

乾燥亀裂のパターン形成に関する数理モデルと
数値解析手法の開発

2017 年度

廣部 紗也子

学位論文 博士（工学）

乾燥亀裂のパターン形成に関する数理モデルと
数値解析手法の開発

2017 年度

慶應義塾大学大学院理工学研究科

廣部 紗也子

論文要旨

乾燥破壊現象は、乾燥に伴う材料の不均一な体積収縮によって応力が発生し、亀裂が形成される現象である。乾燥亀裂は網目状構造をもち、材料表面を特徴的な長さスケールをもった多角形セルに分割する。乾燥亀裂のサイズ・形状・網目状構造は材料や条件によって大きく異なるが、「階層的に形成される網目状の亀裂パターン構造が、特徴的な長さスケールをもった多角形セルを自発的に形成する」という基本的性質は保たれている。

従来研究では乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の問題に対し、実験・理論・数値解析による様々なアプローチが行われてきたが、物理的根拠のない現象論的モデルや複雑な材料構成則の導入、恣意的なパラメータチューニングといった研究手法は、意図する結果を作り出しているに過ぎず、この問題の本質的な解決策にはなり得ていない。

本研究では、乾燥破壊現象を材料内の水分拡散、材料の変形、材料の破壊という 3 つのファンダメンタルな物理現象の連成によって成り立つマルチフィジックスの問題であると考え、「乾燥亀裂パターンの特徴的な長さスケールは、複数の物理現象の連成によって決定される」という仮説を提案する。

この仮説を元に、乾燥破壊現象を拡散・変形・破壊の連成によってモデル化し、拡散に関する初期値境界値問題と変形に関する境界値問題の連成による解析的な定式化を行う。また、粒子離散化手法に基づく粒子離散化有限要素法 (PDS-FEM) を導入し、離散的な定式化を行うとともに、拡散の有限要素解析と変形/破壊の PDS-FEM 解析を弱連成させた数値解析を行うことで、特徴的な長さスケールをもつ亀裂パターンが、恣意的な長さスケールの導入なしに均質な初期状態から創発される過程を再現する。

また、炭酸カルシウムを用いた乾燥破壊実験を行い、実験と数値解析で得られた亀裂の網目状構造、多角形セルのサイズ、亀裂パターンの形成過程に関して比較することで、提案した仮説とそれに基づく連成モデルの妥当性の検証を行う。

さらに、特徴的な長さスケールをもつ多角形セルが自発的に形成される物理的要因に関して考察を行うため、拡散と変形の連成にのみ着目した数値解析を行い、応力の発現に対し試験体の層厚と横断面サイズが与える影響を捉える。加えて、数値解析から得られるセルの形成過程における水分分布を検証し、亀裂面からの蒸発によって各セルに発生するフープ応力が亀裂経路の決定において重要な役割を果たしていることを示す。

本論文の数値解析結果および考察により、「スケール不変性をもつ支配方程式の相互作用によって均質な場から特徴的な長さスケールを決定できる」という、乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の背後に共通の支配法則が示される。

Thesis Abstract

Mathematical Model and Numerical Analysis Method for Pattern Formation in Desiccation Cracking

The inhomogeneous volume shrinkage of materials due to desiccation results in the formation of the desiccation cracks. The desiccation cracks have a net-like structure and tessellate the dry-out surface of the materials into polygonal cells with typical length scale. While some varieties can be observed in size, shape, and net-like structure of the cracks depending on the choice of materials and conditions, the basic features of the desiccation crack pattern (i.e., “the net-like structure of the crack pattern formed in a hierarchical manner” and “the self-organization of the polygonal cells with typical length scale”) are conserved.

In the previous researches, the mechanism for the crack pattern formation has been investigated through experimental, theoretical and numerical approaches. These approaches can be regarded as the efforts to describe the complicated crack pattern by introducing the artificial complexity in the material constitutive law. Therefore, the achievement of these existing approaches is limited to the reproduction of the crack pattern similar to the experimental observation. The phenomenological model without physical basis and/or the intentional parameter tuning for the reproduction of the crack pattern cannot be the substantial solution for this phenomenon.

In this research, the desiccation crack phenomenon is divided into three different physical processes: the water diffusion in the materials, the deformation of the materials, and the fracture. This consideration derives the assumption that the typical length scale of the desiccation crack pattern is determined from the coupling among multi-physics.

Based on this assumption, the desiccation cracking is modeled as the coupling of diffusion, deformation, and fracture. The analytical formulation of this coupled model is proposed by introducing the initial boundary value problem for diffusion and the boundary value problem for deformation. Also, the discretized formulation is proposed by introducing PDS-FEM (Particle Discretization Scheme Finite Element Method). The numerical analysis is performed by weak coupling of FEM analysis for diffusion and PDS-FEM analysis for deformation and fracture. According to this numerical analysis, the crack pattern and its formation process are reproduced without introducing any artificial length scale.

In addition, the drying test of calcium carbonate slurry is performed. The validity of the proposed model and numerical analysis method is verified through the comparison of the numerical analysis results and the experimental results in terms of the cell size, the net-like structure of the crack, and the crack pattern formation process.

The supplemental numerical analysis under simplified problem setting with emphasis on the coupling between desiccation and deformation provides us with some insights on the physical causes for the dependence of the stress intensity on the size of the domain. Also, the water distribution in the pattern formation process gained from the numerical analysis indicates that the hoop stress on each cell resulting from the evaporation from the crack surfaces plays a significant role in the determination of the crack path.

According to the numerical analysis and the supplemental analysis, it can be safely concluded that the coupling of the equations without length scale can determine the typical length scale with typical geometry emerging out of the completely homogeneous field. This is the major part of the physics behind the pattern formation in desiccation cracking.

目次

第 1 章 序論	1
1.1 背景	1
1.2 目的	5
1.3 本論文の構成	6
第 2 章 乾燥破壊現象の数理モデル	7
2.1 問題設定	7
2.2 解析的な定式化	9
2.3 離散的な定式化	13
2.3.1 粒子離散化手法の導入	13
2.3.2 PDS-FEM による変形過程と破壊過程の離散的な定式化	16
2.3.3 PDS-FEM における亀裂モデルを用いた拡散過程の離散的な定式化	19
2.3.4 乾燥破壊現象の離散モデルにおける亀裂面の数理解釈	23
第 3 章 数値解析手法	25
第 4 章 平行亀裂パターンの再現	28
4.1 解析条件	28
4.2 解析結果	31
第 5 章 網目状亀裂パターンの再現	38
5.1 乾燥破壊実験	38
5.1.1 実験方法	38
5.1.2 実験結果	40
5.2 数値解析	49
5.2.1 解析条件	49
5.2.2 解析結果	53
第 6 章 考察	64
6.1 層厚が応力場とセルサイズに与える影響	64

