

Title	第4講：言語的コペンハーゲン解釈(主に量子系)
Sub Title	
Author	石川, 史郎(Ishikawa, Shiro)
Publisher	
Publication year	2018
Jtitle	コペンハーゲン解釈; 量子哲学 (2018. 3) ,p.123- 172
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	慶應義塾大学理工学部大学院講義ノート(Web版)
Genre	Book
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=KO52003002-00000000-0123

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

第 4 講

言語的コペンハーゲン解釈 (主に量子系)

測定理論は次のように定式化され、

$$\bullet \quad \boxed{\text{測定理論}} \quad \begin{array}{c} \text{[言語ルール 1]} \\ \text{(=量子言語)} \end{array} := \underbrace{\boxed{\text{測定}} + \boxed{\text{因果関係}}}_{\substack{\text{[言語ルール 2]} \\ \text{(cf. 2.7 節)} \quad \text{(cf. 8.3 節)}}} + \underbrace{\boxed{\text{言語的解釈}}}_{\substack{\text{[言語的コペンハーゲン解釈]} \\ \text{(cf. 3.1 節)}}} \\ \text{一種の呪文 (ア・プリオリな認識)} \quad \text{呪文の使い方のマニュアル}$$

測定理論は

言語ルール 1 (測定;2.7 節) と言語ルール 2 (因果関係;8.3 節) の「言葉遣い」を手本に言語的解釈を指針として、諸科学を記述せよ

と主張する。本章では、測定に関する言語ルール 1 (測定;2.7 節) の使い方の指針 (言語的解釈) を説明する。前章の続きであるが、本章では、量子系に重きをおく。

4.1 量子言語のコルモゴロフの拡張定理

コルモゴロフの確率論 (cf. 文献 [57]) は次の呪文からスタートする:

(A₁) 確率空間 $(X, \mathcal{F}, P)$ を考える。このとき、事象 $\Xi (\in \mathcal{F})$ が起こる確率は、 $P(\Xi)$ で与えられる。

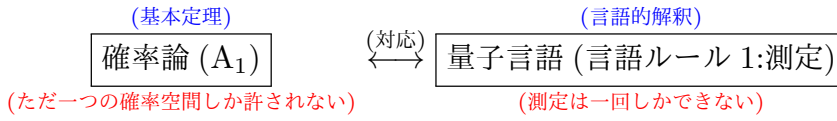
この (A₁) からスタートして、試行錯誤の末、コルモゴロフは、「コルモゴロフの拡張定理」を発見した。ここで、「コルモゴロフの拡張定理」の精神とは、

(A₂) **ただ一つの確率空間しか許されない**



Kolmogorov (1903-1987)
One of founders of probability theory

であることを思い出そう。したがって、次の対応を考えたい。



こうなると、

(A₃) コルモゴロフは、言語的解釈の発見者の一人である。

と考えたい。コルモゴロフならば試行錯誤をあまりしなくても会得出来たことかもしれないが、

(A₄) 言語的解釈「測定は一回だけ」は誰でも試行錯誤を繰り返しながら言語ルール 1(測定) を使っていれば会得できるはずのもの

と考える。

確率論の基礎概念は「確率空間」で、コルモゴロフの拡張定理は確率空間の存在保証のために使われる。しかし、測定理論は、「測定」が基礎概念で、したがって、

(A) 測定理論では、測定 (すなわち、観測量) の存在保証の定理が基本的で、これが、定理 4.1(測定理論版のコルモゴロフの拡張定理) である。

本節では、これについて述べる。

$\tilde{\Lambda}$ を集合とする。各 $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ の対して、集合 X_λ を考える。任意の部分集合 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 (\subseteq \tilde{\Lambda})$ に対して、自然な射影写像 $\pi_{\Lambda_1, \Lambda_2} : \prod_{\lambda \in \Lambda_2} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda_1} X_\lambda$ を

$$\prod_{\lambda \in \Lambda_2} X_\lambda \ni (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_2} \mapsto (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_1} \in \prod_{\lambda \in \Lambda_1} X_\lambda \quad (4.1)$$

によって定める。

次の定理は観測量の存在と一意性を保証する。これは多くの観測量を一つの観測量にまとめるための定理で、

「測定は一回だけ (3.1 節の言語的コペンハーゲン解釈 (E₄))」

の要請に依拠することは容易に察しがつくと思う。

定理 4.1. [測定理論版のコルモゴロフの拡張定理 (= 観測量・測定の存在定理)] 基本構造 $[A \subseteq \bar{A} \subseteq B(H)]$ を考える. $\tilde{\Lambda}$ を任意の集合とする. 各 $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ に対して, 可測空間 $(X_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ を考える. ただし, X_λ は可分完備距離空間, $\mathcal{F}_\lambda$ はボレル集合体とする. 集合族 $\mathcal{P}_0(\tilde{\Lambda})$ を $\mathcal{P}_0(\tilde{\Lambda}) = \{\Lambda \subseteq \tilde{\Lambda} \mid \Lambda \text{ は有限集合}\}$ と定める. $\bar{A}$ 内の観測量の族 $\{O_\Lambda = (\times_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \boxtimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda, F_\Lambda) \mid \Lambda \in \mathcal{P}_0(\tilde{\Lambda})\}$ は次の一貫性条件を満たすと仮定する:

$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ を満たす任意の $\Lambda_1, \Lambda_2 (\in \mathcal{P}_0(\tilde{\Lambda}))$ に対して, 次が成立する:

$$F_{\Lambda_2}(\pi_{\Lambda_1, \Lambda_2}^{-1}(\Xi_{\Lambda_1})) = F_{\Lambda_1}(\Xi_{\Lambda_1}) \quad (\forall \Xi_{\Lambda_1} \in \boxtimes_{\lambda \in \Lambda_1} \mathcal{F}_\lambda) \quad (4.2)$$

このとき, 次を満たす $\bar{A}$ 内の観測量 $\hat{O}_{\tilde{\Lambda}} = (\times_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} X_\lambda, \boxtimes_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} \mathcal{F}_\lambda, \hat{F}_{\tilde{\Lambda}})$ が唯一存在する:

$$\hat{F}_{\tilde{\Lambda}}(\pi_{\Lambda, \tilde{\Lambda}}^{-1}(\Xi_\Lambda)) = F_\Lambda(\Xi_\Lambda) \quad (\forall \Xi_\Lambda \in \boxtimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda, \forall \Lambda \in \mathcal{P}_0(\tilde{\Lambda})) \quad (4.3)$$

証明*¹ 確率論のコルモゴロフの拡張定理の証明とほぼ同様に証明できる. □

この定理から, 次の系を得る:

系 4.2. [無限同時観測量] 基本構造 $[A \subseteq \bar{A} \subseteq B(H)]$ を考える. $\tilde{\Lambda}$ を任意の集合とする. 各 $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ に対して, X_λ は可分完備距離空間, $\mathcal{F}_\lambda$ はそのボレル集合体とする. 各 $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ に対して, $\bar{A}$ 内の観測量 $O_\lambda = (X_\lambda, \mathcal{F}_\lambda, F_\lambda)$ を考える. このとき, 同時観測量 $\hat{O} = (\times_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} X_\lambda, \boxtimes_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} \mathcal{F}_\lambda, \hat{F} = \times_{\lambda \in \tilde{\Lambda}} F_\lambda)$ が唯一存在する. すなわち, 任意の有限集合 $\Lambda_0 (\subseteq \tilde{\Lambda})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\hat{F}((\times_{\lambda \in \Lambda_0} \Xi_\lambda) \times (\times_{\lambda \in \tilde{\Lambda} \setminus \Lambda_0} X_\lambda)) = \times_{\lambda \in \Lambda_0} F_\lambda(\Xi_\lambda) \quad (\forall \Xi_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda_0) \quad (4.4)$$

注意 4.3. [コルモゴロフの拡張定理の必然性] 確率論という数学の中で, コルモゴロフの拡張定理は最も基本的である (cf. [57]). しかし,

- なぜコルモゴロフの拡張定理は最も基本的なのか?

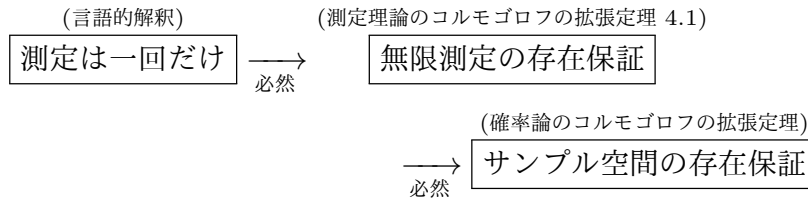
は愚問である. なぜならば, 数学の中に「なぜ?」という問い掛けはないからで, 「結果論」でしかないからである. しかし, 強いて言うならば,

^{*1} 証明は次を見よ.

- (a) 文献 [28]: S. Ishikawa, etc. A dynamical system theoretical approach to Newtonian mechanics, Far east J. dynamical systems **1** 1-34, 1999 (PDF)
- (b) 文献 [30]: S. Ishikawa, “Mathematical Foundations of Measurement Theory,” Keio University Press Inc. 335pages, 2006.

- コルモゴロフの拡張定理が成立するように「確率空間」を定義した

からである。しかし、測定理論の観点からは、重要さの連鎖が次のように言える



また、“測定は一回だけ”と“状態は動かない”等は、パルメニデスの次の言葉を連想させる：

{ “多” は無い。在るのは、“一”だけ。
運動は存在しない。

したがって、パルメニデス (BC. 515 年頃生誕) は、言語的コペンハーゲン解釈の提案者の一人と思いたい。また、確率論の基本定理である「コルモゴロフの拡張定理」の主張は、「確率空間は一つだけ」であり、これは「測定は一回だけ」と同じと見たい。したがって、コルモゴロフも、言語的コペンハーゲン解釈の提案者の一人と思いたい。



4.2 量子言語における大数の法則

4.2.1 無限並行測定 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_{\bar{\mathcal{A}}}(\hat{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ のサンプル確率空間

第 3 章では, 一般基本構造 $[\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を, 分類 (量子系と古典系) してそれに対応する **状態空間** を考えた. すなわち,

$$(C) \quad \text{一般基本構造 } [\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}]_{B(H)} \\ \text{状態空間 } [\mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*), \mathfrak{S}^m(\mathcal{A}^*), \bar{\mathfrak{S}}^p(\bar{\mathcal{A}}_*)] \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} (C_1): \text{量子基本構造 } [\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)} \\ \text{状態空間 } [\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)), \mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(H)) = \bar{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(H))] \\ \\ (C_2): \text{古典基本構造 } [C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega, \nu)]_{B(L^2(\Omega, \nu))} \\ \text{状態空間 } [\Omega, \mathcal{M}_{+1}(\Omega), L^\infty(\Omega, \nu)] \end{array} \right.$$

を議論した.

測定 $M_{\bar{\mathcal{A}}}(\hat{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ のサンプル空間を $(X, \mathcal{F}, P_\rho)$ とする.

無限テンソル W^* 代数 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \bar{\mathcal{A}}$ 内の無限並行観測量 $\tilde{O} (= \bigotimes_{k=1}^{\infty} O) = (X^{\mathbb{N}}, \quad \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \tilde{F} (= \bigotimes_{k=1}^{\infty} F))$ の存在はコルモゴロフの存在定理 (系 4.2) で保証されている. これを, 具体的な (量子系の場合と古典系の場合) 場合について, 以下に見よう.

準備 4.4.

[I]: 量子系の場合: 基本構造が $[\mathcal{C}(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H) \subseteq B(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H)]_{B(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H)}$ で, したがって, 状態空間は,

$$\mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H)) \subset \mathfrak{S}^m(\mathcal{T}r(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H)) = \bar{\mathfrak{S}}^m(\mathcal{T}r(\bigotimes_{k=1}^{\infty} H)) \quad (4.5)$$

となる. よって, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\rho \ (\forall \rho \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H)))$ とできて, 無限並行測定 $M_{\bigotimes_{k=1}^{\infty} B(H)}(\bigotimes_{k=1}^{\infty} O = (X^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \bigotimes_{k=1}^{\infty} F), S_{[\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho]})$ のサンプル空間 $(X^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, P_{\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho})$ は,

$$\begin{aligned} & P_{\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n \times (\bigotimes_{k=n+1}^{\infty} X)) \\ &= \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{T}r(H) \left(\rho, F(\Xi_k) \right)_{B(H)} \\ & \quad (\forall \Xi_k \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_\rho, (k = 1, 2, \dots, n), n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4.6)$$

で定めることができる.

[II]: 古典系の場合 : 状態空間 Ω をコンパクト化して, さらに, $\nu(\Omega) = 1$ としても一般性を失わないことに注意しよう. このとき, 基本構造は

$$[C_0(\times_{k=1}^{\infty} \Omega) \subseteq L^{\infty}(\times_{k=1}^{\infty} \Omega, \otimes_{k=1}^{\infty} \nu) \subseteq B(L^2(\times_{k=1}^{\infty} \Omega, \otimes_{k=1}^{\infty} \nu))] \quad (4.7)$$

となり, したがって, 状態空間は,

$$\mathfrak{S}^p(C_0(\times_{k=1}^{\infty} \Omega)^*) (= \times_{k=1}^{\infty} \Omega) \subset \mathcal{M}_{+1}(\times_{k=1}^{\infty} \Omega, L_{+1}^1(\times_{k=1}^{\infty} \Omega, \otimes_{k=1}^{\infty} \nu)) \quad (4.8)$$

となる. 仮定 2.19 より, 無限並行測定 $M_{B(\otimes_{k=1}^{\infty} H)}(\otimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{O} = (X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \otimes_{k=1}^{\infty} F), S_{[\otimes_{k=1}^{\infty} \rho]})$ のサンプル空間 $(X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, P_{\otimes_{k=1}^{\infty} \rho})$ は,

$$\begin{aligned} & P_{\otimes_{k=1}^{\infty} \rho}(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \cdots \times \Xi_n \times (\bigtimes_{k=n+1}^{\infty} X)) \\ &= \bigtimes_{k=1}^n \mathcal{T}_{r(H)}\left(\rho, F(\Xi_k)\right)_{B(H)} \\ & \quad (\forall \Xi_k \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\rho}, (k = 1, 2, \dots, n), n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4.9)$$

で定めることができる.

[III]: 結論 : したがって, 仮定 2.19 の下に,

いずれの場合も, サンプル空間 $(X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, P_{\otimes_{k=1}^{\infty} \rho})$

を持つ. しかも, これは $(X, \mathcal{F}, P_{\rho})$ の無限直積確率空間 $(X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \otimes_{k=1}^{\infty} P_{\rho})$ に等しい.

定理 4.5. [大数の法則]

測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$ のサンプル空間を $(X, \mathcal{F}, P_{\rho})$ とする. 無限テンソル W^* 代数 $\otimes_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{A}}$ 内の無限並行観測量 $\hat{\mathbf{O}} (= \otimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{O}) = (X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \tilde{F} (= \otimes_{k=1}^{\infty} F))$ の存在はコルモゴロフの存在定理 (系 4.2) で保証されている.

さて, 無限並行測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\hat{\mathbf{O}} = (X, \mathcal{F}, F), S_{[\rho]})$, すなわち,

$M_{\otimes_{k=1}^{\infty} \overline{\mathcal{A}}}(\otimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{O} = (X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \otimes_{k=1}^{\infty} F), S_{[\otimes_{k=1}^{\infty} \rho]})$ を考える.

サンプル空間 $(X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, P_{\otimes_{k=1}^{\infty} \rho})$ はサンプル空間 $(X, \mathcal{F}, P_{\rho})$ の無限直積確率空間 $(X^{\mathbb{N}}, \boxtimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}, \otimes_{k=1}^{\infty} P_{\rho})$ に等しい. さらに,

(A) 任意の $f \in L^1(X, P_{\rho})$ に対して,

$$D_f = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = E(f) \right\} \quad (4.10)$$



(ここに, $E(f) = \int_X f(x)P_\rho(dx)$ は f の期待値)

とすると, 次が成立する.

$$\left[\bigotimes_{k=1}^{\infty} P_\rho \right] (D_f) \left(= [P_{\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho}] (D_f) \right) = 1 \quad (4.11)$$

すなわち, ほとんど確実に

$$\boxed{\int_X f(x)P_\rho(dx)} = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}} \quad (4.12)$$

(期待値の計算) (標本平均)

が言える.

