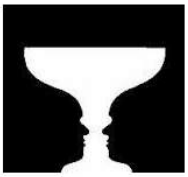
**注意 10.14.** **[混合測定とマルコフ因果関係の混用 ( (壷問題:混合測定) からの続き)]** 解答 7.13(壷問題：ベイズ混合測定) を再考しよう．状態空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ を考えて，$C(\Omega)$ 内の観測量 $\mathsf{O} = (\{\text{白}, \text{黒}\}, 2^{\{\text{白}, \text{黒}\}}, F)$ を (7.15) 式で定義し，点測度 $\delta_{(\cdot)}$ を用いて，混合状態を $\nu_0 = p\delta_{\omega_1} + (1-p)\delta_{\omega_2}$ とした．このとき，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\nu_0))$ によって，測定値 $x$ $(\in \{\text{白}, \text{黒}\})$ が得られる確率は

$$\begin{aligned} P(\{x\}) &= \int_\Omega [F(\{x\})](\omega)\nu_0(d\omega) = p[F(\{x\})](\omega_1) + (1-p)[F(\{x\})](\omega_2) \\ &= \begin{cases} 0.8p + 0.4(1-p) & (x = \text{白 のとき}) \\ 0.2p + 0.6(1-p)) & (x = \text{黒 のとき}) \end{cases} \end{aligned} \tag{10.18}$$

であった．さて，ここで新たな状態空間 $\Omega_0$ を 1 点 $\omega_0$ からなる集合，すなわち，$\Omega_0 = \{\omega_0\}$ と定める．双対マルコフ因果作用素 $\Phi^* : \mathcal{M}_{+1}(\Omega_0) \to \mathcal{M}_{+1}(\Omega)$ を，$\Phi^*(\delta_{\omega_0}) = p\delta_{\omega_1} + (1-p)\delta_{\omega_2}$ として，マルコフ因果作用素 $\Phi : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega_0)$ を定める．ここで，純粋測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\omega_0]})$ を考えよう．この測定により，測定値 $x$ ($\in \{$ 白, 黒 $\}$) が得られる確率は，

$$
\begin{aligned}
P(\{x\}) &= [\Phi(F(\{x\}))](\omega_0) = \int_\Omega [F(\{x\})](\omega)\nu_0(d\omega) \\
&= \begin{cases} 0.8p + 0.4(1-p) & (x = \text{白 のとき}) \\ 0.2p + 0.6(1-p)) & (x = \text{黒 のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となり，上の (10.18) 式と同じになる．　　したがって，混合測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega)}(\mathsf{O}, S_{[*]}(\nu_0))$ を純粋測定 $\mathsf{M}_{L^\infty(\Omega_0)}(\Phi\mathsf{O}, S_{[\omega_0]})$ と見なすことができたことになる．



♠ **注釈 10.8.** 解答 7.13 の「事前確率 (=混合状態)」が，注意 10.14 では，「マルコフ確率」になったことに注意すべきである．すなわち，

(♯)　　**概念は，記述の仕方に依存する**

のが，言語的世界記述法である．これを「トンデモ」と思うとしたら，実在的科学観の刷り込みに起因すると考える．実在的記述法に慣れた感覚からすると，妙な感じがすると思うが，言語的記述法とはこういうものである．ニーチェ (1844 年–1900 年) の有名な言葉：

**「事実などは存在しない，あるのは解釈だけ」**

を思い出そう．測定理論は，物理学とはまったく別の原理 (すなわち，「言葉が先，世界が後」) から成り立っていることに注意すべきである注釈 1.3 で述べたように，「○○とは，何か？」という問い掛けに対して真摯な態度を取らなかった理由は，上の (♯) に依拠する．これが言語的世界観で、 すなわち、

”足を (=世界) を靴 (言語) に合わせる”

である．

♠ **注釈 10.9.** 20 世紀の科学はいろいろあるにしても, 3 つ挙げるとしたら相対性理論,　量子力学, DNA 二重らせん構造の発見 (ワトソンとクリック) だろう.

クリックの著書「驚くべき仮説 (The astonishing hypothesis)」の冒頭に,

(a) You, your joys and your sorrows, your memories and your ambitions,your sense of personal identity and free will,are in fact no more than the behaviour of a vast assembly of nerve cells and their associated molecules.

つまり,

(a′) 我々の心のいろいろな現象–喜び, 悲しみ, 記憶, 志, 自我, 自由意志等–は非常に多くの分子と細胞の相互関係の表現に過ぎない

とヒューム (1711-1776) の考えに近い意見を述べている.

クリックは実体二元論 (この世界にはモノとココロという本質的に異なる独立した 二つの実体がある、とする考え方) を否定しているが (というか、実体二元論など信じているのは異端の宗教家だけだろうが)、もちろん、クリックは言語的二元論 (測定者と測定対象) を否定しているわけではない.

量子言語の主張は,

(b) 一元論的な現象を, 二元論的言語で記述する

のだから, クリックの主張 (a)(=大部分の科学者の意見) は二元論と矛盾するわけではない.

クリックの主張を最大限に拡張解釈するならば、

(c)「心」、「生命」は科学的テーマであって、哲学的テーマでない

となる. もちろん、「心」、「生命」という語を使って倫理・道徳を論じることの有効性を否定しているわけではない. また、「心」、「生命」をキーワードとした文芸的随筆に納得させられることがあることを否定するものではない. しかし、ここでの講義は理系の大学院の講義であり、理系の大学院生しか聴講していないとするならば、

(d)「心」に興味があるならば、脳科学・AI をやれ！

と言うのは当然だろう.

また、心身問題の量子言語的解答については、次の文献 [51] を見よ：

(f) S. Ishikawa, *A final solution to the mind-body problem by quantum language* JQIS, Vol. 7, No.2, 48-56, 2017,
(`http://www.scirp.org/Journal/PaperInformation.aspx?PaperID=76391`)