6.2 亀裂面からの蒸発が応力場とセルサイズに与える影響	72
第 7 章 結論	75
付録	77
A.1 拡散に関する初期値境界値問題の離散形式の導出	77
A.2 PDS-FEM における破壊パターン	79
A.3 破壊面にかかる直応力の計算	82
A.3.1 任意の面にかかる応力	82
A.3.2 パターン 1	82
A.3.3 パターン 2	84
参考文献	85
謝辞	93

表 目 次

4.1	平行亀裂パターンの数値解析におけるパラメータ	30
5.1	乾燥破壊実験における層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数	48
5.2	網目状亀裂パターンの数値解析におけるパラメータ	51
5.3	各有限要素モデルのメッシュサイズおよび正規化した空間分解能	52
5.4	網目状亀裂パターンの数値解析における層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数	61
6.1	各解析モデルの厚さと横断面サイズ	65

目 次

2.1	乾燥破壊過程の数理問題の設定.	8
2.2	乾燥破壊現象に対する解析的な連成モデルの構造.	12
2.3	場の変数の空間的な離散化に用いられる共役な図形分割の組 (二次元の場合). . .	14
2.4	PDS-FEM における亀裂面 $\hat{\Gamma}$ の例.	16
2.5	変形物体における変形と破壊の問題に対する PDS-FEM の亀裂モデル.	19
2.6	部分的に破壊した透水性物体内の拡散の問題に対する亀裂モデル.	20
2.7	離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に対し e'_3 が直交する正規直交座標系.	21
2.8	乾燥破壊現象に対する離散モデルの構造.	23
3.1	解析手法の切り分け.	25
3.2	解析のフローチャート.	27
4.1	平行亀裂パターンの数値解析における解析モデルと境界条件.	30
4.2	平行亀裂パターンの数値解析における平均体積含水率の変化.	33
4.3	平行亀裂パターンの数値解析において最終的に形成された亀裂の三次元的な様子. . .	34
4.4	平行亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン.	34
4.5	平行亀裂パターンの数値解析における解析モデル上面での亀裂進展の様子.	35
4.6	平行亀裂パターンの数値解析において上面に亀裂が発生する以前に観察される亀裂群.	35
4.7	平行亀裂パターンの数値解析において, 最終的な亀裂パターンに至った時点での, 解析モデルの水平面における相当応力コンター図.	36
4.8	平行亀裂パターンの数値解析において, 最終的な亀裂パターンに至った時点での, 解析モデルの水平面における体積含水率分布.	37
5.1	炭酸カルシウム懸濁液の乾燥破壊実験の試験体.	39
5.2	乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 5 mm の場合.	42
5.3	乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 10 mm の場合.	43

5.4	乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン。 厚さ 20 mm の場合.	44
5.5	乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン。 厚さ 30 mm の場合.	45
5.6	層厚 30 mm (a) の試験体における最終的な亀裂パターンの上面と底面からの様子.	46
5.7	各試験体で計測されたセル面積の平均値と層厚ごとのセル面積の平均値.	46
5.8	乾燥破壊実験における亀裂進展過程の様子. 層厚 10 mm (a) の試験体の場合. . .	47
5.9	平均体積含水率 θ_{avg} の変化. 層厚 10 mm (a) の試験体の場合.	48
5.10	網目状亀裂パターンの数値解析における解析モデルと境界条件.	51
5.11	網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂 パターン. 厚さ 5 mm の場合.	56
5.12	網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂 パターン. 厚さ 10 mm の場合.	57
5.13	網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂 パターン. 厚さ 20 mm の場合.	58
5.14	網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂 パターン. 厚さ 30 mm の場合.	59
5.15	層厚 5 mm の解析モデル (model 5-2) における三次元的な亀裂の様子.	60
5.16	モデルごとのセルの平均面積と正規化されたメッシュ空間分解能の関係.	60
5.17	層厚ごとのセルの平均面積に関する実験結果と数値解析結果の比較.	61
5.18	網目状亀裂パターンの数値解析における解析モデル上面での亀裂進展の様子. 層厚 10 mm (model 10-3) の場合.	62
5.19	網目状亀裂パターンの数値解析における平均体積含水率の変化. 層厚 10 mm の場合.	63
6.1	単純化した問題設定下での数値解析における解析領域と境界条件.	66
6.2	典型的な体積含水率の分布と対応した xz -平面内での直応力成分 σ_{xx} の分布. $L =$ 100 mm, $T = 10$ mm のモデルにおける $y = 0$ 平面.	67
6.3	「たわみに対して逆に作用する曲げ」と「底面の引き伸ばし」を受けているディー プビーム.	68
6.4	$L = 100$ mm で厚さが異なるモデルにおける体積含水率と応力度の関係.	69
6.5	単純化された問題設定における鉛直方向の水分分布形状の模式図.	69
6.6	$T = 5$ mm で L が異なるモデルにおける, 体積含水率に対する応力度の変化. . .	70
6.7	$T = 10$ mm で L が異なるモデルにおける, 体積含水率に対する応力度の変化. . .	70
6.8	$T = 10$ mm で L が異なるモデルにおける応力分布 (図- 6.1 における $y = 0$ 平面). .	71
6.9	図- 5.18 の各時点での亀裂パターンに対応した試験体上面での体積含水率 θ の分布.	74
A.1	Voronoi ブロック境界面.	79

A.2	Delaunay 四面体の破壊パターン.	81
A.3	Voronoi ブロックの境界の頂点.	83
A.4	直応力の計算用の単位法線ベクトル.	83

第1章 序論

1.1 背景

乾燥破壊現象は、乾燥に伴う材料の不均一な体積収縮によって応力が発生し、亀裂が形成される現象である。乾燥亀裂は、乾燥した地面や砂漠、干潟など様々な場所や材料で容易に観察され、多くの場合、網目状構造をもつ亀裂群が材料表面を特徴的な長さスケールをもった多角形セルに分割する。乾燥亀裂の形成過程において、新たな亀裂はすでに存在するセルを分割するように順次発生・進展していき、与えられた実験条件に対応したサイズまでセルサイズが小さくなったところで亀裂によるセルの分割は終了する。この段階的かつ階層的なセルの分割過程により、亀裂同士は格子状ではなく互い違いに交差し¹⁾、多角形セルの一辺は複数のセルによって構成されることになる（階層的なセルの分割過程に関しては、Bohn (2005a, 2005b)^{2,3)}に詳細な記述がある）。乾燥破壊現象において、亀裂のサイズ・形状・網目状構造のトポロジーは材料や条件によって大きく異なる。しかし、いずれの場合においても、「階層的に形成される網目状の亀裂パターン構造が、特徴的な長さスケールをもった多角形セルを自発的に形成する」という基本的性質は保たれている。このことは、乾燥破壊現象の背後に、材料の構成則には依存しない共通の支配法則が存在することを予想させる。

乾燥破壊現象に関する初期の研究は、実験条件に応じた多様な乾燥亀裂パターンとその統計的振る舞いを明らかにするための実験的研究が主体となっていた。Kindle (1917)⁴⁾の実験を初めとした多くの実験結果⁵⁻¹⁰⁾は、乾燥亀裂によって形成される多角形セルの形状が実験条件 (e.g., 系のサイズ, 材料定数, 拘束条件, 乾燥速度) に対し一定の規則を伴って変化することを示している（これらの研究のうち、特に詳細なデータを示しているものはCorte and Higashi (1960)¹¹⁾のレポートである）。