////

注意 4.6. ここで, f が $\Xi (\in \mathcal{F})$ の定義関数の場合 (すなわち, $f = \chi_\Xi$) を考えよう. このとき,

$$D_{\chi_\Xi} = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sharp[\{k \mid x_k \in \Xi, 1 \leq k \leq n\}]}{n} = P_\rho(\Xi) \right\} \quad (4.13)$$

(ここで, $\sharp[A]$ は集合 A の要素の個数)

とすると, 次が成立する.

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{\infty} \rho} (D_{\chi_\Xi}) = 1 \quad (4.14)$$

したがって, 大数の法則は,

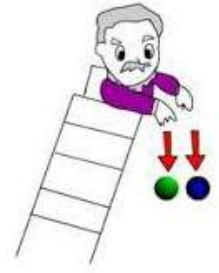
(#) 言語ルール 1 (測定;2.7 節) の「確率」は, 「頻度確率」と解釈できる

を主張している.

////

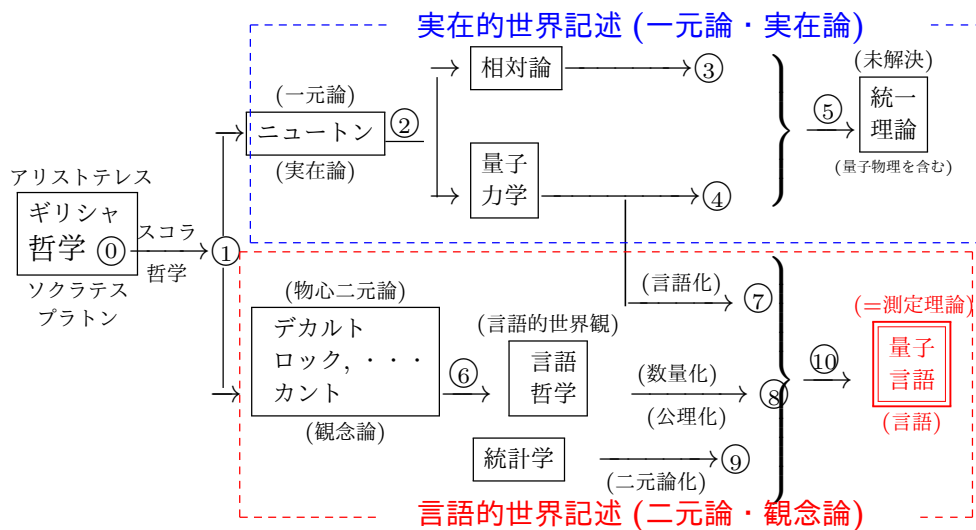
補足 4.1. ベルヌーイ (1654-1705) の業績 (=大数の法則) の偉大さは, ガリレオ (1564-1642) のそれに匹敵すると思う. すなわち,

- $$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1}: \text{実在的科学観の数量的嚆矢} \cdots \text{ガリレオ} \\ \textcircled{2}: \text{言語的科学観の数量的嚆矢} \cdots \text{ベルヌーイ} \end{array} \right.$$



と思う。物理学者は科学者の中では少数派であって、ほとんどの科学者が言語的科学観の傘下にある。それにもかかわらず、言語的科学観内での業績はかなり過小評価されていることが多い。ガリレオが教会から弾圧されたとしても、無視されたベルヌーイよりは幸運だったのかもしれない。

ガリレオの仕事はニュートン等を引き継がれたが、デカルト、ロック、バークリー、ライプニッツ等による言語的科学観の本流は文系的認識論に拘って、ベルヌーイの仕事は置き去りにされてしまった(下図参照(1.1節の主張1.1))。ニュートンとの対比で言うならば、推計統計学の祖フィッシャー(1890–1962)に引き継がれたといってもよいかもしれない。



4.2.2 標本平均, 標本分散, 不偏分散

測定 $M_{\mathcal{A}}(O = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F), S_{[\rho]})$ のサンプル空間を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_{\rho})$ とする. すなわち, , 測定値空間 $X = \mathbb{R}$ とする.

ここで,

$$\text{平均 } (\mu_O^{\rho}) : E[M_{\mathcal{A}}(O = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F), S_{[\rho]})] = \int_{\mathbb{R}} x P_{\rho}(dx) (= \mu) \quad (4.15)$$

$$\text{分散 } ((\sigma_O^{\rho})^2) : V[M_{\mathcal{A}}(O = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F), S_{[\rho]})] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 P_{\rho}(dx) \quad (4.16)$$

と定める.

さて, 並行測定 $\otimes_{k=1}^n M_{\mathcal{A}}(O, S_{[\rho]})$ によって, 測定値 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) (\in \mathbb{R}^n)$ が得られたとし

よう. ここで,

$$\text{標本分布 } (\nu_n) : \nu_n := \frac{\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n}}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{標本平均 } (\bar{\mu}_n) : \bar{E}[\otimes_{k=1}^n \mathbf{M}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}, S_{[\rho]})] &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} (= \bar{\mu}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \nu_n(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{標本分散 } (s_n^2) : \bar{V}[\otimes_{k=1}^n \mathbf{M}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}, S_{[\rho]})] &= \frac{(x_1 - \bar{\mu})^2 + (x_2 - \bar{\mu})^2 + \cdots + (x_n - \bar{\mu})^2}{n} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{\mu})^2 \nu_n(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{不偏分散 } (u_n^2) : \bar{U}[\otimes_{k=1}^n \mathbf{M}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}, S_{[\rho]})] &= \frac{(x_1 - \bar{\mu})^2 + (x_2 - \bar{\mu})^2 + \cdots + (x_n - \bar{\mu})^2}{n-1} \\ &= \frac{n}{n-1} \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{\mu})^2 \nu_n(dx) \end{aligned}$$

とする. これらと大数の法則との関係 (すなわち, 「 $n \rightarrow \infty$ 」の場合) は, 以下の通りである.

定理 4.7. [平均, 分散, 標本平均, 標本分散] 無限並行測定 $\otimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathbf{O} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F), S_{[\rho]})$ の測定値を $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とする. このとき, 大数の法則 (定理 4.5) から, 確率 1 で, 次が言える.

$$(4.15) = \text{平均 } (\mu_{\mathbf{O}}^{\rho}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} =: \bar{\mu} = \text{標本平均}$$

$$\begin{aligned} (4.16) = \text{分散 } (\sigma_{\mathbf{O}}^{\rho}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 - \mu_{\mathbf{O}}^{\rho})^2 + (x_2 - \mu_{\mathbf{O}}^{\rho})^2 + \cdots + (x_n - \mu_{\mathbf{O}}^{\rho})^2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 - \bar{\mu})^2 + (x_2 - \bar{\mu})^2 + \cdots + (x_n - \bar{\mu})^2}{n} =: \text{標本分散} \end{aligned}$$

////

例 4.8. [スペクトル分解] 基本構造 $[A \subseteq \bar{A} \subseteq B(H)]$ を量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$ とする. ヒルベルト空間 H 上の (非有界) 自己共役作用素 A のスペクトル分解 $\mathbf{O}_A = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F_A)$, すなわち,

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda F_A(d\lambda)$$

を $B(H)$ 内の射影観測量とする. つまり, 同一視:

$$\text{自己共役作用素 } A \xleftrightarrow{\text{同一視}} \text{スペクトル分解 } \mathbf{O}_A = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F_A)$$

の下に, 自己共役作用素 A は射影観測量 $O_A = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F_A)$ と見なせる. 状態 $\rho_u = |u\rangle\langle u| \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{T}r(H))$ を固定する. このとき,

$$\text{平均 } (\mu_{O_A}^{\rho_u}) : E[M_{B(H)}(O_A, S_{[|u\rangle\langle u|]})] = \int_{\mathbb{R}} \lambda \langle u, F_A(d\lambda)u \rangle = \langle u, Au \rangle \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \text{分散 } ((\sigma_{O_A}^{\rho_u})^2) : & V[M_{B(H)}(O_A, S_{[|u\rangle\langle u|]})] \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda - \langle u, Au \rangle)^2 \langle u, F_A(d\lambda)u \rangle \\ &= \|(A - \langle u, Au \rangle)u\|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる.

////

4.2.3 ロバートソンの不確定性原理

後出のハイゼンベルグの不確定性原理 (cf. 命題 4.10) の理解が不十分であった頃 (1991 年以前) は, 次の「ロバートソンの不確定性原理」は, ハイゼンベルグの不確定性原理と混同・理解されることが多かった.

定理 4.9. [ロバートソンの不確定性原理 (並行測定) (cf. [69])] 量子系の基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H) \subseteq B(H)]$ を考える. ヒルベルト空間 H 上の (非有界) 自己共役作用素 A_1 と A_2 を考えて, これらの観測量表示をそれぞれ

$$O_{A_1} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F_{A_1}) \quad \text{to} \quad O_{A_2} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F_{A_2})$$

とする. さて, 測定 $M_{B(H)}(O_{A_1}, S_{[\rho_u]})$ と $M_{B(H)}(O_{A_2}, S_{[\rho_u]})$ を考える. ここで, $\rho_u = |u\rangle\langle u| \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*)$, すなわち, $\rho_u = |u\rangle\langle u|$ は純粋状態. 二つの測定を考えるということは, **並行測定** $M_{B(\mathbb{C}^n)}(O_{A_1}, S_{[\rho_u]}) \otimes M_{B(\mathbb{C}^n)}(O_{A_2}, S_{[\rho_u]})$, つまり,

$$M_{B(H) \otimes B(H)}(O_{A_1} \otimes O_{A_2}, S_{[\rho_u \otimes \rho_u]})$$

を考えることに等しい. このとき, (簡単な計算から) 次が成り立つ:

$$\sigma_{A_1}^{\rho_u} \cdot \sigma_{A_2}^{\rho_u} \geq \frac{1}{2} |\langle u, (A_1 A_2 - A_2 A_1) u \rangle|$$

$$(\forall |u\rangle \langle u| = \rho_u, \quad \|u\|_H = 1)$$

ここに, $\sigma_{A_1}^{\rho_u}$ と $\sigma_{A_2}^{\rho_u}$ は (4.18) 式で示した通りで, すなわち,

$$\begin{cases} \sigma_{A_1}^{\rho_u} = [\langle A_1 u, A_1 u \rangle - |\langle u, A_1 u \rangle|^2]^{1/2} = \|(A_1 - \langle u, A_1 u \rangle)u\| \\ \sigma_{A_2}^{\rho_u} = [\langle A_2 u, A_2 u \rangle - |\langle u, A_2 u \rangle|^2]^{1/2} = \|(A_2 - \langle u, A_2 u \rangle)u\| \end{cases}$$

である. したがって, $[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1$ とすると,

$$\begin{aligned} \|A_1 u\| \cdot \|A_2 u\| &\geq \|(A_1 - \langle u, A_1 u \rangle)u\| \cdot \|(A_2 - \langle u, A_2 u \rangle)u\| \\ &= \sigma_{A_1}^{\rho_u} \cdot \sigma_{A_2}^{\rho_u} \geq |\langle u, [A_1, A_2] u \rangle| / 2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる. たとえば, $A_1 (= Q)$ が位置観測量, $A_2 (= P)$ が運動量観測量のときは (すなわち, 正準交換関係: $QP - PQ = \hbar\sqrt{-1}$ を満たすときは),

$$\sigma_Q^{\rho_u} \cdot \sigma_P^{\rho_u} \geq \frac{1}{2} \hbar$$

となる.

証明. ほとんどシュワルツの不等式と同じで, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} |\langle u, [A_1, A_2] u \rangle| &= |\langle u, (A_1 A_2 - A_2 A_1) u \rangle| \\ &= \left| \left\langle u, \left((A_1 - \langle u, A_1 u \rangle)(A_2 - \langle u, A_2 u \rangle) - (A_2 - \langle u, A_2 u \rangle)(A_1 - \langle u, A_1 u \rangle) \right) u \right\rangle \right| \\ &\leq 2 \|(A_1 - \langle u, A_1 u \rangle)u\| \cdot \|(A_2 - \langle u, A_2 u \rangle)u\| \end{aligned}$$

□

4.3 ハイゼンベルグの不確定性原理

4.3.1 ハイゼンベルグの不確定性原理は何故有名なのか？

「ハイゼンベルグの不確定性原理」とは、次の命題 4.10 の (i) と (ii) のことである。これは、量子力学において、したがって、

(A) 20 世紀の科学において最も有名な命題

の一つである。しかし、本節ではこのハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は、量子力学という言葉で書かれていないという理由で疑問を投げかける。

命題 4.10. [ハイゼンベルグの不確定性原理 (*cf.* [17]:1927)]

- (i) ある粒子の位置 x は精密測定できる。また同様に、運動量 p も精密測定できる。しかし、位置 x と運動量 p を共に精密測定することは不可能で、それぞれの誤差 Δx と Δp が不可避な近似測定しかできない。
- (ii) そして、誤差 Δx と Δp は、次の「ハイゼンベルグの不確定性原理」を満たす。すなわち、

$$\Delta x \cdot \Delta p \doteq \hbar (= \text{プランク定数}/2\pi \doteq 1.5547 \times 10^{-34} Js). \quad (4.20)$$

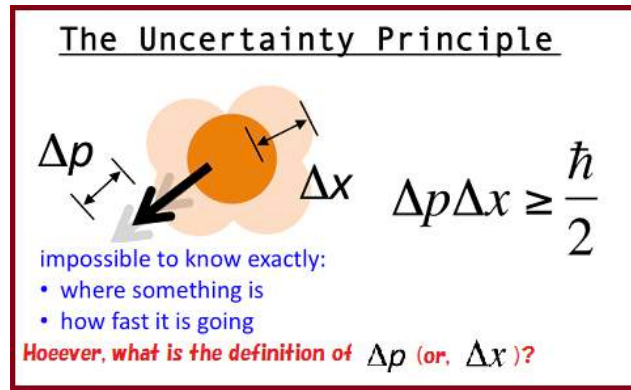
したがって、一方の精度を上げれば、必然的に、他方の精度は落ちる。

ハイゼンベルグは、有名な γ -線顕微鏡による思考実験によって、ハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) を導いた。

とされているが、

Δx と Δp の意味が曖昧で

命題 4.10 は物理学の命題の体をなしていない。



本節では、以下の論文にそって、「正しいハイゼンベルグの不確定性原理」を説明する。

- 文献 [22]:S. Ishikawa, Rep. Math. Phys. Vol.29(3), pp.257–273, 1991, (PDF)

次の注釈 4.1 の意見は挑発を含めた異端の見解かもしれない。しかし、こう言われたとしても反論できるデータはないと思う。

♠ 注釈 4.1. 実は、ハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は意味不明な気分だけの文言 (すなわち、日常言語の中に何となく埋没した数量表現) で、

ハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は、**科学の命題としては疑わしい文言**である
と考える。そう考える理由は、ハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は量子力学という言葉で書かれていないからで、具体的には、

(#1) 命題 4.10 の中では、「近似測定」と「誤差」に定義が与えられていない
からある。この問題点は、正式のハイゼンベルグの不確定性原理 (後出の定理 4.15) で解決された。
それでは、

なぜ、意味不明なハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は有名なのか？

と問うかもしれない。著者は、

古典力学との違いを鮮明に打ち出すための「**量子力学の宣伝用のスローガン**」として、または、**「ボーアの相補性の数量的代替**」としてハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) は使われた

と思っている (ハイゼンベルグの意図とか誰かの意図というわけではなくて、なんとなく結果的には「宣伝用のスローガン」として使われた、という意味である)。そして、この使い方は完全に成功した。このようなことは、歴史上はよくあることで、哲学史上最も有名なデカルトのコギト命題:

「我思う。故に我在り」

も意味不明だとしても (cf. 6.4 節参照), 結果論的には、近代科学の礎を築いたのだと思う。

♠ 注釈 4.2. さて、

$$(\#_1) \begin{cases} \text{位置:} & [x : \text{精密測定値 (=真の値)}], [\tilde{x} : \text{誤差を含む測定値}] \\ \text{運動量:} & [p : \text{精密測定値 (=真の値)}], [\tilde{p} : \text{誤差を含む測定値}] \end{cases}$$

として、

(#₂) ここで、誤差を次のように定めよう。

$$\Delta_x = |x - \tilde{x}|, \quad \Delta_p = |p - \tilde{p}|,$$

こう考えると、ハイゼンベルグの不確定性原理 ((4.20 式) は矛盾を含むとも言える。なぜならば、(4.20) 式は精密測定値 (x, p) が存在しないと主張しているからで、そうなると誤差 $(\Delta_x$ と $\Delta_p)$ を定義できなくなってしまう。と言う **パラドックス** が生じてしまう (cf. 文献 [22, 23, 24])。この議論は、ハイゼンベルグの不確定性原理 ((4.20 式) が不完全だとしても、これを一種の NO-GO 定理 (「いくつかの観測量に同時に確定した値 (”真の値” or, ”隠れた変数”) を付与できるか?」という問題に答える定理) と考えることもできる。このように、「誤差」とは言っても簡単ではない。

ハイゼンベルグの不確定性原理の気分的説明 (γ -線顕微鏡による思考実験等) としては、

- 粒子 P の (真の位置, 真の運動量) を (x, p) として、まず、位置 x を誤差 Δx で測定したとする。位置を正確に測定しようとする (すなわち、 $\Delta x \approx 0$)、波長の短い光を当てなければならない。そうすると、粒子 P の運動量が変化して $p + \Delta p$ になってしまう。このとき、ハイゼンベルグの不等式 $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ が成立する

である。この説明に対する根源的な問いかけは次のアインシュタイン＝ボーア論争である。

- アインシュタイン流の [粒子 P の (真の位置, 真の運動量) $(= (x, p))$ が存在するけど、測定的事情によって、それが測定できないのか?] または、ボーア流の [粒子 P の (真の位置, 真の運動量) $(= (x, p))$ など存在しないのか?]