例えば、セルの平均的面積は試料の層厚の増加に伴って増加し、亀裂の交差角は 90° に代わって 120° が支配的となる。層が系のサイズに比べて十分に厚くなるとセルサイズが系の平面方向のサイズと同等になり、セルは形成されなくなる^{2,12-15)}。この層厚とセルサイズに関する詳細な議論は、これまで

にも多くの研究において行われており^{11,12,16-18)} コーヒー粉や粘土などを用いたいくつかの実験では、セルの長さスケールは層厚に比例すると結論づけられている^{12,19)}。一方で、他の実験結果ではこのようなセルの長さスケールと層厚の比例関係は示されていない^{11,16)}。したがって、これらの議論から得られる妥当な結論は、「層厚の増加に対するセルサイズの増加傾向」という定性的傾向のみである。

また、粘土を用いた乾燥実験では、境界面の拘束条件や試料形状を変化させることによって、二次元的な網目状亀裂パターンだけでなく一次元的な平行亀裂パターンも作り出せることを示している^{15,16,20)}。さらに、容器内側にワセリン等を塗り、試料と容器間の摩擦を低減することで、セルサイズが増加することや¹²⁾、底面基盤の材質により亀裂パターンが変化することも観察されている¹¹⁾。以上のような境界条件による亀裂パターンの変化のみならず、スターチを用いた実験で形成される規則的な六角セルや²¹⁻²⁶⁾、粘土に含まれる塩分量の増加による亀裂数の減少²⁷⁾、締め固めた土における亀裂パターン^{28,29)}など、材料による亀裂パターンの違いに着目した実験も多い。また、層厚や蒸発速度による乾燥亀裂形状 (e.g., 亀裂開口幅, 亀裂深さ) の変化も検証されている^{30,31)}。このように、乾燥破壊現象に関する実験的研究は、乾燥過程における試料内部の物理量変化のミクロスケールでの測定の困難さを踏まえて、系のサイズおよび境界条件と亀裂の幾何形状との間の関係や、試料からの水分蒸発量と亀裂本数との関係などについての実験事実の収集と、これに基づく現象論的な物理モデルの構築を目的としていた。

この方針に基づく研究は、近年に至るまで様々な材料や試料形状、境界条件について網羅的に行われており、詳細な亀裂形状のデータを取得するための実験的手法も提案されている^{32,33)}。しかしながら、得られた様々な実験結果を統一的に説明できるような物理モデルは、未だ見出されていない。この原因の一つには、測定できる物理量が、系のサイズ、境界条件、試料全体での含水量変化など、マクロスケールで平均化された値のみであることがあげられる。亀裂の進展方向、枝分かれ、交差角などは、亀裂先端近傍のミクロスケールでの物理場によって決定されることを考えると、マクロスケールでの物理量の平均値とマクロスケールでの亀裂の特徴量との関係に基づく現象論的物理モデルを用いて乾燥破壊現象を説明することは難しいと結論付けざるを得ない。このことから、乾燥破壊現象に関する詳細な定量的議論には、理論および数値解析に基づくミクロスケールの物理現象の検証が必要であるといえる。

実験的研究の限界と数値解析技術の発達に伴い、近年では理論的および数値解析的アプローチによる研究が主流となっている。これらの研究は、実験から得られる亀裂パターンの再現を目的とし、乾燥破壊現象のモデル化と適切な数値解析手法の提案を試みている³⁴⁻³⁹⁾。そのうち、代表的なものとして、2枚の剛体板を破壊の閾値がそれぞれ異なる平行なファイバーによって接続した fibre bundle model⁴⁰⁾、閾値以上の電流が流れると切断される二次元の電氣的要素によって構成された random fuse model^{41,42)}、粒

子とそれらを接続するばねによって構成されるばねネットワークモデル (SNM: Spring Network Model) 43-53), フェーズフィールドモデル 54), DEM (Discrete Element Method) や有限要素法に基づくモデル 55-58) などがあげられる.

乾燥亀裂のパターン形成において, 乾燥による水分移動の結果生じる不均一な水分分布が重要な役割を担うことは直観的に理解できる. しかし, これまでに提案されたモデルの多くはこの直観に反して, 一様な水分分布を前提としており, 不均一な材料特性が乾燥亀裂の特徴的なパターンを形成する要因であるとの仮定に基づいていた.

例えば, 最もシンプルなモデルである二次元ばねネットワークモデル 50) では, 領域内の水分分布は一様と仮定され, 水分の蒸発に伴う体積収縮は, ばねの自然長を短くすることによって表現される. このモデルでは, 二次元の三角形格子状に均等配置したばねネットワークにより粘土の薄層試験体を模しているが, 完全に均質なばねネットワークモデル (i.e., 均質媒質の均一収縮モデル) では特徴的な亀裂パターンは一切出現しない. したがって, 特徴的なパターンの自発的形成の核としていくつかの不均一性をモデル内に組み込む必要がある. このモデルでは, 破壊は内力が閾値を超えたばねの切断により表現され, この閾値にばらつきを与えることで材料強度の局所的欠陥を表現している. さらに, ばねの性質, ばねの結節点の摩擦, ばねの配置, にそれぞればらつきを与えることで, 弾性, 変形場, 境界条件のばらつきがモデル内に導入されている. このモデルは, パラメータの適切なチューニングによって, 網目状の亀裂構造を作り出すことは出来るが, セルのサイズや形状は, 実際に観察される乾燥亀裂パターンとは大きく異なる. つまり, このモデルは, 乾燥破壊現象を念頭に置いてはいるが, 乾燥破壊とは全く異なるセルラーオートマトンと位置づけられる.

DEMに基づくモデル 58) では, 水分の蒸発の影響を粒子の体積収縮, 粒子間のばね定数, 粒子間のばね強度に反映させることにより, ばねネットワークモデルを粘土の乾燥亀裂パターン形成の問題に近づける試みがなされている. このモデルでも上記の二次元ばねネットワークモデルと同様, 領域内の一様な水分分布を仮定している. また, 材料特性の不均一性は, 粒子径のばらつきによってモデル内に導入されている. 破壊に寄与する粒子間相対変位は粒子サイズに依存しないことが求められるにも関わらず, 粒子径の変化率が含水率の関数として与えられるため, 粒子間変位は粒子径に比例する. つまり, 粒子間のつながりは, 径の大きな粒子同士の方が径の小さな粒子同士に比べて, 相対的に弱くなる. これは, 粒子間のばね強度にばらつきを導入していることに他ならない. このモデルでは, 網目状の亀裂パターンや, 層厚や拘束条件に応じたセルサイズの変化など, 定性的な傾向の再現には成功しているが, セルの階層的な分割過程や乾燥の進行に伴う亀裂数の増加などの傾向は捉えられていない.

均一な材料定数を持つ四面体ソリッド要素とその要素境界に破壊を許すジョイント要素を埋め込んだ有限要素モデル⁵⁷⁾では、水分の蒸発の影響を四面体ソリッド要素の体積収縮として与えて、乾燥破壊の解析を行っている。この解析では、乾燥亀裂パターンの形状、セルサイズ、およびこれらの層厚依存性などを比較的良好に再現できるケースもあるが、実験で観測される亀裂パターンから大きく外れる場合もある。また、セルの階層的な分割過程も再現できていない。良好に再現できる例は、ほぼ二次元問題と見なすことの出来る薄層試験体に限定されている。この主な原因は、一様な乾燥収縮を仮定している点にあるといえる。

このように、乾燥に伴う水分移動による不均一な水分分布を無視した数値解析的アプローチの研究は、恣意的な粒子間相互作用や複雑な材料構成則を導入することによって、亀裂パターンそのものの複雑さや、亀裂パターンと境界条件との関係の複雑さを説明しようとする試みであると位置づけられる。これらの研究で提案されたモデルでは、特徴的な亀裂パターンを形成するための「核」として、人為的なばらつきをもつパラメータ (i.e., 材料特性) を導入する必要がある。これは、モデル内に人為的な長さスケールを導入していることに他ならず、再現されるセルサイズやセル形状は、人為的に導入された不均一性に強く依存する。したがって、これらのモデルでは意図する亀裂パターンを得るため、恣意的なパラメータチューニングを要する。加えて、このような一様な水分分布・乾燥収縮の仮定に基づくモデルでは、乾燥破壊現象に特徴的な「段階的かつ階層的なセルの分割過程」や、二次元問題とみなすことが出来ない「厚層試験体における亀裂パターン」を再現することはできない。厚層試験体の亀裂パターンやセルの分割過程を再現するためには、時間とともに変化する非一様な水分分布と亀裂が場に及ぼす影響を適切にモデルに取り入れることが求められる。

非一様な水分分布と亀裂の影響をモデルに取り入れる試みは、例えば、Peron et al. (2008)⁵⁹⁾による一次元的な平行亀裂パターンの再現を目的とした数値解析にみられる。このモデルでは、水分移動に伴う体積収縮と変位場の問題とを連成させた FEM 解析を行っている。この連成解析から得られる応力分布は、粒子径収縮の分布として DEM 解析に挿入されている。つまり、水分移動に伴う変形の結果生じる破壊は、DEM によって取り扱われている。この数値解析は、乾燥亀裂が試料表面から底面へ進展する様子を再現しているが、亀裂パターンの再現には至っていない。また、Musielak and Śliwa (2012)⁶⁰⁾も水分分布の変化は考慮しているが、変形と破壊に関しては簡易的なばねネットワークモデルを用いており、固体連続体の変形・破壊を表現できていない。そのため、この解析においても亀裂パターンの再現には至っていない。両者の失敗の原因は、解析モデルが拡散・応力連成解析と破壊解析との擬似的な連成解析モデルにとどまっていたことにあると考えられる。

以上のように、従来研究では乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の問題に対し、実験・理論・数値解析による様々なアプローチが行われてきたが、そのいずれにおいても乾燥破壊現象の具体的メカニズムを説明できていない。1世紀以上におよぶ知見があるにも関わらず、乾燥破壊現象において乾燥亀裂群が形成する特徴的なパターンがいかんして決まるのかという問題は、未だ解明されていないのである。従来の、物理的根拠のない現象論的モデルや複雑な材料構成則の導入、恣意的なパラメータチューニングといった研究手法は、意図する結果を作り出しているに過ぎず、この問題の本質的な解決策にはなり得ていない。一方で、乾燥破壊現象には「特徴的な長さスケールをもつ多角形セルの自発的形成」という材料や条件によらない共通の特徴が存在することに着目すれば、乾燥亀裂によるパターン形成の問題は恣意的な材料構成則やパラメータチューニングに依存しない、ファンダメンタルな物理の支配法則で説明できるはずであると考えることができる。

1.2 目的

本論文では、乾燥破壊現象を「材料内の水分拡散」、「材料の変形」、「材料の破壊」という3つのファンダメンタルな物理現象に切り分けて考える。これらの物理現象のパラメータに関する次元解析と、実験から得た定性的傾向を照らし合わせると、各物理現象を構成するパラメータが変化することで亀裂パターンの長さスケール (i.e., 多角形セルのセルサイズ) も変化することが分かる。このことから、拡散係数、ヤング率、引張強度、水分収縮係数等のパラメータの比率が長さスケールを決定していると考えることができる。この考察に従い、「乾燥亀裂パターンの特徴的な長さスケールは、複数の物理現象の連成によって決定される」という仮説を立てた。

この仮説を元に、乾燥破壊現象を、水分拡散・変形・破壊という3つの物理現象から成り立つマルチフィジックスの問題として捉え、乾燥破壊現象に対する拡散・変形・破壊の連成モデルを連続体力学の枠組みで提案する。また、提案した連成モデルに基づいた数値解析を行うことによって、水-粉体混合物の乾燥過程で生じる特徴的な長さスケールをもつ亀裂パターンが、恣意的な長さスケール (i.e., 材料の力学的性質、初期水分分布、境界条件、解析領域の幾何形状のばらつき) の導入なしに均質な初期状態から創発される過程を再現する。この数値解析のため、材料の弾性変形と破壊による変位場の不連続性を簡便に取り扱える粒子離散化有限要素法 (PDS-FEM: Particle Discretization Scheme Finite Element Method) ⁶¹⁻⁶⁵⁾ の適用範囲を、乾燥収縮という非弾性変形を伴う場における破壊現象へと拡張する。また、PDS-FEM と有限要素法を用いた強連成解析と弱連成解析の使い分けという新たな手法を提案する

ことで、拡散と破壊という時定数が大きく異なる現象の連成を可能にする。さらに、炭酸カルシウムを用いた乾燥破壊実験を行い、実験と数値解析で得られた亀裂パターンの形状および亀裂パターンの形成過程に関して比較することで、提案した仮説とそれに基づく連成モデルの妥当性の検証を行う。

亀裂パターン構造は階層的かつ不可逆的に形成され、パターン構造の時間発展に伴い場が変化する。この複雑な場において、複数の物理現象の相互作用がパターンの決定に対して果たす役割を直観的に把握することは難しい。これを踏まえ、本研究では数値解析によって複数物理間の相互作用の具体的な姿を明らかにし、乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の支配法則を導く。

1.3 本論文の構成

本論文は7章から構成される。第1章では、本論文の研究背景と目的について述べた。第2章では、乾燥破壊現象の数値モデルを提案し、解析的な定式化および離散的な定式化を示す。第3章では、第2章で提案する連成モデルの構造に基づく数値解析手法について述べる。第4章では、一次元的な平行亀裂パターンとその形成過程に関する数値解析結果を示す。第5章では、二次元的な網目状亀裂パターンとその形成過程に関する数値解析結果を示す。また、解析結果と炭酸カルシウム懸濁液を用いた乾燥破壊実験の結果を定量的に比較することで、数値解析結果の妥当性の検証を行う。第6章では、拡散と変形の連成にのみ着目した数値解析を行うとともに、第5章の数値解析結果を分析することで、亀裂パターン形成のメカニズムに関する考察を行う。第7章では、本論文の結論を述べる。