である。これこそ「ベルの不等式」が問題とするところで (cf. 注意 4.23), 詳しくは 4.5 節で述べる。量子力学の解釈を最初に明確に宣言してからでないと、ぼやけた議論になってしまう。射影仮説 (9.2 節) についての意見が分かれているような「いわゆるコペンハーゲン解釈」ではスッキリしないと思った。

4.3.2 ハイゼンベルグの不確定性原理の数学的定式化

著者が影響を受けた論文は

- [2]: Arthurs, E. and Kelly, J.L., Jr. *On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables*, Bell System Tech. J. **44**, 725-729 (1965)

である。1965 年当時と言えば、「ベルの不等式」であるが、著者はオーサーとケリーのこの論文に感銘をうけ、これに感化されて定理 4.15 に至った。

4.3.2.1 準備

基本構造 $[\mathcal{C}(H) \subseteq B(H)]_{B(H)}$ を考える. A_i ($i = 1, 2$) をヒルベルト空間 H 上の任意の (非有界) 自己共役作用素とする. たとえば, 正準交換関係 $[A_1, A_2](:= A_1 A_2 - A_2 A_1) = \hbar \sqrt{-1} I$ を満たすと仮定してもよい. 実軸 $\mathbb{R}$ とそのボール集合体 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ を考える. 自己共役作用素 A_i のスペクトル分解 $A_i = \int_{\mathbb{R}} \lambda F_{A_i}(d\lambda)$ を使って, 射影観測量 $O_{A_i} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{A_i})$ を定める.

次の二つの測定を **同時測定** したい.

$$\begin{array}{ll} (B_1) \ M_{B(H)}(O_{A_1} := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{A_1}), S_{[\rho_u]}) & \xrightarrow{\text{期待値}} \langle u, A_1 u \rangle \\ (B_2) \ M_{B(H)}(O_{A_2} := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{A_2}), S_{[\rho_u]}) & \xrightarrow{\text{期待値}} \langle u, A_2 u \rangle \end{array}$$

$$(\forall \rho_u = |u\rangle\langle u| \in \mathfrak{S}^p(\mathcal{C}(H)^*))$$

しかしながら, $A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0$ とは限らないので (すなわち, 二つの射影観測量 O_{A_1} と O_{A_2} は可換とは仮定していないので), 同時観測量 $O_{A_1} \times O_{A_2}$ の存在は期待できないので,

一般には, この二つの測定を同時測定することはできない

すなわち,

$$(B_3) \ M_{B(H)}(O_{A_1} \times O_{A_2}, S_{[\rho_u]}) \text{ は不可となる. } \quad \text{そうならば, } \quad \text{「さて, どうするか?」}$$

である.

このために, 上の二つの測定を次のように言い換えよう.

もう一つの別のヒルベルト空間 K を考えて, $s(\in K)$ を $\|s\| = 1$ のようにとる. また, $B(H \otimes K)$ 内の二つの観測量 $O_{A_1 \otimes I} := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{A_1} \otimes I)$ と $O_{A_2 \otimes I} := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{A_2} \otimes I)$ を考える. また, 状態を

$$\text{状態 } \hat{\rho}_{us} = |u \otimes s\rangle\langle u \otimes s|$$

と定めて, 次の二つの測定を考える.

$$\begin{array}{ll} (C_1) \ M_{B(H \otimes K)}(O_{A_1 \otimes I}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) & \xrightarrow{\text{期待値}} \langle u \otimes s, (A_1 \otimes I)(u \otimes s) \rangle = \langle u, A_1 u \rangle \\ (C_2) \ M_{B(H \otimes K)}(O_{A_2 \otimes I}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) & \xrightarrow{\text{期待値}} \langle u \otimes s, (A_2 \otimes I)(u \otimes s) \rangle = \langle u, A_2 u \rangle \end{array}$$

当然のことであるが, この二つはそれぞれ上の二つの (B_1) と (B_2) と同じと見なせる. すなわち,

$$(C_1) = (B_1) \quad (C_2) = (B_2)$$

である. したがって (または, $O_{A_1 \otimes I}$ と $O_{A_2 \otimes I}$ は一般には可換でないので), 上の二つの測定を

同時測定することはできない。したがって、何の進展もなかったわけで、

(C₃) $M_{B(H \otimes K)}(O_{A_1 \otimes I} \times O_{A_2 \otimes I}, S_{[\hat{\rho}_{us}]})$ は不可となる。 そうならば、 「さて、どうするか？」

これを進展させるために、以下のような工夫をして、

「 $A_1 \otimes I$ と $A_2 \otimes I$ の同時測定もどき $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ 」

を考える。

準備 4.11. $\hat{A}_i$ ($i = 1, 2$) をテンソル ヒルベルト空間 $H \otimes K$ 上の任意の可換な自己共役作用素とする。 すなわち、

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2](\cdot := \hat{A}_1 \hat{A}_2 - \hat{A}_2 \hat{A}_1) = 0 \quad (4.21)$$

とする。

$\hat{A}_i$ のスペクトル表現 $\hat{A}_i = \int_{\mathbb{R}} \lambda F_{\hat{A}_i}(d\lambda)$ を使って、 $B(H \otimes K)$ 内の観測量 $O_{\hat{A}_i} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_{\hat{A}_i})$ を定める。

ここで、次の二つの測定を考える：

$$\begin{aligned} (D_1) \quad M_{B(H \otimes K)}(O_{\hat{A}_1}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) &\xrightarrow{\text{期待値}} \langle u \otimes s, \hat{A}_1(u \otimes s) \rangle \\ (D_2) \quad M_{B(H \otimes K)}(O_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) &\xrightarrow{\text{期待値}} \langle u \otimes s, \hat{A}_2(u \otimes s) \rangle \end{aligned}$$

今度は、可換条件から、同時観測量 $O_{\hat{A}_1} \times O_{\hat{A}_2} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, F_{\hat{A}_1} \times F_{\hat{A}_2})$ が存在するから、次の同時測定：

$$(D_3) \quad M_{B(H \otimes K)}(O_{\hat{A}_1} \times O_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) \xrightarrow{\text{期待値}} (\langle u \otimes s, \hat{A}_1(u \otimes s) \rangle, \langle u \otimes s, \hat{A}_2(u \otimes s) \rangle)$$

が実現できる。

ここで、

(C₃) の代替として、(D₃) を考える

次のように、 $\hat{N}_i$ を定める。

$$\hat{N}_i := \hat{A}_i - A_i \otimes I \quad (\text{したがって、} \hat{A}_i = \hat{N}_i + A_i \otimes I) \quad (4.22)$$

ここで, 誤差: $\Delta_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}}$ と $\overline{\Delta}_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}}$ と次のように定義する.

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}} &= \|(\hat{A}_i - A_i \otimes I)(u \otimes s)\| = \|\hat{N}_i(u \otimes s)\| \\ \overline{\Delta}_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}} &= \|(\hat{N}_i - \langle u \otimes s, \hat{N}_i(u \otimes s) \rangle)(u \otimes s)\|\end{aligned}\tag{4.23}$$

次の不等式は常識だろう.

$$\Delta_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}} \geq \overline{\Delta}_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}}\tag{4.24}$$

また, 可換条件 (4.21) と (4.22) から次が言える.

$$[\hat{N}_1, \hat{N}_2] + [\hat{N}_1, A_2 \otimes I] + [A_1 \otimes I, \hat{N}_2] = -[A_1 \otimes I, A_2 \otimes I]\tag{4.25}$$

ロバートソンの不確定性関係 (cf. 定理 4.9) によって, $|\langle u \otimes s, [\text{第一項}](u \otimes s) \rangle|$ は次のように評価できる.

$$2\overline{\Delta}_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \overline{\Delta}_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} \geq |\langle u \otimes s, [\hat{N}_1, \hat{N}_2](u \otimes s) \rangle|\tag{4.26}$$

しかし, 今のところ, ここでは, (C_3) の代替として, (D_3) を考えたに拘わらず

$A_i \otimes I$ と $\hat{A}_i$ には, いかなる関係も仮定していない

ことに注意しよう.

4.3.2.2 平均値一致条件

上では, $A_i \otimes I$ と $\hat{A}_i$ に何も関係を仮定しなかった. しかし, 本来の趣旨からすれば,

(E) $\hat{A}_i$ は「 $A_i \otimes I$ もどき」であるべき

である.

したがって, 次の仮定は自然と思う.

仮定 4.12. [平均値一致条件 (不偏条件)]. 次を仮定する.

$$\langle u \otimes s, \hat{N}_i(u \otimes s) \rangle = 0 \quad (\forall u \in H, i = 1, 2)\tag{4.27}$$

同じ意味で,

$$\langle u \otimes s, \hat{A}_i(u \otimes s) \rangle = \langle u, A_i u \rangle \quad (\forall u \in H, i = 1, 2)\tag{4.28}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}
 & \text{測定 } \mathbf{M}_{B(H \otimes K)}(\mathbf{O}_{\hat{A}_i}, S_{[\hat{\rho}_{us}]}) \text{ の測定値の平均値} \\
 &= \langle u \otimes s, \hat{A}_i(u \otimes s) \rangle \\
 &= \langle u, A_i u \rangle \\
 &= \text{測定 } \mathbf{M}_{B(H)}(\mathbf{O}_{A_i}, S_{[\rho_u]}) \text{ の測定値の平均値} \\
 & \quad (\forall u \in H, \|u\|_H = 1, i = 1, 2)
 \end{aligned}$$

ここで、次の定義を得る.

定義 4.13. [近似同時測定] A_1 と A_2 をヒルベルト空間 H 上の任意の (非有界) 自己共役作用素とする. 四つ組 $(K, s, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ を A_1 と A_2 の **近似同時観測量** とする. すなわち, 次を満たすとする.

(E₁) K はヒルベルト空間. $s \in K, \|s\|_K = 1, \hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ はテンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ 上の可換な (非有界) 自己共役作用素で次の平均値一致条件 (4.27) を満たす. すなわち、

$$\langle u \otimes s, \hat{A}_i(u \otimes s) \rangle = \langle u, A_i u \rangle \quad (\forall u \in H, i = 1, 2) \quad (4.29)$$

平均値が一致するという意味で、測定 $\mathbf{M}_{B(H \otimes K)}(\mathbf{O}_{\hat{A}_1} \times \mathbf{O}_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{us}]})$ を $(\mathbf{M}_{B(H)}(\mathbf{O}_{A_1}, S_{[\rho_u]})$ と $\mathbf{M}_{B(H)}(\mathbf{O}_{A_2}, S_{[\rho_u]})$ の **近似同時測定** と言う.

また、

(E₂) $\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} (= \|(\hat{A}_1 - A_1 \otimes I)(u \otimes s)\|)$ and $\Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} (= \|(\hat{A}_2 - A_2 \otimes I)(u \otimes s)\|)$ を近似同時測定 $\mathbf{M}_{B(H \otimes K)}(\mathbf{O}_{\hat{A}_1} \times \mathbf{O}_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{us}]})$ の誤差と呼ぶ.

補題 4.14. A_1 と A_2 をヒルベルト空間 H 上の任意の (非有界) 自己共役作用素とする. 四つ組 $(K, s, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ を A_1 と A_2 の **近似同時観測量** とする. すなわち, 平均値一致条件 (4.27) を満たすとする. このとき, 次が成立する.

$$\Delta_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}} = \overline{\Delta_{\hat{N}_i}^{\hat{\rho}_{us}}} \quad (4.30)$$

$$\langle u \otimes s, [\hat{N}_1, A_2 \otimes I](u \otimes s) \rangle = 0 \quad (\forall u \in H) \quad (4.31)$$

$$\langle u \otimes s, [A_1 \otimes I, \hat{N}_2](u \otimes s) \rangle = 0 \quad (\forall u \in H) \quad (4.32)$$

したがって、ここまでの準備 (ロバートソンの不確定性原理 (4.19),(4.27), (4.29), (4.30), (4.31)) によって、次の「ハイゼンベルグの不確定性原理」を得る.

$$\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} (= \overline{\Delta}_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \overline{\Delta}_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}}) \geq \frac{1}{2} |\langle u, [A_1, A_2] u \rangle|$$

$$(\forall u \in H \text{ such that } \|u\| = 1) \quad (4.33)$$

以上をまとめると,

□

定理 4.15. [ハイゼンベルグの不確定性原理] A_1 と A_2 をヒルベルト空間 H 上の (非有界) 自己共役作用素とする. このとき、次が成立する.

- (i) (cf. ref. [22]). A_1 と A_2 の近似同時観測量 $(K, s, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ が存在する. すなわち, $s \in K$, $\|s\|_K = 1$ で, $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ はテンソルヒルベルト空間 $H \otimes K$ 上の可換な (非有界) 自己共役作用素であり, 平均値一致条件 (4.28) を満たす. したがって, 近似同時測定 $M_{B(H \otimes K)}(O_{\hat{A}_1} \times O_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{us}]})$ が存在する.
- (ii) (cf. refs. [22, 65]). このとき, 次の不等式 (ハイゼンベルグの不確定性原理) が成立する.

$$\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} (= \overline{\Delta}_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \overline{\Delta}_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}})$$

$$= \|(\hat{A}_1 - A_1 \otimes I)(u \otimes s)\| \cdot \|(\hat{A}_2 - A_2 \otimes I)(u \otimes s)\|$$

$$\geq \frac{1}{2} |\langle u, [A_1, A_2] u \rangle| \quad (\forall u \in H \text{ such that } \|u\| = 1) \quad (4.34)$$

- (iii) 特に. もし $A_1 A_2 - A_2 A_1 = \hbar \sqrt{-1}$ ならば、次が成立する :

$$\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} \geq \hbar/2 \quad (\forall u \in H \text{ such that } \|u\| = 1) \quad (4.35)$$

証明 : (ii)(と (iii)) は既に表示した. したがって、近似同時測定の存在 (i) を示せばよい*2. $K = \mathbb{C}^2$ として, $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. $H \otimes \mathbb{C}^2$ 上の (非有界) 自己共役作用素 $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ を次のように定める.

$$\hat{A}_1 = A_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - A_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - A_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + A_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = A_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - A_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - A_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + A_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & -A_1 \\ -A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

*2 文献 [22]: S. Ishikawa, Rep. Math. Phys. Vol.29(3), 1991, pp.257–273, では,(i),(ii) を示した. (i) は、3 個以上の (非有界) 自己共役に対しても近似同時測定は存在することを示した.