第2章 乾燥破壊現象の数理モデル

乾燥破壊現象は、水分の蒸発に伴う材料の不均一な収縮によって蓄積されたひずみエネルギーが、破壊によって解放される現象である。この破壊によるひずみエネルギーの解放は段階的に行われ、亀裂パターンの時空間的階層構造を生み出す。乾燥破壊現象の取り扱いを難しくする最大の要因は、この階層的かつ不可逆的に形成されるパターン構造が場の連続性を変化させ系全体に影響を及ぼすことにある。これを踏まえ、本章では乾燥破壊現象に対し、パターン構造の形成に伴い変化する場を適切に捉えられるような数理モデルを提案する。

2.1 問題設定

図- 2.1 (a) は、透水性をもつ変形物体の乾燥破壊過程について、一般性を最大限確保した問題設定（外形、境界、材料特性、場の変数）を表す。この問題は、拡散・変形・破壊の連成問題であり、i) 亀裂を含む媒体内の水分拡散に関する初期値境界値問題（図- 2.1 (b)）、ii) 水分拡散による、亀裂を含む媒体の変形に関する境界値問題（図- 2.1 (c)）、の連成問題として定式化することができる。ここで、図- 2.1 (b) は、亀裂を含む媒体内の水分拡散に関する初期値境界値問題に対する問題設定を表したものであり、図- 2.1 (a) のうち関係する材料特性と場の変数を示している。同様に、図- 2.1 (c) は、水分拡散による、亀裂を含む媒体の変形に関する境界値問題に対する問題設定を表したものである。

なお、本論文中における太斜体記号はベクトル量、またはテンソル量を表し、下つき添字で表記される記号はそれぞれの成分を表す。式 (2.6) 以降、成分表記の式においては総和規約を用いる。

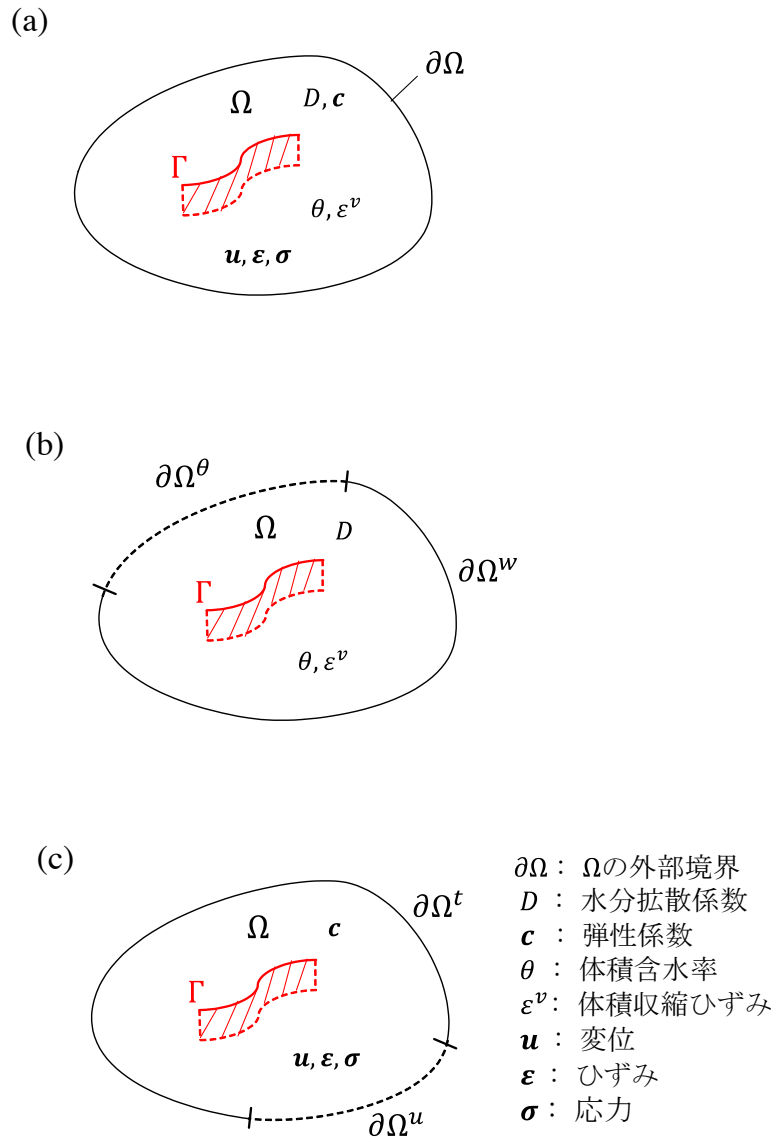


図-2.1 乾燥破壊過程の数理問題の設定.

- (a) 透水性をもつ変形物体が、乾燥破壊の過程にある際の問題設定、
 (b) 亀裂を含む媒体内の水分拡散に関する初期値境界値問題の設定、
 (c) 水分拡散による、亀裂を含む媒体の変形に関する境界値問題の設定。

2.2 解析的な定式化

等温条件下の不飽和土中における非定常流れの水分量は Richards 式⁶⁶⁾によって表現される。水分量表記の Richards 式は,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\theta) \nabla \theta) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (2.1)$$

のように 2 階の非線形偏微分方程式で表される。ここで θ は体積含水率 (水の体積が全体積に占める割合), t は時間, $K(\theta)$ は不飽和透水係数, $D(\theta)$ は水分拡散係数を表す。 z 軸を鉛直下向きの座標軸とすると, 右辺第 2 項は蒸発に伴う鉛直上方向の水分移動を阻害する重力成分となる。また, 水分拡散係数および不飽和透水係数は, 体積含水率の増加関数となる。ここで, 試験体が比較的薄く, 乾燥過程において鉛直方向に極端な水分分布の傾きが生じない場合, 水分拡散係数が体積含水率によらず一定としても現象を再現するには十分と考えられる。さらに, このような試験体では式 (2.1) の右辺第 2 項の重力成分の影響は小さい。加えて, 全体の体積含水率の減少に伴い右辺第 1 項の圧力成分が支配的となることから, 本研究のモデルでは重力成分を無視する。この結果, Richards 式は Fick の拡散方程式と同形の式に簡略化される。

以上を踏まえ, 水 - 粉体混合物を等方的な透水性をもつ均質体 $\Omega (\in \mathbb{R}^3)$ としてモデル化し, 乾燥に伴う水 - 粉体混合物内の水分移動を Ω 内の体積含水率 θ の拡散過程によって記述する。体積含水率 θ は, 位置 \mathbf{x} と時間 t の関数である。この拡散過程は体積含水率 $\theta(\mathbf{x}, t)$ に対する Fick の拡散方程式

$$\dot{\theta} = D \nabla^2 \theta \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial \Omega \quad (2.2)$$