明らかに、 $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ は可換. また、

$$\begin{aligned}\langle u \otimes s, \hat{A}_1(u \otimes s) \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle u, A_1 u \rangle \\ \langle u \otimes s, \hat{A}_2(u \otimes s) \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2 & -A_1 \\ -A_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle u, A_2 u \rangle \\ &(\forall u \in H)\end{aligned}$$

よって、近似同時測定 $M_{B(H \otimes K)}(\mathcal{O}_{\hat{A}_1} \times \mathcal{O}_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{u \otimes s}]})$ を得る. $\square$

4.3.3 平均値一致条件がない場合

ヒルベルト空間 $H_1 = L^2(\mathbb{R}_q)$ を考えて、量子系の 2 粒子システム S をテンソルヒルベルト空間 $H = H_1 \otimes H_1 = L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$ 内で議論する. 2 粒子システム S の状態を u_0 ($\in H = H_1 \otimes H_1 = L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$) (正確には, $|u_0\rangle\langle u_0|$) とする. ここで、

$$u_0(q_1, q_2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon\sigma}} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(q_1 - q_2 - a)^2 - \frac{1}{8\epsilon^2}(q_1 + q_2 - b)^2} \quad (4.36)$$

ここで、 $a, b \in \mathbb{R}$, 正数 ϵ は十分小さいとする. $A_1 : L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$ と $A_2 : L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$ を次の (非有界) 自己共役作用素とする.

$$A_1 = q_1, \quad A_2 = \frac{\hbar \partial}{i \partial q_1}. \quad (4.37)$$

もちろん、 $A_1 A_2 - A_2 A_1 = \hbar \sqrt{-1}$ なので、いかなる近似同時測定 $M_{B(H \otimes K)}(\mathcal{O}_{\hat{A}_1} \times \mathcal{O}_{\hat{A}_2}, S_{[\hat{\rho}_{u_0 \otimes s}]})$ を用意しても、ハイゼンベルグの不確定性原理 (4.35) :

$$\|(\hat{A}_1 - A_1 \otimes I)(u_0 \otimes s)\| \cdot \|(\hat{A}_2 - A_2 \otimes I)(u_0 \otimes s)\| \geq \hbar/2 \quad (4.38)$$

が成立する.

しかし、 $K = \mathbb{C}$, $s = 1$ として、同一視 :

$$H \ni u \xrightarrow{\text{同一視}} u \otimes 1 \in H \otimes \mathbb{C}$$

の下に、 $H \otimes \mathbb{C} = H$ と見なす. したがって、

$$H = L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2) = H \otimes \mathbb{C}$$

となり, (非有界) 自己共役作用素 $\hat{A}_1 : L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$ と $\hat{A}_2 : L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_{(q_1, q_2)}^2)$ を次のように定める.

$$\hat{A}_1 = b - q_2, \quad \hat{A}_2 = A_2 = \frac{\hbar \partial}{i \partial q_1} \quad (4.39)$$

ここで,

- $\hat{A}_1$ と $\hat{A}_2$ は可換である

ことに注意しよう.

このとき, 次の計算を得る.

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 u_s - A_1 u_s\| \\ &= \left[\iint_{\mathbb{R}^2} \left| ((b - q_2) - q_1) \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon\sigma}} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(q_1 - q_2 - a)^2 - \frac{1}{8\epsilon^2}(q_1 + q_2 - b)^2} \cdot e^{i\phi(q_1, q_2)} \right|^2 dq_1 dq_2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\iint_{\mathbb{R}^2} \left| ((b - q_2) - q_1) \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon\sigma}} e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(q_1 - q_2 - a)^2 - \frac{1}{8\epsilon^2}(q_1 + q_2 - b)^2} \right|^2 dq_1 dq_2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\epsilon, \end{aligned} \quad (4.40)$$

そして

$$\|\hat{A}_2 u_s - A_2 u_s\| = 0. \quad (4.41)$$

よって,

$$\|\hat{A}_1 u_e - A_1 u_e\| \cdot \|\hat{A}_2 u_e - A_2 u_e\| = 0. \quad (4.42)$$

したがって,

- (F) ハイゼンベルグの不確定性原理は, (近似同時測定 (=平均値一致) の仮定がない場合は) 破られる

(cf. Remark 3 in 文献 [22], また文献 [30] の 316 ページ)

♠ 注釈 4.3. 上記は, EPR-パラドックスの一つである. 注意 6.14 で再考する.

次の注意を付け加えておく.

注意 4.16. (4.26) 式の第 2 項 (正確には, $\langle u \otimes s, \text{”第 3 項”}(u \otimes s) \rangle$), および, 第 3 項 (正確に

は、 $\langle u \otimes s, \text{第3項}(u \otimes s) \rangle$ を計算すると、ロバートソンの不等式 (4.20) 式から、

$$2\overline{\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}}} \cdot \sigma(A_2; u) \geq |\langle u \otimes s, [\hat{N}_1, A_2 \otimes I](u \otimes s) \rangle| \quad (4.43)$$

$$2\overline{\Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}}} \cdot \sigma(A_1; u) \geq |\langle u \otimes s, [A_1 \otimes I, \hat{N}_2](u \otimes s) \rangle| \quad (4.44)$$

($\forall u \in H$ such that $\|u\| = 1$)

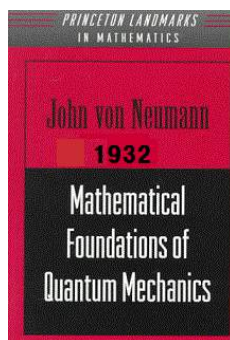
よって、(4.26), (4.27), (4.39), (4.40) から、次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} + \Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \sigma(A_1; u) + \Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}} \cdot \sigma(A_2; u) \\ & \geq \overline{\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}}} \cdot \overline{\Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}}} + \overline{\Delta_{\hat{N}_2}^{\hat{\rho}_{us}}} \cdot \sigma(A_1; u) + \overline{\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}}} \cdot \sigma(A_2; u) \\ & \geq \frac{1}{2} |\langle u, [A_1, A_2]u \rangle| \quad (\forall u \in H \text{ such that } \|u\| = 1) \end{aligned} \quad (4.45)$$

平均値一致条件を仮定していないのだから、この (4.45) 式は、ハイゼンベルグの不確定性原理 (4.34) よりもラフな不等式になっていることは仕方がない

(4.45) 式の $\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}}$ に「擾乱」 $\Delta_{\hat{N}_1}^{\hat{\rho}_{us}}$ に「不確定性」と見なせるような「解釈」を主張すれば、不等式 (4.45) は「小澤の不等式 (cf. [66])」と呼ばれるが、本書では、「言語的コペンハーゲン解釈」、すなわち、「測定は一回だけで、測定後のことは言わない」とするので、「(測定の影響の) 擾乱」という言葉は使わない。

補足 4.2. [著者の疑問]：著者の興味は量子言語の方に移行して、ハイゼンベルグの不確定性原理はそのまま放置してあるが、著者は次の疑問を持っている。



- 「 γ -線顕微鏡によるハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10)」と「ロバートソンの不確定性原理 (定理 4.9)」が全く異なる主張であることは、フォン・ノイマンの「量子力学の数学的基礎 (1932)」で指摘されている。そうならば、ハイゼンベルグは何故、この辺りのことを曖昧なままに放置したのだから？ ハイゼンベルグが「全く別物」と一声言えば、1932 年の時点で、混乱は解消されたと思う。

1991 年の時点で、ハイゼンベルグの不確定性原理の「成立条件」や「不成立な例」などが提示されているのに (4.3.2 節、4.3.3 節)、30 年近くたった今でも、このような性質を巧妙に使った実験を知らない。この事実は不思議なような気がするし、そうでないのかもしれない。言い換えると、ハイゼンベルグの不確定性原理が今までで一度だって、「科学の命題」として使われたことがあったのだろうか？である。1991 年以前には、「科学の命題」でなかったわけで、「科学の命題」として使われたことはあり得なかったことは確実なのだが、注釈 4.1 で述べたような「量子力学の宣伝用のスローガン」だけなのだろうか？

著者にとって、最も面白いのは、

- ハイゼンベルグの不確定性原理 4.15 が科学としてまったく役に立たない

という決着の仕方である。と言うと冗談になってしまうが、そうだとしたら面白いと思う。注釈 4.2 で述べたように、ハイゼンベルグの不確定性原理を NO-GO 定理の一種と思い込んだとすると、NO-GO 定理は役に立たないのだから、一応の辻褄が合う。そうならば、

- 数学的なハイゼンベルグの不確定性原理 (定理 4.15) よりも意味不明なハイゼンベルグの不確定性原理 (命題 4.10) の方がセンスがよいのかもしれない

アインシュタイン、ボーア、ハイゼンベルグやフォン・ノイマン等の天才たちはこういうことを直感していたので曖昧なまま放置してあまりほじくり返さなかったのだろうか。彼らがそのその気になったら定理 4.15 など一日仕事だろう。などと、夢想してしまう。さらに言うならば、一番面白い展開は、「ハイゼンベルグの不確定性原理 (定理 4.15) は本当に真のハイゼンベルグの不確定性原理なんだろうか？」という当然の疑問から再スタートすることだろう。別の「(真の) ハイゼンベルグの不確定性原理」があるとして、その発見が一番凄い。しかし、これはコペンハーゲン解釈内では無理だろう。などと、妄想の種は尽きない。

////

4.4 EPR-パラドックスと超光速

4.4.1 EPR-パラドックス

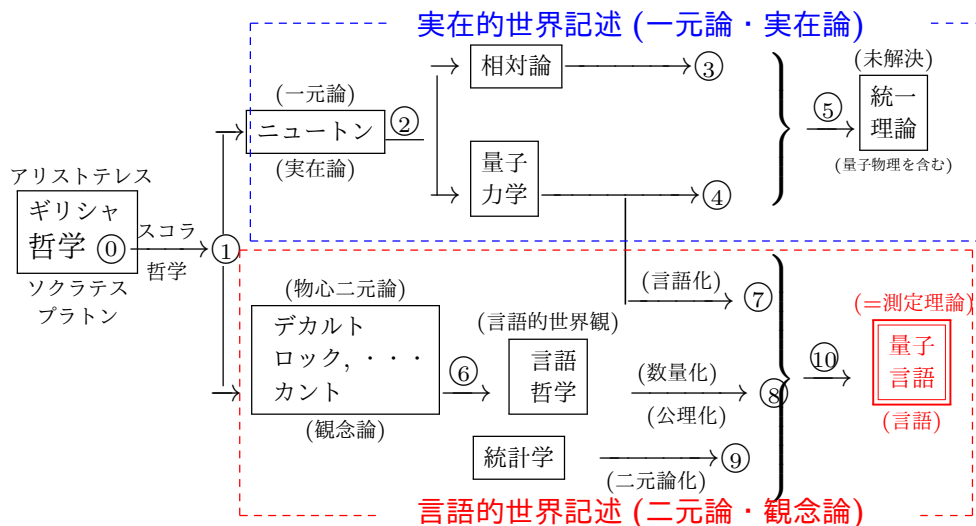
次は量子力学の分野における最も有名な論文の一つである。

- (A) A. Einstein; B. Podolsky, and N. Rosen (1935). "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". Phys. Rev. (The American Physical Society) 47 (10): 777-780.

しかし、著者はこの EPR 論文が理解できているわけではない。アインシュタインらの論理付けは明確とは言えないが、結論的主張はわかる。つまり、彼らは

- (B) 量子力学は、下図 (1.1 節の主張 1.1) の実在的世界観の方に居場所がない

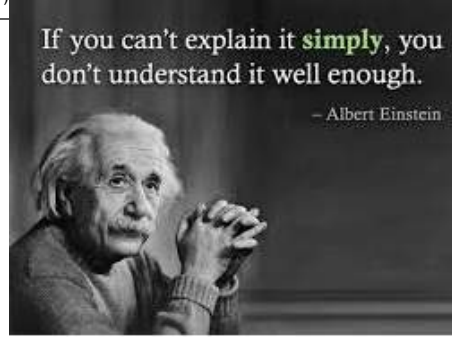
と主張しているのだと思う。そうならば、本書の主張と同じである。



しかし、アインシュタイン等は上図を提示しないで、(B) を主張しているのだから、EPR 論文 (A) は非常に分かりにくい。

- (C) アインシュタインがこれだけ言うんだから、何かあるんだろう。

が一般に感想だろう、という言い過ぎだろうか？ すくなくとも、著者にはこれ以上のことを読み取れなかった。



主張 (B) に関しては、次節 (ベルの不等式) に回して、この節では、EPR 論文の超光速 (非局所性) に関わる部分を議論しよう。「超光速 (=非局所性)」は、ド・ブロイのパラドックスで現れた (cf. 2.10 節). 量子力学ではいつも超光速が現れるが、EPR-パラドックス (アインシュタイン=ポドロフスキー=ローゼンのパラドックス 1936 年) のボーム版では、明快に「超光速」が現れる.

以下にこれを説明しよう.

2 個の電子 P_1 と P_2 のスピン状態を考える. このために、テンソルヒルベルト空間 $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ を次のように定める. すなわち,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

として (つまり, $\mathbb{C}^2$ 内の完全正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ を定めて),

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \left\{ \sum_{i,j=1,2} \alpha_{ij} e_i \otimes e_j \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2 \right\}$$

と定義する. ここで, $u = \sum_{i,j=1,2} \alpha_{ij} e_i \otimes e_j$ と $v = \sum_{i,j=1,2} \beta_{ij} e_i \otimes e_j$ の内積 $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}$ を

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = \sum_{i,j=1,2} \bar{\alpha}_{i,j} \cdot \beta_{i,j}$$

で定める. したがって、テンソルヒルベルト空間 $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ の完全正規直交基底を $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ と定めたことになる. また, $F \in B(\mathbb{C}^2)$, $G \in B(\mathbb{C}^2)$ に対して, $F \otimes G \in B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ (すなわち, 線形写像 $F \otimes G : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$) を

$$(F \otimes G)(u \otimes v) = Fu \otimes Gv \quad (\forall u, v \in \mathbb{C}^2)$$

によって定める.

2 個の電子 P_1 と P_2 のシングレット状態 (双子状態, エンタングル状態, もつれ状態とも言う) $|s\rangle\langle s|$ ($\in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$) を次で定める.

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$$

ここに、 $\langle s, s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = \frac{1}{2} \langle e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ により、 $|s\rangle\langle s|$ は状態であることは明らか。また、この2個の電子 P_1 と P_2 は非常に遠く離れていると仮定してもよいことには注意しておくべきである。

さて、シュテルン=ゲルラッハの実験のときと同様に、 $B(\mathbb{C}^2)$ 内の z -方向のスピン観測量 $O = (X, 2^X, F^z)$ を、 $X = \{\uparrow, \downarrow\}$ として、

$$F^z(\{\uparrow\}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^z(\{\downarrow\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で定めて、 $B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ 内の並行観測量 $O \otimes O = (X^2, 2^X \times 2^X, F^z \otimes F^z)$ を

$$\begin{aligned} (F^z \otimes F^z)(\{(\uparrow, \uparrow)\}) &= F^z(\{\uparrow\}) \otimes F^z(\{\uparrow\}), \\ (F^z \otimes F^z)(\{(\downarrow, \uparrow)\}) &= F^z(\{\downarrow\}) \otimes F^z(\{\uparrow\}) \\ (F^z \otimes F^z)(\{(\uparrow, \downarrow)\}) &= F^z(\{\uparrow\}) \otimes F^z(\{\downarrow\}), \\ (F^z \otimes F^z)(\{(\downarrow, \downarrow)\}) &= F^z(\{\downarrow\}) \otimes F^z(\{\downarrow\}) \end{aligned}$$

によって定める。このようにして、測定 $M_{B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)}(O \otimes O, S_{[|s\rangle\langle s|]})$ を得る。このとき、(量子版) 言語ルール 1(測定;2.7 節) (=注釈 2.5 の (#1)) によって、次が言える:

測定 $M_{B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)}(O \otimes O, S_{[|s\rangle\langle s|]})$ により

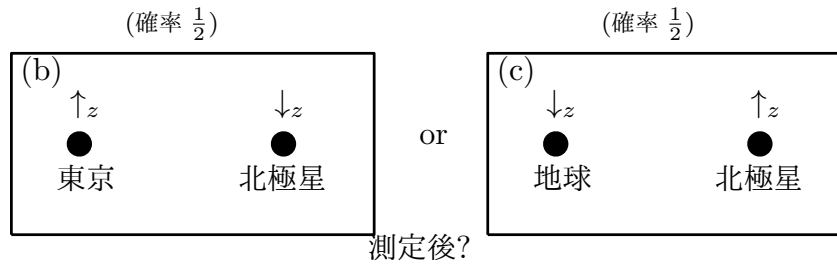
$$\text{測定値} \begin{bmatrix} (\uparrow, \uparrow) \\ (\downarrow, \uparrow) \\ (\uparrow, \downarrow) \\ (\downarrow, \downarrow) \end{bmatrix} \text{を得る確率は} \begin{bmatrix} \langle s, (F^z \otimes F^z)(\{(\uparrow, \uparrow)\})s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = 0 \\ \langle s, (F^z \otimes F^z)(\{(\downarrow, \uparrow)\})s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = 0.5 \\ \langle s, (F^z \otimes F^z)(\{(\uparrow, \downarrow)\})s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = 0.5 \\ \langle s, (F^z \otimes F^z)(\{(\downarrow, \downarrow)\})s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

なぜなら、 $F^z(\{\uparrow\})e_1 = e_1$, $F^z(\{\downarrow\})e_2 = e_2$, $F^z(\{\uparrow\})e_2 = F^z(\{\downarrow\})e_1 = 0$ だからである。たとえば、

$$\begin{aligned} &\langle s, (F^z \otimes F^z)(\{(\uparrow, \downarrow)\})s \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} \\ &= \frac{1}{2} \langle (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1), (F^z(\{\uparrow\}) \otimes F^z(\{\downarrow\}))(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} \\ &= \frac{1}{2} \langle (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1), e_1 \otimes e_2 \rangle_{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

で、他も同様に計算できる。以上が量子力学 (=量子言語) の主張である。

上の議論は、 A_1 地点 (地球上) で粒子 P_1 に対する測定値「 $\downarrow$ 」を得たとすれば、何光年も遠く離れた A_2 地点 (北極星) の粒子 P_2 に対しては測定値「 $\uparrow$ 」が得られることを意味する。これは不可思議である。



不可思議だとしても、以上が量子力学 (=量子言語) の主張である.

考えられるストーリーとしては,

A_1 地点で, 粒子 P_1 が測定値「↓」を測定された瞬間に, 粒子 P_1 が, その事実を A_2 地点の粒子 P_2 に超光速で伝達して, 『私は「↓」と測定されたから, 君は「↑」と測定されるようにしなさい』と伝えた

としか考えられないのだから困る.

したがって,

「光より速い何か」が存在する (すなわち, 「非局所性」) (4.47)

と考えたくなる. このようなシングレット状態に関する議論を, 総称して, EPR-パラドックスと呼ぶ.

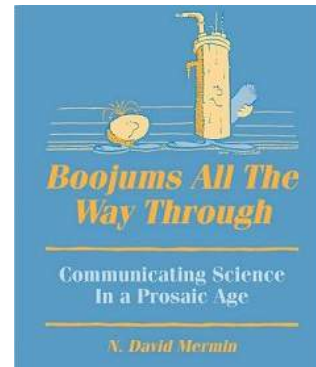
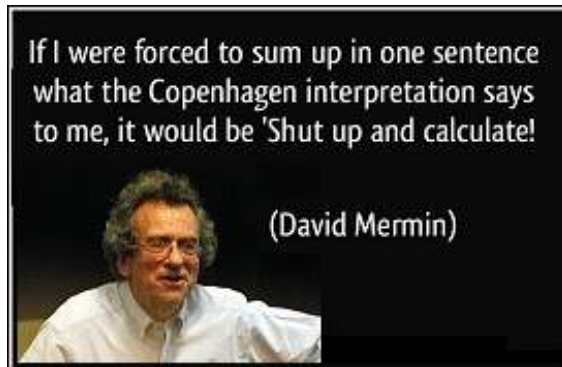
しかし, 「非局所性」は量子力学が提案された当初からみんな知っていること (ド・ブロイのパラドックス (cf. 2.10 節)) なのだから, EPR の論文は「非局所性」のわかりやすい例ということなのだろう.

4.4.2 黙って、計算しよう

「超光速」などと聞くと, ワクワクする読者がいるだろう. しかし, ここはすこし冷静になった方がよい. マーミンも言っているように

- 悩むのは止めよう (Stop being bothered!)
- コペンハーゲン解釈を一言で言えば, 「黙って、計算せよ」

である.



つまり、

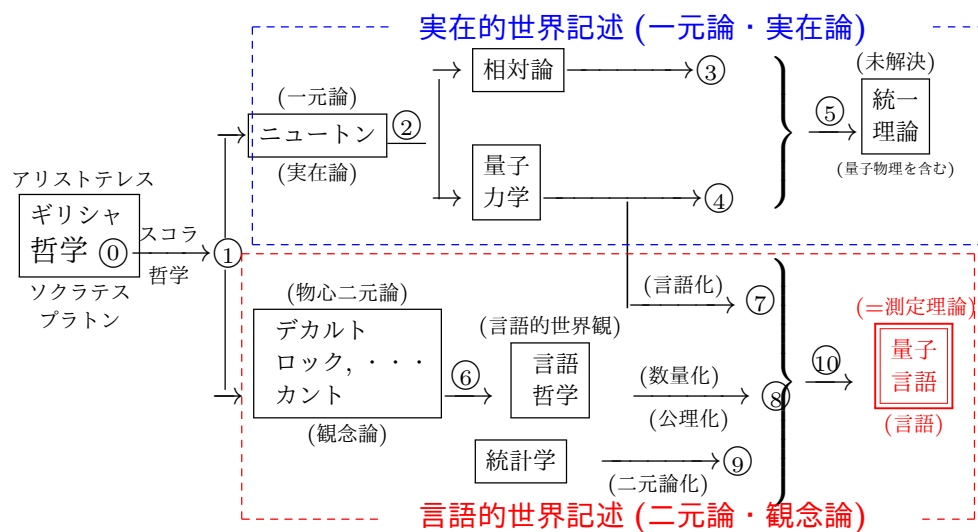
- 量子力学の本は料理本 (Cookbook) 読みなさい

である。そうならば、「量子言語の精神」と一致する。すなわち、

$$\begin{array}{c} \text{(量子言語)} \\ \boxed{\text{測定理論}} \end{array} = \begin{array}{c} \text{[言語ルール 1]} \\ \boxed{\text{測定}} \\ \text{(cf. 2.7 節)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{[言語ルール 2]} \\ \boxed{\text{因果関係}} \\ \text{(cf. 8.3 節)} \end{array} + \alpha (= \text{コペンハーゲン})$$

- 言語ルール 1 と 2 を丸暗記して、あとは試行錯誤して上級者になれ

である。しかし、もちろん、あなたが天才ならば下図の⑤の先で、悩むべきである。



4.5 ベルの不等式再考

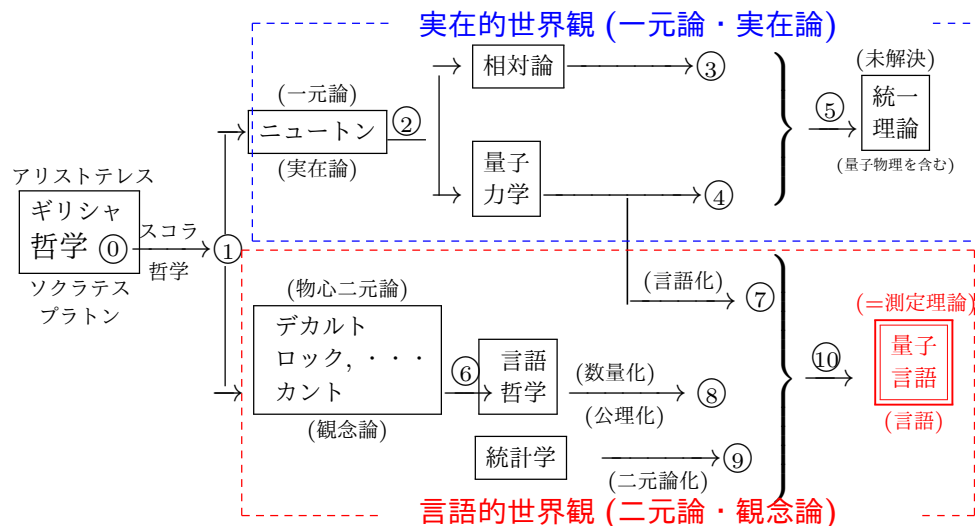
本節は次の論文からの抜粋である.

Ref. [52]; Ishikawa,S., Bell's inequality should be reconsidered in quantum language
 , JQIS, Vol. 7, No.4 , 140-154, 2017, DOI: 10.4236/jqis.2017.74011

(<http://www.scirp.org/Journal/PaperInformation.aspx?PaperID=80813>)

プレプリント (http://www.math.keio.ac.jp/academic/research_pdf/report/2017/17006.pdf) の方がわかりやすいかもしれない.

本書の主テーマは, 1.1 節の図 1.1 であった. すなわち,



つまり,

- 「言語的世界観の確立」とか「实在的世界観と言語的世界観の共存」

であった. ベルの不等式 (cf. ref.[4]) は「实在的世界観だけでは理解できないことがある」とか「測定概念は不可欠」と主張していて, この主テーマに至る一つの一里塚である. 4.5.1 節と 4.5.2 節では, 「量子言語内のベルの不等式」について述べる. この部分は簡単で誰もが容易に理解できと思う. 次に 4.5.3 節で「本来のベルの不等式」について述べる. 説明が不十分かもしれないが, 著者のできるのはここまでである. 「本来のベルの不等式」についての一般の評価は, 「人類の到達した最も深遠は叡智」から「全く役に立たない」まで, ピンキリであるが, 本書では,

「一里塚」と考える.

4.5.1 量子言語におけるベルの不等式

次の「結合観測量」は擬積観測量 (cf. 定義 3.19) の一般化である. 言語的コペンハーゲン解釈「観測量は一つだけ」に従うならば, 同時観測量とか擬積観測量よりも, **結合観測量は最も基本的**である. つまり, 同時観測量とか擬積観測量とかは結合観測量の特殊な場合である.

定義 4.17. [結合可能, 結合観測量 (cf. ref. [25])] $[A \subseteq \overline{A}]_{B(H)}$ を基本構造とする. 族 $\{S_1, S_2, \dots, S_j\}$ を $S_l \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall l = 1, 2, \dots, j$) とする. 各 $l \in \{1, 2, \dots, j\}$ に対して, $\overline{A}$ 内の観測量 $O_l = (\times_{s \in S_l} X_s, \boxtimes_{s \in S_l} \mathcal{F}_s, F_l)$ を考える. 自然な写像 $\pi_l : \times_{k=1,2,\dots,n} X_k \rightarrow \times_{s \in S_l} X_s$ を次のように定める.

$$\times_{k=1,2,\dots,n} X_k \ni (x_k)_{k=1,2,\dots,n} \mapsto (x_k)_{k \in S_l} \in \times_{k \in S_l} X_k$$

ここで, $\{O_l : l = 1, 2, \dots, j\}$ が次を満たすとき, 結合可能であると言う. 観測量 $O = (\times_{k=1,2,\dots,n} X_k, \boxtimes_{k=1,2,\dots,n} \mathcal{F}_k, F)$ が存在して, 次を満たす:

$$F(\pi_l^{-1}(\times_{s \in S_l} \Xi_s)) = F_l(\times_{s \in S_l} \Xi_s) \quad (\Xi_s \in \mathcal{F}_s, s \in S_l) \quad (4.48)$$

また, この観測量 O を $\{O_l : l = 1, 2, \dots, j\}$ の結合観測量と言う. もちろん, 結合観測量の存在と一意性は保証されているわけではない.

各 l に対して, 測定 $M_{\overline{A}}(O_l, S_{[\rho_0]})$ は測定 $M_{\overline{A}}(O, S_{[\rho_0]})$ に含まれている. したがって, 測定 $M_A(O, S_{[\rho_0]})$ を行えばことが足りる.

例 4.18. [擬積観測量] $[A \subseteq \overline{A}]_{B(H)}$ を基本構造とする. 族 $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ を $S_l = \{l\}$ ($\forall l = 1, 2, \dots, j$) と定める. 各 $l \in \{1, 2, \dots, j\}$ に対して, $\overline{A}$ 内の観測量 $O_l = (\times_{s \in S_l} X_s, \boxtimes_{s \in S_l} \mathcal{F}_s, F_l)$ を考える. 自然な写像 $\pi_l : \times_{k=1,2,\dots,n} X_k \rightarrow X_l$ を次のように定める.

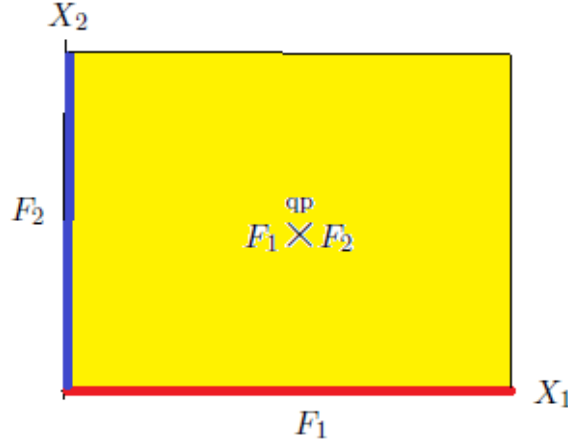
$$\times_{k=1,2,\dots,n} X_k \ni (x_k)_{k=1,2,\dots,n} \mapsto x_l \in X_l$$

もし $\overline{A}$ 内の観測量 $O = (\times_{k=1,2,\dots,n} X_k, \boxtimes_{k=1,2,\dots,n} \mathcal{F}_k, F)$ が存在して,

$$F(\pi_l^{-1}(\Xi_l)) = F(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{l-1} \times \Xi_l \times X_{l+1} \times \dots \times X_n) = F_l(\Xi_l) \quad (\Xi_l \in \mathcal{F}_l, l = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすならば $\{O_l : l = 1, 2, \dots, l\}$ は結合可能である. $O = (\times_{k=1,2,\dots,n} X_k, \boxtimes_{k=1,2,\dots,n} \mathcal{F}_k, F)$ は $\{O_l = (\times_{s \in S_l} X_s, \boxtimes_{s \in S_l} \mathcal{F}_s, F_l) : l = 1, 2, \dots, n\}$ の結合観測量であるが, この場合は擬積観測量とも言い, $\overset{\text{qp}}{\times}_{k=1,2,\dots,n} O_k = (\times_{k=1}^n X_k, \boxtimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k, \overset{\text{qp}}{\times}_{k=1,2,\dots,n} F_k)$ と記される.

また, 同時観測量は擬積観測量であり, 擬積観測量は結合観測量であることに注意せよ.



例 4.19. [三段論法における結合観測量] $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を基本構造とする. 族 $\{S_1, S_2\}$ を $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2, 3\}$ とする. 各 S_1, S_2 に対して, 観測量 $O_{S_1} = (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, F_l)$ と $O_{S_2} = (X_2 \times X_3, \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, F_{S_2})$ を考える. 自然な写像として $\pi_1 : \times_{k=1,2,3} X_k \rightarrow \times_{k=1,2} X_k$ と $\pi_2 : \times_{k=1,2,3} X_k \rightarrow \times_{k=2,3} X_k$ を次のように定める.

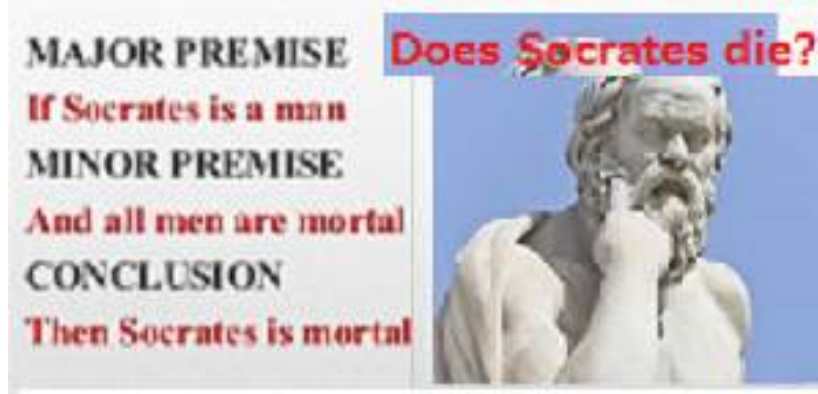
$$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\pi_1} (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\pi_2} (x_2, x_3),$$

ここで, もし $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $O = (\times_{k=1,2,3} X_k, \boxtimes_{k=1,2,3} \mathcal{F}_k, F)$ で次を満たすものが存在するならば $\{O_{S_1}, O_{S_2}\}$ は結合可能であると言う.

$$F(\Xi_1 \times \Xi_2 \times X_3) = F_{S_1}(\Xi_1 \times \Xi_2), \quad F(X_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3) = F_{S_2}(\Xi_2 \times \Xi_3) \quad (\Xi_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, 2, 3)$$

この結合観測量 O は三段論法の証明において重要な役割をする (cf. ref. [25]). 結論的には, 三段論法 (i.e., $[[A \Rightarrow B] \wedge [B \Rightarrow C]] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$) は古典系では正しいが, 量子系では正しいとは言えない (8.7 節参照).