によって表すことができる。ここで, $\dot{\theta}$ は時間 t による θ の偏微分, D は水分拡散係数, $\partial \Omega$ は Ω の外部境界である。

図- 2.1 (b) に示すように, 領域 Ω の外部境界 $\partial \Omega$ は, Neumann 境界 $\partial \Omega^w$ と Dirichlet 境界 $\partial \Omega^\theta$ によって構成されている。 $\partial \Omega^w$ 上には蒸発による水分フラックスが, $\partial \Omega^\theta$ 上には体積含水率がそれぞれ与えられている。完備性 $\partial \Omega = \partial \Omega^w \cup \partial \Omega^\theta$ と排他性 $\partial \Omega^w \cap \partial \Omega^\theta = \emptyset$ が満足される限りにおいて, $\partial \Omega^w$ は単連結である必要はない ($\partial \Omega^\theta$ についても同様である)。また, 亀裂面 Γ 上で水分場は不連続となり,

亀裂面 Γ は蒸発による水分フラックスが与えられる内部 Neumann 境界として扱われる。初期体積含水率分布 $\theta_0(\mathbf{x})$ を与えることで、図- 2.1 (b) に示した拡散に関する初期値境界値問題は、

$$\begin{cases} \dot{\theta} = D\nabla^2\theta & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\begin{cases} \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \end{cases} \quad (2.3b)$$

$$\begin{cases} \theta(\mathbf{x}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^\theta \end{cases} \quad (2.3c)$$

$$\begin{cases} D \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{w}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^w \end{cases} \quad (2.3d)$$

$$\begin{cases} D \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{v}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (2.3e)$$

と定式化できる。ここで、 $\bar{\theta}(\mathbf{x}, t)$ は $\partial\Omega^\theta$ 上での体積含水率、 \mathbf{n} は蒸発面に対する単位法線ベクトル、 $\bar{w}(\mathbf{x}, t)$ は $\partial\Omega^w$ における蒸発速度、 $\bar{v}(\mathbf{x}, t)$ は亀裂面 Γ における蒸発速度である。この初期値境界値問題を解くことによって、領域 Ω 内における水分分布の時間発展を得ることができる。

乾燥に伴う体積含水率 θ の減少に応じた体積収縮ひずみ $\varepsilon^v(\mathbf{x}, t)$ は

$$\varepsilon^v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho_w}{\rho_d} \{\theta(\mathbf{x}, t) - \theta(\mathbf{x}, 0)\} \quad (2.4)$$

と与えられる。ここで、 ρ_w は水の質量密度、 ρ_d は粉体の乾燥密度（粉体の質量を全体積で除した値）、 λ は粉体の水分収縮係数である。この乾燥による体積収縮ひずみ ε^v は、応力 - ひずみ関係におけるオフセットとして変形に関する境界値問題に組み込まれる。

等方均質線形弾性体 Ω が、初期値境界値問題 (2.3) によって記述される拡散（乾燥）過程にあると仮定する。乾燥による体積収縮ひずみ $\varepsilon^v(\mathbf{x}, t)$ に対応した変形場は、次の方程式の組（力のつりあい式、乾燥収縮を含む構成式、変位 - ひずみ関係）によって支配される。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5b)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5c)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 \mathbf{c} は弾性テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は全ひずみテンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ は乾燥収縮ひずみテンソル、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 $(*)^T$ は行列の転置を表す。 Ω が等方均質線形弾性体であるとの仮定から、乾燥収縮

ひずみテンソル ε^s の成分は乾燥による体積収縮ひずみ ε^v から,

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{3}\varepsilon^v\delta_{ij} \quad (2.6)$$

と計算することができる. ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタである. 式 (2.5b) において, 乾燥収縮ひずみ ε_{ij}^s は体積減少に伴う非弾性ひずみであるため, 弾性ひずみ ε_{ij}^e は全ひずみ ε_{ij} から乾燥収縮ひずみ ε_{ij}^s を除くことで得られる. つまり, 拡散場と変形場は, 体積含水率 θ に対応した乾燥収縮ひずみ ε_{ij}^s を介して連成される.

図- 2.1 (c) に示すように, 領域 Ω の外部境界 $\partial\Omega$ は, Neumann 境界 $\partial\Omega^t$ と Dirichlet 境界 $\partial\Omega^u$ によって構成されている. $\partial\Omega^t$ 上にはトラクションベクトルが, $\partial\Omega^u$ 上には変位ベクトルがそれぞれ与えられている. 完備性 $\partial\Omega = \partial\Omega^t \cup \partial\Omega^u$ と排他性 $\partial\Omega^t \cap \partial\Omega^u = \emptyset$ が満足される限りにおいて, $\partial\Omega^t$ は単連結である必要はない ($\partial\Omega^u$ についても同様である). また, 亀裂面 Γ 上で変位場は不連続となり, 亀裂面 Γ は領域内部の traction-free な面となる. つまり, 亀裂面 Γ は内部 Neumann 境界として扱われる. 図- 2.1 (c) に示した, 水分拡散に伴う変形に関する境界値問題は,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (2.7a) \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) & \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (2.7b) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T) & \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (2.7c) \\ \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{x} \text{ on } \partial\Omega^u \quad (2.7d) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} & \boldsymbol{x} \text{ on } \partial\Omega^t \quad (2.7e) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \text{ on } \Gamma \quad (2.7f) \end{array} \right.$$

と定式化できる. ここで, $\bar{\boldsymbol{u}}$ は $\partial\Omega^u$ 上での変位境界条件, \boldsymbol{n} は外部境界 $\partial\Omega^t$ と亀裂面 Γ の単位法線ベクトル, $\bar{\boldsymbol{t}}$ は $\partial\Omega^t$ に与えられたトラクションベクトルである. 亀裂面 Γ の形状は, 境界値問題 (2.7) を適切な破壊規準を用いて解くことで得られる.

乾燥破壊現象に対する連成問題の解を得るためには, 初期値境界値問題 (2.3) と境界値問題 (2.7) から成る方程式の組を, 適切な破壊規準を用いて同時に解く必要がある.