(#1) ソクラテスは人間であり、且つ、人間は死ぬ。
 故に、ソクラテスは死ぬ。



本節 (ベルの不等式) では次の結合観測量が重要になる。

例 4.20. [ベルの不等式に関する結合観測量] $[\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を基本構造とする. $X = \{-1, 1\}$ とおく. $\overline{\mathcal{A}}$ 内の四つの観測量 $O_1 = (X, \mathcal{P}(X), G_1)$, $O_2 = (X, \mathcal{P}(X), G_2)$, $O_3 = (X, \mathcal{P}(X), G_3)$, $O_4 = (X, \mathcal{P}(X), G_4)$ を考える. さらに四つの観測量 $O_{13} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{13})$, $O_{14} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{14})$, $O_{23} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{23})$, $O_{24} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{24})$ が次を満たすとする.

$$\begin{aligned} F_{13}(\{x\} \times X) &= F_{14}(\{x\} \times X) = G_1(\{x\}), & F_{23}(\{x\} \times X) &= F_{24}(\{x\} \times X) = G_2(\{x\}) \\ F_{13}(X \times \{x\}) &= F_{23}(X \times \{x\}) = G_3(\{x\}), & F_{14}(X \times \{x\}) &= F_{24}(X \times \{x\}) = G_4(\{x\}) \\ &(\forall x \in \{-1, 1\}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

このとき, 次を満たす $\overline{\mathcal{A}}$ 内の観測量 $O = (X^4, \mathcal{P}(X^4), F)$ が存在するとき, O_{13} , O_{14} , O_{23} , O_{24} は結合可能であると言う. すなわち,

$$\begin{aligned} F_{13}(\{(x_1, x_3)\}) &= F(\{x_1\} \times X \times \{x_3\} \times X), & F_{14}(\{(x_1, x_4)\}) &= F(\{x_1\} \times X \times X \times \{x_4\}) \\ F_{23}(\{(x_2, x_3)\}) &= F(X \times \{x_2\} \times \{x_3\} \times X), & F_{24}(\{(x_2, x_4)\}) &= F(X \times \{x_2\} \times X \times \{x_4\}) \\ &\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^4 \end{aligned} \quad (4.50)$$

結合可能ならば, 条件 (4.49) を満たすことに注意せよ.

測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O} = (X^4, \mathcal{P}(X^4), F), S_{[\rho_0]})$ は $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{13}, S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{14}, S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{23}, S_{[\rho_0]})$ と

$M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{24}, S_{[\rho_0]})$ の結合測定と呼ばれる.

次が本節の**主定理**である.

定理 4.21. [量子言語におけるベルの不等式] $[\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}]_{B(H)}$ を基本構造とする. 純粋状態を $\rho_0 (\in \mathfrak{S}^p(\mathcal{A}^*))$ とする. $X = \{-1, 1\}$ として, 四つの測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{13} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{13}), S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{14} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{14}), S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{23} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{23}), S_{[\rho_0]})$ と $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{24} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{24}), S_{[\rho_0]})$ を考えよう. 同じことであるが, 並行測定 $\otimes_{i=1,2,j=3,4} M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{ij} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{ij}), S_{[\rho_0]})$ を考えよう. 四つの相関関数 ($i = 1, 2, j = 3, 4$) を次のように定める.

$$R_{ij} = \sum_{(u,v) \in X \times X} u \cdot v \rho_0(F_{ij}(\{(u,v)\}))$$

ここで, 四つの観測量 $\mathbf{O}_{13} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{13})$, $\mathbf{O}_{14} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{14})$, $\mathbf{O}_{23} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{23})$, $\mathbf{O}_{24} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{24})$ は結合可能であると仮定する. すなわち, 条件 (4.50) を満たすような $\overline{\mathcal{A}}$ 内の結合観測量 $\mathbf{O} = (X^4, \mathcal{P}(X^4), F)$ の存在を仮定する. したがって, 四つの測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{13}, S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{14}, S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{23}, S_{[\rho_0]})$, $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{24}, S_{[\rho_0]})$ の結合測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O} = (X^4, \mathcal{P}(X^4), F), S_{[\rho_0]})$ を得る. さらに, 次の (量子言語における) ベルの不等式が成り立つ:

$$|R_{13} - R_{14}| + |R_{23} + R_{24}| \leq 2 \quad (4.51)$$

証明. 各 $i = 1, 2, j = 3, 4$ に対して,

$$R_{ij} = \sum_{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \times X \times X \times X} x_i \cdot x_j \rho_0(F(\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\})) \quad (4.52)$$

は明らか. よって, 次を得る.

$$\begin{aligned} & |R_{13} - R_{14}| + |R_{23} + R_{24}| \\ & \leq \sum_{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \times X \times X \times X} \left[|x_1 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_4| + |x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4| \right] \rho_0(F(\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\})) \\ & = \sum_{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \times X \times X \times X} \left[|x_3 - x_4| + |x_3 + x_4| \right] \rho_0(F(\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\})) = 2 \end{aligned}$$

証明終わり. □

この定理の系として次を得る.

系 4.22. 定理 4.21 において並行測定 $\otimes_{i=1,2,j=3,4} \mathbf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{ij} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{ij}), S_{[\rho_0]})$ を考えよう. その測定値を

$$x = ((x_{13}^1, x_{13}^2), (x_{14}^1, x_{14}^2), (x_{23}^1, x_{23}^2), (x_{24}^1, x_{24}^2)) \in X^8 (\equiv \{-1, 1\}^8)$$

とする. N を十分大きな自然数として, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [\otimes_{i=1,2,j=2,3} \mathbf{M}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{ij} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{ij}), S_{[\rho_0]})]$ を考えよう. その測定値を $\{x^n\}_{n=1}^N$ とする. すなわち,

$$\{x^n\}_{n=1}^N = \begin{bmatrix} ((x_{13}^{1,1}, x_{13}^{2,1}), (x_{14}^{1,1}, x_{14}^{2,1}), (x_{23}^{1,1}, x_{23}^{2,1}), (x_{24}^{1,1}, x_{24}^{2,1})) \\ ((x_{13}^{1,2}, x_{13}^{2,2}), (x_{14}^{1,2}, x_{14}^{2,2}), (x_{23}^{1,2}, x_{23}^{2,2}), (x_{24}^{1,2}, x_{24}^{2,2})) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ ((x_{13}^{1,N}, x_{13}^{2,N}), (x_{14}^{1,N}, x_{14}^{2,N}), (x_{23}^{1,N}, x_{23}^{2,N}), (x_{24}^{1,N}, x_{24}^{2,N})) \end{bmatrix} \in (X^8)^N$$

とする. このとき, 大数の法則より, 十分大きな自然数 N に対して, 次が言える.

$$R_{ij} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{ij}^{1,n} x_{ij}^{2,n} \quad (i = 1, 2, j = 3, 4).$$

ここで, 式 (4.51) より次を得る.

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{13}^{1,n} x_{13}^{2,n}}{N} - \sum_{n=1}^N \frac{x_{14}^{1,n} x_{14}^{2,n}}{N} \right| + \left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{23}^{1,n} x_{23}^{2,n}}{N} + \sum_{n=1}^N \frac{x_{24}^{1,n} x_{24}^{2,n}}{N} \right| \leq 2, \quad (4.53)$$

これが”量子言語におけるベルの不等式”である.

4.5.2 結合条件を満たしてなければベルの不等式 (定理 4.21) は古典系でも量子系でも破られる

前節の定理 4.21 (or 系 4.22) は次を主張する.

(F₁) 結合可能条件のもとでは (cf. 定義 4.17 or 例 4.20), ベルの不等式は (4.51) (or, (4.53)) はいつでも (古典系でも量子系でも) 成立する.

また, 同じ意味で (対偶表現をすれば),

(F₂) ベルの不等式 (4.51) (or, (4.53)) が破られたとしたら, 結合観測量が存在しないわけで, したがって, 結合観測量を測定できない. よって測定値を得ることができない.

である.

注意 4.23. 上の (F) は次の良く知られた事実と似ている (4.3 節; ハイゼンベルグの不確定性原理; 注釈 4.2).

(F'₂) 位置観測量 Q と運動観測量 P の同時測定 (一般には, 結合測定) は可能ではない. すなわち, 同時測定値を得ることはできない.

このことは, しばしば, 測定の言葉を使わずに (すなわち, 一元論の立場から) 「位置観測量 Q と運動観測量 P の (同時) 真の値は存在しない」と表現される. しかし, 重要なのはつぎの問題である.

- 「真の値は存在しない」のか, または「存在するけど, 測定できない」のか, どちらなのだろう?

後者ならば, 多少困った気分がするとしても, 大したことではない. 神が知っていることでも人間が知り得ないことなどいくらでもあるだろうから, 後者はアインシュタインの許容範囲内だろう. しかし, 前者ならば「測定が真の値を生む」わけで, 二元論の精神「To be is to be perceived」を具現していると言える. 結論的には, ベルの議論は「真の値は存在しない」という主張に軍配を上げる. 以下にこれを議論する.

上の (F₂) は我々に次を期待させる:

(G) 古典系でも量子系でも, 結合可能条件が満たされていないときはベルの不等式 (4.51) (or, (4.53)) は破られる.

この (G) は [31] で示したことであるが, 以下にすこし詳しく説明する. .

4.5.2.1 ベルの思考実験

さて, (G) を示すために, 次の 3 ステップ ([Step:I] ~ [Step:III]) に分けて説明する.

[Step: I]. $X = \{-1, 1\}$ とする. 複素数 $a_k (= \alpha_k + \beta_k \sqrt{-1} \in \mathbb{C} : \text{複素数体})$ ($k = 1, 2, 3, 4$) は $|a_k| = 1$ を満たすとする. 確率空間 $(X^2, \mathcal{P}(X^2), \nu_{a_i a_j})$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) を以下のように定める.

$$\begin{aligned}\nu_{a_i a_j}(\{(1, 1)\}) &= \nu_{a_i a_j}(\{(-1, -1)\}) = (1 - \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j)/4 \\ \nu_{a_i a_j}(\{(-1, 1)\}) &= \nu_{a_i a_j}(\{(1, -1)\}) = (1 + \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j)/4\end{aligned}\quad (4.54)$$

相関関数 $R(a_i, a_j)$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) を次のように定める.

$$R(a_i, a_j) \equiv \sum_{(x_1, x_2) \in X \times X} x_1 \cdot x_2 \nu_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\}) = -\alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j \quad (4.55)$$

ここで以下の問題を考える.

(H) 次を満たすような測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathbf{O}_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}), S_{[\rho_0]})$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) と見つけよ.

$$\rho_0(F_{a_i a_j}(\Xi)) = \nu_{a_i a_j}(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{P}(X^2)) \quad (4.56)$$

及び

$$\begin{aligned}F_{a_1 a_3}(\{x_1\} \times X) &= F_{a_1 a_4}(\{x_1\} \times X) = G_{a_1}(\{x_1\}) \\ F_{a_2 a_3}(\{x_2\} \times X) &= F_{a_2 a_4}(\{x_2\} \times X) = G_{a_2}(\{x_2\}) \\ F_{a_1 a_3}(X \times \{x_3\}) &= F_{a_2 a_3}(X \times \{x_3\}) = G_{a_3}(\{x_3\}) \\ F_{a_1 a_4}(X \times \{x_4\}) &= F_{a_2 a_4}(X \times \{x_4\}) = G_{a_4}(\{x_4\}) \\ &(\forall x_k \in X (\equiv \{-1, 1\}), k = 1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

これは条件 (4.49) と同じである.

[Step: II].

二つに分けて (i.e., 古典系と量子系), 問題 (H) に以下に答える.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \text{(i): 量子系: } [\mathcal{A} = B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2) (\equiv B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)), \overline{\mathcal{A}} = B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)] \\ \text{(ii): 古典系: } [\mathcal{A} = C_0(\Omega) \otimes C_0(\Omega) (\equiv C_0(\Omega \times \Omega)), \overline{\mathcal{A}} = L^\infty(\Omega) \otimes L^\infty(\Omega)] \end{array} \right.$$

(i): 量子系: $[\mathcal{A} = B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)]$

さて,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{C}^2).$$

とおく. 各 a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) に対して, $B(\mathbb{C}^2)$ 内の観測量 $O_{a_k} \equiv (X, \mathcal{P}(X), \widehat{G}_{a_k})$ を次のように定める.

$$\widehat{G}_{a_k}(\{1\}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_k \\ a_k & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{G}_{a_k}(\{-1\}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{a}_k \\ -a_k & 1 \end{bmatrix}.$$

ここに, 共役複素数 $\bar{a}_k = \alpha_k - \beta_k \sqrt{-1}$. よって, $B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)$ 内の四つの観測量が定まる:

$$\begin{aligned} \widehat{O}_{a_i} &= (X, \mathcal{P}(X), G_{a_i} (\equiv \widehat{G}_{a_i} \otimes I)), \quad \widehat{O}_{a_j} = (X, \mathcal{P}(X), G_{a_j} (\equiv I \otimes \widehat{G}_{a_j})) \\ (i &= 1, 2, j = 3, 4) \end{aligned} \quad (4.57)$$

そして,

$$O_{a_i a_j} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j} := G_{a_i} \cdot G_{a_j}) \quad (i = 1, 2, j = 3, 4) \quad (4.58)$$

ここで, $F_{a_i a_j}$ は G_{a_i} と G_{a_j} に分離されることに注意せよ.

さらに, シングレット状態: $\rho_0 = |\psi_s\rangle\langle\psi_s|$ ($\in \mathfrak{S}^p(B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)^*)$):

$$\psi_s = (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) / \sqrt{2}$$

を固定する.

したがって, $B(\mathbb{C}^2) \otimes B(\mathbb{C}^2)$ 内の測定 $\mathbf{M}_{B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)}(O_{a_i a_j}, S_{[\rho_0]})$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) が定まる. 次は明らか. 各 $(x_1, x_2) \in X^2 (\equiv \{-1, 1\}^2)$ に対して,

$$\begin{aligned} \rho_0(F_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\})) &= \langle \psi_s, (G_{a_i}(\{x_1\}) \cdot G_{a_j}(\{x_2\})) \psi_s \rangle = \nu_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\}) \\ (i &= 1, 2, j = 3, 4) \end{aligned} \quad (4.59)$$

たとえば,

$$\begin{aligned}
\rho_0(F_{a_i b_j}(\{(1, 1)\})) &= \langle \psi_s, (G_{a_i}(\{1\}) \otimes G_{a_j}(\{1\})) \psi_s \rangle \\
&= \frac{1}{8} \langle (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1), \left(\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_i \\ a_i & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_j \\ a_j & 1 \end{bmatrix} \right) (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \rangle \\
&= \frac{1}{8} \langle \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_i \\ a_i & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_j \\ a_j & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{8} \langle \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ a_i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{a}_j \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{a}_i \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ a_j \end{bmatrix} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{8} (2 - a\bar{a}_j - \bar{a}_i a_j) = (1 - \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j)/4 = \nu_{a_i a_j}(\{(1, 1)\}).
\end{aligned}$$

したがって, 測定 $M_{B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)}(O_{a_i a_j}, S_{[\rho_0]})$ は条件 (H) を満たす.

(ii): 古典系の場合: $[\mathcal{A} = C_0(\Omega) \otimes C_0(\Omega) = C_0(\Omega \times \Omega)]$

さて $\omega_0 (= (\omega'_0, \omega''_0)) \in \Omega \times \Omega$, $\rho_0 = \delta_{\omega_0} (\in \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega \times \Omega)^*), \text{i.e., } \omega_0 \text{ での点測度})$ とおく.

$L^\infty(\Omega \times \Omega)$ 内の観測量 $O_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j})$ を次のように定める.

$$[F_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\})](\omega) = \nu_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\}) \quad (\forall (x_1, x_2) \in X^2, i = 1, 2, j = 3, 4, \forall \omega \in \Omega \times \Omega)$$

すなわち, $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ 内の次の4つの観測量を得る.

$$O_{a_i a_j} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}) \quad (i = 1, 2, j = 3, 4) \quad (4.60)$$

(ここで, 分離形 (cf. 式 (4.58)) でないことに注意せよ). この測定 $M_{C_0(\Omega \times \Omega)}(O_{a_i a_j}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ は明らかに条件 (H) を満たす.

(ii)': 古典系の場合: $[\mathcal{A} = C_0(\Omega) \otimes C_0(\Omega) = C_0(\Omega \times \Omega)]$

上の (ii) 以外の例も幾らでも述べる事ができる. たとえば, 式 (4.54) を少し一般化して, 次の確率測度 $\nu_{a_i a_j}^t$ ($0 \leq t \leq 1$) を考えよう.

$$\begin{aligned}
\nu_{a_i a_j}^t(\{(1, 1)\}) &= \nu_{a_i a_j}^t(\{(-1, -1)\}) = (1 - t(\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j))/4 \\
\nu_{a_i a_j}^t(\{(-1, 1)\}) &= \nu_{a_i a_j}^t(\{(1, -1)\}) = (1 + t(\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j))/4
\end{aligned} \quad (4.61)$$

実数値連続関数 $t(\in C_0(\Omega \times \Omega))$ は $0 \leq t(\omega', \omega'') \leq 1$ ($\forall \omega = (\omega', \omega'') \in \Omega \times \Omega$) を満たすとしよう. さらに, ある $\omega_0 (= (\omega'_0, \omega''_0)) \in \Omega \times \Omega$ に対して, $t(\omega_0) = 1$ としよう. また, $\rho_0 = \delta_{\omega_0} (\in \mathfrak{S}^p(C_0(\Omega \times \Omega)^*), \text{i.e., } \omega_0 \text{ での点測度})$ とする. ここで, $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ 内の観測量

$O_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j})$ を次のように定める.

$$[F_{a_i a_j}(\{(x_1, x_2)\})](\omega) = \nu_{a_i a_j}^{t(\omega)}(\{(x_1, x_2)\}) \quad (\forall (x_1, x_2) \in X^2, i = 1, 2, j = 3, 4, \forall \omega \in \Omega \times \Omega) \quad (4.62)$$

このとき, $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ 内の四つの観測量

$$O_{a_i a_j} = (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}) \quad (i = 1, 2, j = 3, 4)$$

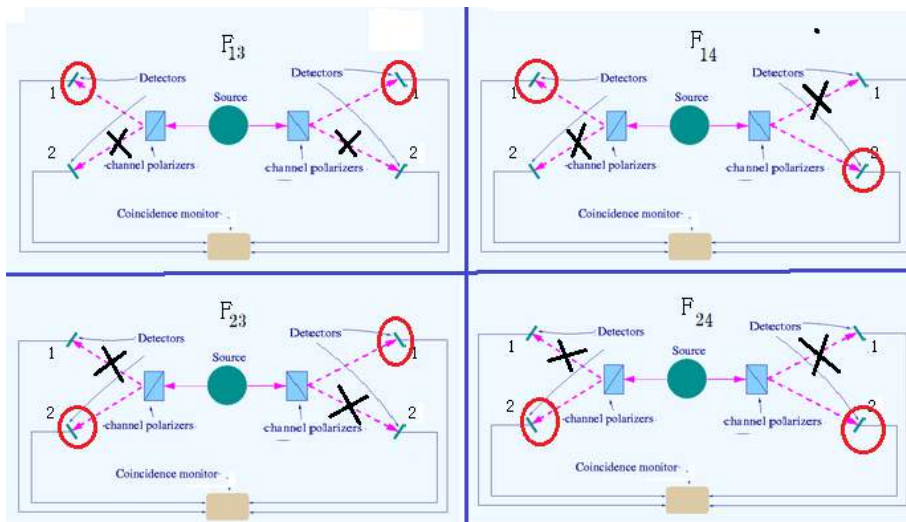
を得る (ただし, これは分離形 (cf. 式 (4.58)) ではない). 明らかに, この測定 $M_{L^\infty(\Omega \times \Omega)}(O_{a_i a_j}, S_{[\delta_{\omega_0}]})$ は条件 (H) を満たす.

[Step: III].

式 (4.54) で定義されたように, 四つの複素数 $a_k (= \alpha_k + \beta_k \sqrt{-1}; k = 1, 2, 3, 4, |a_k| = 1)$ を考えて, $\bar{\mathcal{A}}$ 内の次の観測量を定める.

$$\begin{aligned} O_{a_1 a_3} &:= (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_1 a_3}), & O_{a_1 a_4} &:= (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_1 a_4}), \\ O_{a_2 a_3} &:= (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_2 a_3}), & O_{a_2 a_4} &:= (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_2 a_4}). \end{aligned}$$

すなわち, $\otimes_{i=1,2,j=3,4} \bar{\mathcal{A}}$ 内の並行測定 $\otimes_{i=1,2,j=3,4} M_{\bar{\mathcal{A}}}(O_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}), S_{[\rho_0]})$ を考える.



ここで,

$$a_1 = \sqrt{-1}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad a_4 = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

といて、式 (4.55) から次を得る.

$$|R(a_1, a_3) - R(a_1, a_4)| + |R(a_2, a_3) + R(a_2, a_4)| = 2\sqrt{2} \quad (4.63)$$

さらに、測定値 $x(\in X^8)$ が得られたとしよう. ここに、

$$x = ((x_{13}^1, x_{13}^2), (x_{14}^1, x_{14}^2), (x_{23}^1, x_{23}^2), (x_{24}^1, x_{24}^2)) \in \prod_{i,j=1,2} X^2 (\equiv \{-1, 1\}^8)$$

である. したがって、十分大きな自然数 N に対して、 N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [\bigotimes_{i=1,2,j=3,4} \mathcal{O}_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}, S_{[\rho_0]})]$ を考え、その測定値 $\{x^n\}_{n=1}^N$ としよう. すなわち、

$$\begin{aligned} \{x^n\}_{n=1}^N &= \begin{bmatrix} ((x_{13}^{1,1}, x_{13}^{2,1}), (x_{14}^{1,1}, x_{14}^{2,1}), (x_{23}^{1,1}, x_{23}^{2,1}), (x_{24}^{1,1}, x_{24}^{2,1})) \\ ((x_{13}^{1,2}, x_{13}^{2,2}), (x_{14}^{1,2}, x_{14}^{2,2}), (x_{23}^{1,2}, x_{23}^{2,2}), (x_{24}^{1,2}, x_{24}^{2,2})) \\ \vdots \\ ((x_{13}^{1,N}, x_{13}^{2,N}), (x_{14}^{1,N}, x_{14}^{2,N}), (x_{23}^{1,N}, x_{23}^{2,N}), (x_{24}^{1,N}, x_{24}^{2,N})) \end{bmatrix} \\ &\in \left(\prod_{i=1,2,j=3,4} X^2 \right)^N (\equiv \{-1, 1\}^{8N}) \end{aligned}$$

とする. 大数の法則から、次が言える.

$$R(a_i, a_j) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{ij}^{1,n} x_{ij}^{2,n} \quad (i = 1, 2, j = 3, 4)$$

これと、式 (4.63) から次を得る.

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{13}^{1,n} x_{13}^{2,n}}{N} - \sum_{n=1}^N \frac{x_{14}^{1,n} x_{14}^{2,n}}{N} \right| + \left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{23}^{1,n} x_{23}^{2,n}}{N} + \sum_{n=1}^N \frac{x_{24}^{1,n} x_{24}^{2,n}}{N} \right| \approx 2\sqrt{2} \quad (4.64)$$

したがって、ベルの不等式 (4.51) (or, (4.53)) は古典系でも量子系でも (結合可能条件を満たさないときは) 破られる.

注意 4.24. 念の為、次を注意しよう. 古典系 $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ の観測量 $\mathcal{O}_{a_i a_j}$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) は可換であるにもかかわらず、結合可能ではない. また、式 (4.61) と式 (4.62) はから、次が言える:

$$\begin{aligned} [F_{a_1 a_3}(\{x\} \times X)](\omega) &= [F_{a_1 a_4}(\{x\} \times X)](\omega) = 1/2, & [F_{a_2 a_3}(\{x\} \times X)](\omega) &= [F_{a_2 a_4}(\{x\} \times X)](\omega) = 1/2, \\ [F_{a_1 a_3}(X \times \{x\})](\omega) &= [F_{a_2 a_3}(X \times \{x\})](\omega) = 1/2, & [F_{a_1 a_4}(X \times \{x\})](\omega) &= [F_{a_2 a_4}(X \times \{x\})](\omega) = 1/2 \\ &(\forall x \in X, \forall \omega \in \Omega \times \Omega), \end{aligned}$$

これは式 (4.49) に対応する.

まとめ 4.25. [本節のまとめ]

(H) を再掲すると,

(H') 次を満たすような測定 $M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}), S_{[\rho_0]})$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) が存在する.

$$\rho_0(F_{a_i a_j}(\Xi)) = \nu_{a_i a_j}(\Xi) \quad (\forall \Xi \in \mathcal{P}(X^2))$$

及び

$$\begin{aligned} F_{a_1 a_3}(\{x_1\} \times X) &= F_{a_1 a_4}(\{x_1\} \times X) = G_{a_1}(\{x_1\}) \\ F_{a_2 a_3}(\{x_2\} \times X) &= F_{a_2 a_4}(\{x_2\} \times X) = G_{a_2}(\{x_2\}) \\ F_{a_1 a_3}(X \times \{x_3\}) &= F_{a_2 a_3}(X \times \{x_3\}) = G_{a_3}(\{x_3\}) \\ F_{a_1 a_4}(X \times \{x_4\}) &= F_{a_2 a_4}(X \times \{x_4\}) = G_{a_4}(\{x_4\}) \\ &(\forall x_k \in X (\equiv \{-1, 1\}), k = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

これは条件 (4.49) と同じである.

であった.

ここで, 十分大きな自然数 N に対して, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [\bigotimes_{i=1,2,j=3,4} M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j}), S_{[\rho_0]})]$ を考え, その測定値 $\{x^n\}_{n=1}^N$ としよう. すなわち,

$$\begin{aligned} \{x^n\}_{n=1}^N &= \begin{bmatrix} ((x_{13}^{1,1}, x_{13}^{2,1}), (x_{14}^{1,1}, x_{14}^{2,1}), (x_{23}^{1,1}, x_{23}^{2,1}), (x_{24}^{1,1}, x_{24}^{2,1})) \\ ((x_{13}^{1,2}, x_{13}^{2,2}), (x_{14}^{1,2}, x_{14}^{2,2}), (x_{23}^{1,2}, x_{23}^{2,2}), (x_{24}^{1,2}, x_{24}^{2,2})) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ ((x_{13}^{1,N}, x_{13}^{2,N}), (x_{14}^{1,N}, x_{14}^{2,N}), (x_{23}^{1,N}, x_{23}^{2,N}), (x_{24}^{1,N}, x_{24}^{2,N})) \end{bmatrix} \\ &\in \left(\bigtimes_{i=1,2,j=3,4} X^2 \right)^N (\equiv \{-1, 1\}^{8N}) \end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{13}^{1,n} x_{13}^{2,n}}{N} - \sum_{n=1}^N \frac{x_{14}^{1,n} x_{14}^{2,n}}{N} \right| + \left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{23}^{1,n} x_{23}^{2,n}}{N} + \sum_{n=1}^N \frac{x_{24}^{1,n} x_{24}^{2,n}}{N} \right| \approx 2\sqrt{2} \quad (4.65)$$

したがって, 量子言語のベルの不等式 (4.53) は古典系でも量子系でも (結合可能条件を満たさないときは) 破られる. すなわち,

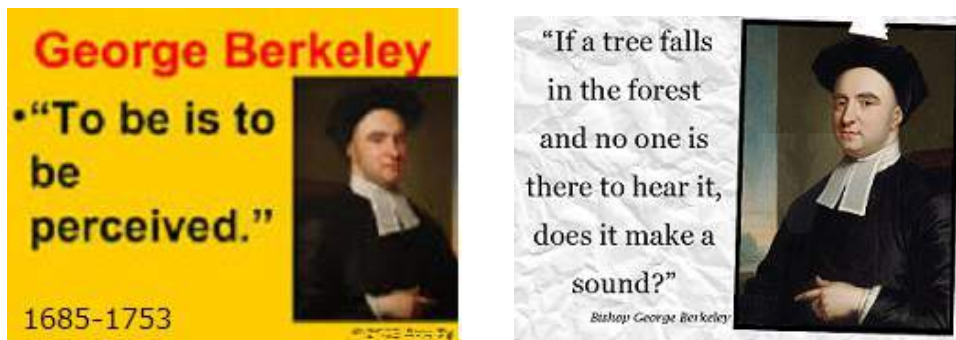
(I) 「なぜ破られるのか?」と問われれば, 当たり前のことであるが, 「 $\overline{\mathcal{A}}$ 内の四つの観測量

$O_{a_i a_j} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_i a_j})$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) が結合可能条件を満たしていない」からである.

4.5.3 本来のベルの不等式：ベルの議論

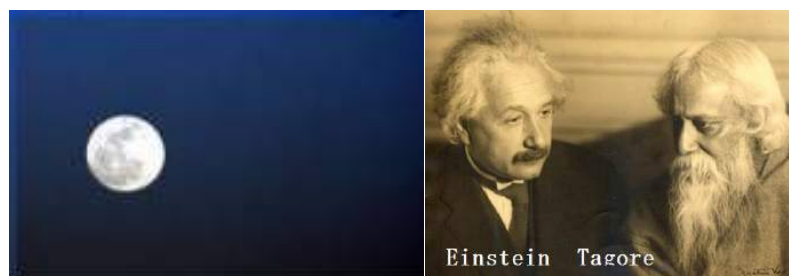
前節の議論は、量子言語 (言語的世界観 (1.1 節の図 1.1)) に基づいている。本書流に言うと、
ボーア=アインシュタイン論争におけるボーアの立場である。すなわち、

(J₁) (バークリー流の) 言語的科学観の基本精神は、「存在するとは知覚されることである」であり、測定以前に「真の値」があるとは仮定しない。測定によって「測定値」が得られるとする。すなわち、「測定」は科学における最も基本的な概念である (i.e., 「測定無くして科学無し」) と主張する。



1.1 節の図 1.1 を見れば、量子言語 (言語的世界観) は新参者で、世界記述の本流は (アインシュタイン流の) 実在的世界観であることがわかるだろう。すなわち、

(J₂) (アインシュタイン流の) 実在的世界観の基本精神は、(アインシュタイン=タゴール会談 (1930 年) で述べたように) 「月は見ていなくてもそこにある」であり、測定以前に「真の値」があるとする (i.e., 物理は測定者なしで成立する)。 「人類誕生以前にも物理法則は成立していたに違いない (i.e., 物理は測定者なしで成立する)」とアインシュタインに言われれば、反論しようがないと思うのが常識だろう。



本節では、実在的世界観に固執する立場から、まとめ 4.25(ベルの思考実験) を再考しよう。

その前に、次の数学の簡単な補題 (ベルの不等式) を用意しておく。

補題 4.26. (i): [数学のベルの不等式 (cf. refs. [68, 10, 71])]:

- 4 つの $\{-1, 1\}$ -値数列 $\{\tilde{x}_i^n\}_{n=1}^\infty$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を考える. 十分大きな自然数 N に対して, $\tilde{R}_{ij}$ ($i = 1, 2, j = 3, 4$) を $\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{x}_i^n \cdot \tilde{x}_j^n$ で定義する. このとき, 次の不等式 (ベルの不等式, CHSH 不等式 (cf. ref. [10])) が成立する:

$$|\tilde{R}_{13} - \tilde{R}_{14}| + |\tilde{R}_{23} + \tilde{R}_{24}| \leq 2 \quad (4.66)$$

(ii): [確率論のベルの不等式]

- $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ を確率空間としよう. 確率変数 $(x_1, x_2, x_3, x_4) : \Theta \rightarrow X^4 (\equiv \{-1, 1\}^4)$ を考えよう. 同様に, 相関関数 R_{ij} ($i = 1, 2, j = 3, 4$) を $\int_{\Theta} x_i(\theta) x_j(\theta) P(d\theta)$ で定義する. このとき, 次のベルの不等式が成立する:

$$|R_{13} - R_{14}| + |R_{23} + R_{24}| \leq 2 \quad (4.67)$$

[証明 (i)] : 証明は次のように簡単である.

$$|\tilde{R}_{13} - \tilde{R}_{14}| + |\tilde{R}_{23} + \tilde{R}_{24}| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\tilde{x}_3^n - \tilde{x}_4^n| + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\tilde{x}_3^n + \tilde{x}_4^n| = 2$$

[証明 (ii)] : 同様に,

$$\begin{aligned} & |R_{13} - R_{14}| + |R_{23} + R_{24}| \\ & \leq \int_{\Theta} |x_3(\theta) - x_4(\theta)| P(d\theta) + \int_{\Theta} |x_3(\theta) + x_4(\theta)| P(d\theta) \leq 2 \end{aligned}$$

よって証明終わり.