ここで, 拡散・変形・破壊の連成モデルの構造を図- 2.2 に示す. この構造から, 変形過程と破壊過程の間には直接的かつ双方向の作用が存在していることが分かる. 形成された亀裂面 Γ の形状は, 亀裂面

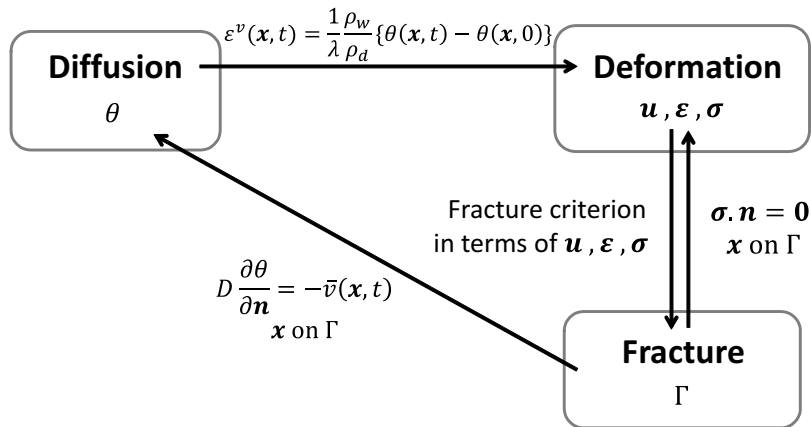


図-2.2 乾燥破壊現象に対する解析的な連成モデルの構造。

における traction-free な境界条件 (2.7f) を通じて、変形過程に関する場の変数 ($\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma$) に影響を与えている。反対に、亀裂面 Γ の形状は、適切な破壊規準を通じて場の変数 ($\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma$) から決定される。

各物理現象間に存在する他の関係性（拡散と変形の関係性、破壊と拡散の関係性）では、双方向の作用はなく一方向の作用のみが存在している。式 (2.4) に示すように、拡散過程は乾燥による体積収縮ひずみを通じて変形過程に影響を与える。しかし、変形過程が拡散過程に対して与える影響は考慮しない。これは、乾燥収縮の問題では、水分減少に起因する非弾性ひずみに対して不均一な体積収縮の結果生じる弾性ひずみが非常に小さいためである。また、亀裂面 Γ の形状の影響は、亀裂面からの蒸発を表す境界条件 (2.3e) によって、拡散過程に導入されるが、拡散過程から破壊への直接的な影響はない。

変形過程と破壊過程の間には相互作用による一貫した繋がりが存在するため、両者を別々に扱うことはできない。つまり、変形過程と破壊過程は強連成問題として扱う必要がある。一方で、拡散過程は他の過程との間に一方向の作用しか持たないため、変形/破壊過程との弱連成問題として、変形/破壊過程とは別に解くことが可能である。

2.3 離散的な定式化

変形過程と破壊過程は別々に扱うことができず，強連成問題として扱わなければならない．この強連成問題を数値解析で扱うには，変形と破壊の問題を一貫して解くことができる数値解析手法が必要となる．そこで，本研究では，変形と破壊の問題の数値解析手法として粒子離散化有限要素法（PDS-FEM: Particle Discretization Scheme Finite Element Method）⁶¹⁻⁶⁵）を用いる．PDS-FEMは，新たな自由度を加えることなく変形物体内に発生する亀裂面（i.e., 不連続な変位場）を扱うことができる手法である．

本章では，乾燥破壊現象に対する連成問題の離散的な定式化を，i) 粒子離散化手法の導入，ii) PDS-FEMによる変形過程と破壊過程の離散的な定式化，iii) PDS-FEMにおける亀裂モデルを用いた拡散過程の離散的な定式化，iv) 乾燥破壊現象の離散モデルにおける亀裂面の数理的解釈，によって述べる．

2.3.1 粒子離散化手法の導入

解析領域 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ を節点の組 $\{\mathbf{x}^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha \leq N\}$ によって離散化する場合を考える．このとき，離散領域 $\hat{\Omega}$ は共役な図形分割の組を用いて次の2通りの方法で表すことができる．

$$\hat{\Omega} = \sum_{\alpha=1}^N \Phi^\alpha \quad (2.8)$$

$$\hat{\Omega} = \sum_{\beta=1}^M \Psi^\beta. \quad (2.9)$$

ここで， $\{\Phi^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha \leq N\}$ と $\{\Psi^\beta | \beta \in \mathbb{N}, 1 \leq \beta \leq M\}$ はそれぞれ，節点の組 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ に対応した Voronoi ブロックの組と Delaunay 四面体の組を表す．二次元の場合における，Voronoi 分割と Delaunay 分割を図- 2.3 に示す．二次元の場合，Delaunay 分割は三角形となり，三次元の場合では四面体となる．この共役な図形分割の組は，場の変数の空間的な離散化に用いられる．ここで，解析領域 Ω の外部境界 $\partial\Omega$ に対応した離散外部境界を， $\partial\hat{\Omega}$ とおく．

場の変数の離散化における基底として，Voronoi ブロックと Delaunay 四面体上でそれぞれ定義される以下の特性関数を導入する．

$$\phi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Phi^\alpha) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Phi^\alpha) \end{cases} \quad (2.10)$$

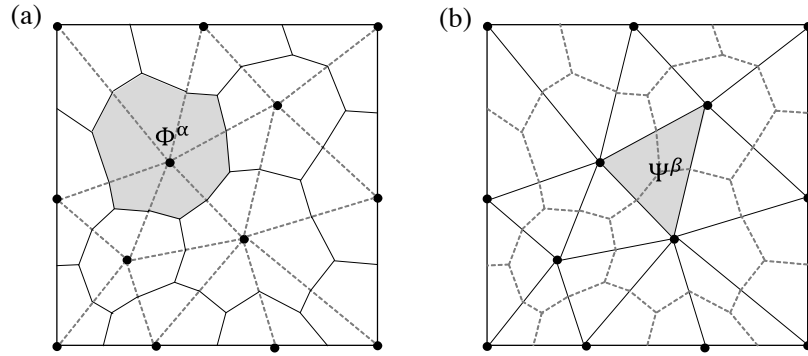


図-2.3 場の変数の空間的な離散化に用いられる共役な図形分割の組（二次元の場合）.

(a) Voronoi 分割 Φ^α , (b) Delaunay 分割 Ψ^β .

$$\psi^\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Psi^\beta) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Psi^\beta) \end{cases} \quad (2.11)$$

これらの基底を用いて，変位場とひずみ場および応力場は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \boldsymbol{\sigma}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

と離散化される．また，弾性係数 \mathbf{c} が位置 \mathbf{x} の関数である場合には，

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \mathbf{c}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

と離散化される．

式 (2.12) における \mathbf{u}^α は Voronoi ブロックの母点 (有限要素法でいうところの節点) に位置する節点 \mathbf{x}^α の節点変位であるため, 離散化された変位場は「剛体粒子の並進運動の場」とみなすことができる. これが, この離散化手法が「粒子離散化手法 (PDS: particle discretization scheme)」と呼ばれる所以である. PDS において, 変位の空間微分に関する物理量 (i.e., ひずみと応力) は, Delaunay 四面体上で平均化され, 例えばひずみ場は

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\beta = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}^{\beta\alpha} \mathbf{u}^\alpha + (\mathbf{B}^{\beta\alpha} \mathbf{u}^\alpha)^T \right) \quad (2.16)$$

と与えられる. ここで, $\mathbf{B}^{\beta\alpha}$ は $\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ に対する単位法線ベクトル \mathbf{n}^α を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\beta\alpha} &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\Psi^\beta} \nabla \phi^\alpha \psi^\beta dV \\ &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\partial\Psi^\beta} \mathbf{n}^\alpha dS \\ &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta} \mathbf{n}^\alpha dS \end{aligned} \quad (2.17)$$

と表される. 式 (2.17) 中において, ガウスの発散定理と Voronoi ブロックの剛体変位の性質から, $\nabla \phi^\alpha$ の Ψ^β 上での体積分を, 単位法線ベクトル \mathbf{n}^α の $\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ での面積分に置き換えている.