□

[注]:

上の (i) と (ii) はかなり似ているが, (i) では大数の法則が使えないので, 本書では, (ii) を使う. すなわち,

- N を十分大きな自然数として, $\{\hat{x}^n \equiv (x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n)\}_{n=1}^N$ を同一分布を持つ独立な確

率変数列とする. また, $r : X^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の関数とする. このとき、

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n) \approx \int_{\Theta} r(\hat{x}^1) P(d\theta)$$

ここから, 実在的世界観に固執する立場から, まとめ 4.25(ベルの思考実験) を再考しよう.

次の仮定をする.

仮定 4.27. [まとめ 4.25(ベルの思考実験) の実在的世界観に基づく仮定]:

まとめ 4.25 の記号の下に,

(K) $\overline{\mathcal{A}}$ 内の四つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_1}), (X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_2}), (X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_3}), (X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_4})$ は真の値 $(x_1, x_2, x_3, x_4) (\in X^4)$ を持っている. すなわち, $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ を確率空間として, 可測関数 $(x_1, x_2, x_3, x_4) : \Theta \rightarrow X^4 (\equiv \{-1, 1\}^4)$ が与えられている

と仮定する.

しかしなんらかの理由によって, 四つの真の値 (x_1, x_2, x_3, x_4) を同時に知ることはできないとする. したがって, $(x_1, x_3) (\equiv (x_{13}^1, x_{13}^2)), (x_1, x_4) (\equiv (x_{14}^1, x_{14}^2)), (x_2, x_3) (\equiv (x_{23}^1, x_{23}^2)), (x_2, x_4) (\equiv (x_{24}^1, x_{24}^2))$ のように部分に分けて次のように測定することを考える.

(L₁₃) 二つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_1})$ と $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_3})$ に関しては, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_1 a_3} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_1 a_3}), S_{[\rho_0]})]$ を行って, 測定値 $\{(x_{13}^{1,n}, x_{13}^{2,n})\}_{n=1}^N$ を得た. 大数の法則から, 十分大きな自然数 N に対しては,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{13}^{1,n} \cdot x_{13}^{2,n} \approx R_{13} \left(= \int_{\Theta} x_1(\theta) x_3(\theta) P(d\theta) \right)$$

が成立する

(L₁₄) 二つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_1})$ と $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_4})$ に関しては, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_1 a_4} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_1 a_4}), S_{[\rho_0]})]$ を行って, 測定値

$\{(x_{14}^{1,n}, x_{14}^{2,n})\}_{n=1}^N$ を得た. 大数の法則から, 十分大きな自然数 N に対しては,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{14}^{1,n} \cdot x_{14}^{2,n} \approx R_{14} \left(= \int_{\Theta} x_1(\theta) x_4(\theta) P(d\theta) \right)$$

が成立する

(L₂₃) 二つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_1})$ と $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_3})$ に関しては, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_2 a_3} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_2 a_3}), S_{[\rho_0]})]$ を行って, 測定値 $\{(x_{23}^{1,n}, x_{23}^{2,n})\}_{n=1}^N$ を得た. 大数の法則から, 十分大きな自然数 N に対しては,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{23}^{1,n} \cdot x_{23}^{2,n} \approx R_{23} \left(= \int_{\Theta} x_2(\theta) x_3(\theta) P(d\theta) \right)$$

が成立する

(L₂₄) 二つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_2})$ と $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_4})$ に関しては, N -並行測定 $\bigotimes_{n=1}^N [M_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{O}_{a_2 a_4} := (X^2, \mathcal{P}(X^2), F_{a_2 a_4}), S_{[\rho_0]})]$ を行って, 測定値 $\{(x_{24}^{1,n}, x_{24}^{2,n})\}_{n=1}^N$ を得た. 大数の法則から, 十分大きな自然数 N に対しては,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{24}^{1,n} \cdot x_{24}^{2,n} \left(= \int_{\Theta} x_2(\theta) x_4(\theta) P(d\theta) \right)$$

が成立する

四つの真の値 (x_1, x_2, x_3, x_4) を、 $(x_1, x_3)(\equiv (x_{13}^1, x_{13}^2))$, $(x_1, x_4)(\equiv (x_{14}^1, x_{14}^2))$, $(x_2, x_3)(\equiv (x_{23}^1, x_{23}^2))$, $(x_2, x_4)(\equiv (x_{24}^1, x_{24}^2))$ のように部分に分けて測定しているとしたら, 補題 4.26 より,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{13}^{1,n} x_{13}^{2,n}}{N} - \sum_{n=1}^N \frac{x_{14}^{1,n} x_{14}^{2,n}}{N} \right| + \left| \sum_{n=1}^N \frac{x_{23}^{1,n} x_{23}^{2,n}}{N} + \sum_{n=1}^N \frac{x_{24}^{1,n} x_{24}^{2,n}}{N} \right| \\ & \approx |R_{13} - R_{14}| + |R_{23} + R_{24}| \leq 2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

となるはずである. しかし, 量子言語 (言語的世界観) の結果 (4.65) は実験検証されているのだから, 結果 (4.68) が間違っていることになり, つまり,

- つまり、「各部分で部分的に真でも、全体では真とは限らない」
実在的世界観に基づく仮定 4.27 「真の値が存在する」が間違っている。

ことになる。

そうだとすると、このような議論はマユツバのような気がしないわけではない。たとえば、仮定 4.27 の (K) では

(M₁) 言語的コペンハーゲン解釈 (3.1 節) では「観測量は一つだけ」なのに、存在しない結合観測量の部分観測量のような扱いで、四つの観測量 $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_1})$, $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_2})$, $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_3})$, $(X(= \{-1, 1\}), \mathcal{P}(X), G_{a_4})$ を考えてしまった

(M₂) 言語的コペンハーゲン解釈 (3.1 節) では「測定無くして確率無し」なのに、確率空間 $(\Theta, \mathcal{B}, P)$ を想定してしまって、「真の値」を確率変数で表現してしまった。実在的世界観において、「確率」という言葉を使うと、「神はサイコロ遊びをしない」とアインシュタインに怒られてしまう。

等である。

結果 (4.68) が実験結果に合わないという以前に 仮定 4.27 が不自然な気もする。しかし、言語的世界観とは別の世界観に基づいた議論をしようとしているのだから奇異なのは仕方がないのかもしれないが、著者はこれらの疑問に対して読者を納得させるだけの力量を持たない。このように、著者はベルの議論を完全に理解しているわけではないが、

(M₃) ベルの不等式の議論において、定理 4.21 と「4.5.2 節：古典系でもベルの不等式は破られる」とを言わない議論はフェアでない

と思う。

4.5.4 まとめ

ボーア＝アインシュタイン論争 (refs. [14, 7]) において、アインシュタインの立場 (すなわち、“月は見ていなくてもそこに存在する” (i.e., 物理は測定者なしで成立する)) は実在的世界観 (1.1 節の図 1.1) である。他方、ボーアの立場 (i.e., “存在するとは知覚されることである” (i.e., 測定無くして科学無し)) は言語的世界観 (1.1 節の図 1.1) である。

4.5.1 節と 4.5.3 節では、言語的世界観の下でベルの不等式 (定理 4.21) を議論したが、これは容易に理解できたと思う。つまり、主張 (F₂) で、再掲すると、

(N₁) ベルの不等式は (4.51) (or, (4.53)) が破られたとしたら, 結合観測量が存在しないわけで, したがって, 結合観測量を測定できない. よって測定値を得ることができない.

である.

4.5.3 節では, 実在的世界観に基づく「ベルの本来の議論」を復習して, 次を結論した.

(N₂) [アインシュタインの立場から]:

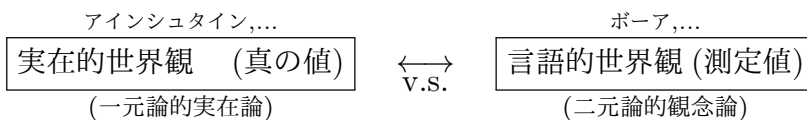
もし確率論的ベルの不等式 (4.67) が, 4.5.3 節のベルの思考実験で破られるならば, 真の値は存在しない

である. しかし, 上の (M) でも述べたように, 著者はこの結論をスッキリ理解しているわけではない. すなわち, 「(N₂) は, (N₁) を誤った言葉で表現しているに過ぎない」という可能性を全否定できないと思っている. すなわち,

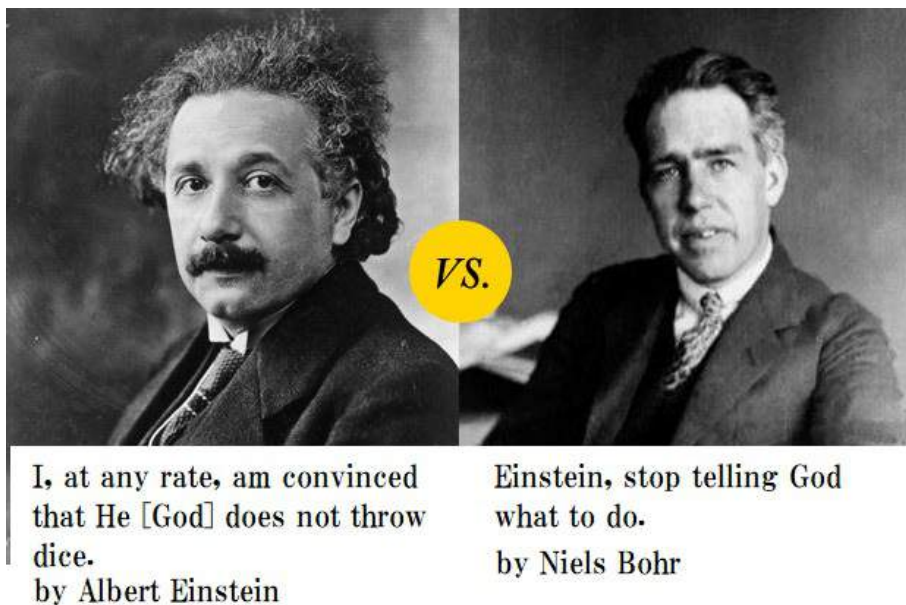
(O) (N₂) は, 科学的表現 (N₁) の哲学的表現かもしれない

と考えことは一理ある.

注意 4.28. 世界記述の歴史 (1.1 節の図 1.1) において, 次の対立構造が中心的であった.



すなわち,



で、

- ここで、

$$[\text{サイコロ}] = [\text{確率}] = [\text{試行}] = [\text{測定}]$$

と思えば、アインシュタインの主張は「人類 (=測定者) の誕生以前から、物理法則は成立していた」である。アインシュタインのサービス精神ある名言「神はサイコロを投げない」に対して、ボーアの「アインシュタインよ、神にああしろ、こうしろと指図するのはやめろ」は、言葉尻に過ぎず、解答になっていないと、著者は思う。

表 4.1 : 実在的科学観 vs. 言語的科学観

論争 \ [実] vs. [言]	実在的科学観	言語的科学観
ギリシャ哲学	アリストテレス	プラトン
普遍論争	唯名論 (オッカム)	実念論 (アンセルムス)
時空	ニュートン (クラーク)	ライプニッツ
量子力学	アインシュタイン (cf. [14])	ボーア (cf. [7])

(cf. 注釈 8.7 in 第 8 講 or 文献. [50]).

アインシュタイン=ボーア論争は、「何を論争しているのかわからないが、きっと非常に重要なことを議論しているのだろう」という感想が一般的かもしれない。しかし、何を論争しているのか明確に理解するために論争しているのだと思う。何を論争しているのかがわかったときは、もうほとんど解決されているのだと思う。上の表もすべて同じで、著者は世界記述の歴史 (1.1 節の図 1.1) を理解するための論争だったのだと思う。もっとはっきり言うならば、実在的科学観はニュートンの時点で確立したと考えてよいのだから、

(測定概念が必須の) 言語的科学観を確立するための論争

量子言語によって言語的科学観 (=二元論的観念論) が確立したわけであるが、ここに至るひとつの一里塚として、(高尚な気分を感じさせるだけで、決して生産的とは言えない) ベルの議論や NO-GO 定理 (「いくつかの観測量に同時に確定した値 (”真の値” or, ”隠れた変数”) を付与でき

るか？」という問題に答える定理) があるのだと思う. すなわち、

「**ボーア＝アインシュタイン論争**」
 「真の値は存在しない」のか「存在するが測定できない」のか？

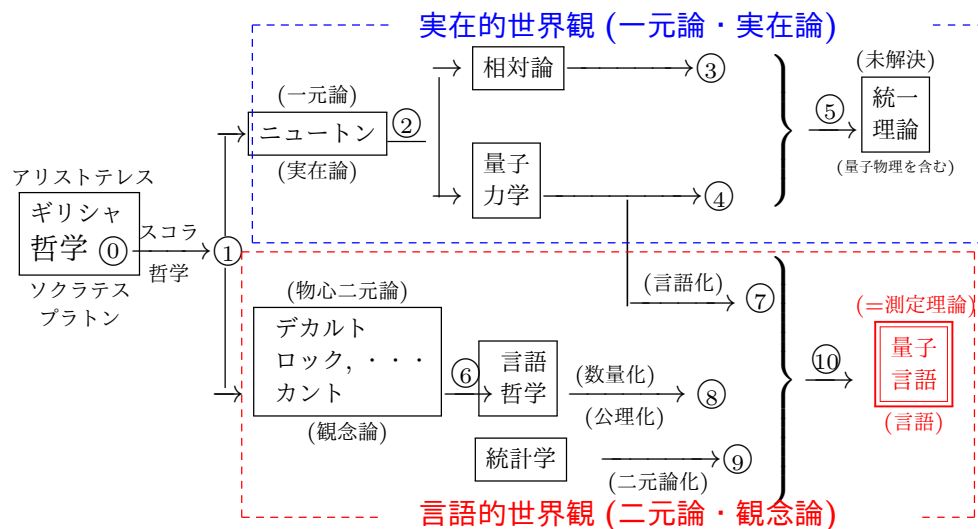
→ ベルの不等式 (NO-GO 定理) → 言語的世界観の確立
「真の値は存在しない」 だから、言語ルール 1(測定) に「真の値」など書いていないでしょう

である。こう思えば、全く役に立たないベルの不等式が高く評価されている理由がわかる。ただし、「何のための NO-GO 定理か？」は重要な問題意識で、やはり、言語的世界観へのステップの一つなのだと思う。

それにしても、アインシュタインに、「月は見ていなくても、そこにある」とか「測定者(人類)が誕生する前から、物理法則は成立していたはず」と言われてしまうと、怯んでしまうのが常かもしれない。しかし、本書は、

「測定」は、物理的概念ではなくて、形而上学的概念である

と頑張る立場である。すなわち、1.1 節の図 1.1 が主張するように、実在的科学観と言語的科学観は雌雄を決するものではなくて、共存すべきものと考えたい。



もし次のブレイクスルーがあるとしたら、量子力学を実在的世界観の下に定式化する天才が現れたときであるが、それでも実在的科学観と言語的科学観の共存は続くと思う。