式 (2.17) は, 剛体粒子の並進運動に対する変位-ひずみ関係の定義とみなすことができ, 式 (2.17) 中の $\mathbf{B}^{\beta\alpha}$ は, 四面体一次要素を用いた通常の有限要素法における微小ひずみ場での B マトリクス (変位-ひずみマトリクス) の成分と一致する. 通常の有限要素法における基底関数とは全く異なり, 互いに重なり合わない不連続な基底関数を用いているにも関わらず, B マトリクスと B マトリクスから構成される剛性マトリクスの成分が通常の有限要素法と一致することが, この粒子離散化手法の最大の特徴である. つまり, PDS は変形物体に関する場の変数に対し粒子ベースの表現を与えつつ, 変形物体に対する境界値問題を, 通常の有限要素法と同じ連立方程式に帰着させることを可能にする手法である.

ここで, $\mathbf{B}^{\beta\alpha}$ は, Delaunay 四面体 Ψ^β 内において, Voronoi ブロック Φ^α の並進運動による変位ギャップの寄与を足し合わせることで構成されている. つまり, 式 (2.17) は, Delaunay 四面体内における変位ギャップの寄与という観点から, B マトリクスの成分を分割したものとみなすことができる. このような B マトリクスの成分の分解により, Voronoi ブロック間の相互作用の喪失を厳密に評価することが可

能になる. この Voronoi ブロック間の相互作用の喪失に対する厳密な評価は, Delaunay 四面体 (FEM における四面体要素) の部分的な破壊を表現する際に用いられる.

2.3.2 PDS-FEM による変形過程と破壊過程の離散的な定式化

PDS-FEM では, 亀裂面の形成可能領域は $\bigcup_{\alpha=1}^N \partial\Phi^\alpha$ に限定されている. したがって, 図-2.4 に示す離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ は, 区分 $\Gamma^{\beta\alpha} = \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ の組によって表すことができる. ここで, 離散化された亀裂面の区分 $\Gamma^{\beta\alpha} = \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ は, Delaunay 四面体 Ψ^β 中の Voronoi ブロック境界 $\partial\Phi^\alpha$ に位置する. この破壊された境界 $\Gamma^{\beta\alpha}$ に対応する $B^{\beta\alpha}$ の寄与を剛性マトリクスと外力から取り除くことで, 亀裂面 $\Gamma^{\beta\alpha}$ をまたぐ Voronoi ブロック間の相互作用の喪失を表現することができる.

変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ に対する境界値問題 (2.7) は, 以下の変分問題と等価である.

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \int_{\Omega} e(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \int_{\partial\Omega^t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dS \\ \text{Minimize } I(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ s.t. } \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ on } \partial\Omega^u. \end{aligned} \quad (2.18)$$

ここで, $e(\boldsymbol{\varepsilon})$ は弾性ひずみ $(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s)$ に対応したひずみエネルギー密度である. このひずみエネルギー密度は, 乾燥収縮が生じる場において

$$e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) : \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) \quad (2.19)$$

と定義される.

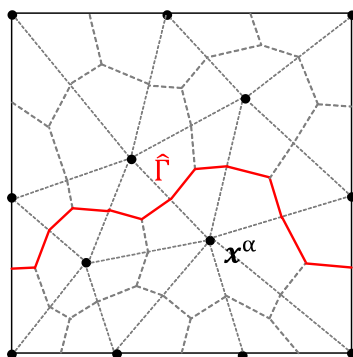


図-2.4 PDS-FEM における亀裂面 $\hat{\Gamma}$ の例.

式 (2.18) に粒子離散化 (PDS) を施すことで、離散化された汎関数 $\hat{\mathbf{I}}$ は、

$$\hat{\mathbf{I}} = \sum_{\beta=1}^M \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^\beta - \boldsymbol{\varepsilon}^{s\beta}) : \mathbf{c}^\beta : (\boldsymbol{\varepsilon}^\beta - \boldsymbol{\varepsilon}^{s\beta}) \Psi^\beta - \sum_{\beta=1}^M \int_{\partial\hat{\Omega}^t \cap \Psi^\beta} \phi^\alpha \bar{\mathbf{t}}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha dS \quad (2.20)$$

となる。ここで、 Ψ^β は β 番目の Delaunay 四面体の体積を表し、上付きの β が付く変数は β 番目の Delaunay 四面体における物理量を示している。また、 $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$ は節点に与えられたトラクションである。つまり、式 (2.20) に示すように、汎関数 $\hat{\mathbf{I}}$ は、平均ひずみエネルギー密度をそれぞれの Delaunay 四面体上で積分し解析領域全体で足し合わせることによって、数値的に評価される。

式 (2.20) 中の汎関数 $\hat{\mathbf{I}}$ は、変位-ひずみ関係式 (2.16) を用いることで、変位 \mathbf{u}^α の関数として表すことができる。汎関数 $\hat{\mathbf{I}}$ の変位 \mathbf{u}^α に関する停留条件は、

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{u}^\alpha)}{\partial \mathbf{u}^\alpha} = 0 \quad (2.21)$$

となり、最終的に以下の力のつり合い式を得る。

$$\sum_{\gamma=1}^N \mathbf{K}^{\alpha\gamma} \mathbf{u}^\gamma = \mathbf{F}^\alpha. \quad (2.22)$$

ここで、剛性マトリクス $\mathbf{K}^{\alpha\gamma}$ と外力ベクトル \mathbf{F}^α は、

$$\mathbf{K}_{ik}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M \mathbf{K}_e^\beta \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_e^\beta = \begin{cases} B_j^{\beta\alpha} c_{ijkl}^\beta B_l^{\beta\gamma} \Psi^\beta & \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial\Phi^\alpha \cup \partial\Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \notin \hat{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial\Phi^\alpha \cup \partial\Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F}^\alpha = \sum_{\beta=1}^M \mathbf{f}_e^\beta + \sum_{\beta=1}^M \int_{\partial\hat{\Omega}^t \cap \Psi^\beta} \phi^\alpha \bar{\mathbf{t}}^\alpha dS \quad (2.25)$$

$$\mathbf{f}_e^\beta = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{s\beta} : (\mathbf{c}^\beta \mathbf{B}^{\beta\alpha}) \Psi^\beta & \forall \alpha, \beta \text{ s.t. } (\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta) \notin \hat{\Gamma} \\ \mathbf{0} & \forall \alpha, \beta \text{ s.t. } (\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma} \end{cases} \quad (2.26)$$

から構成されるマトリクスとベクトルである。式 (2.23) と式 (2.24) において、マトリクスとベクトルの成分の明確な表現のため、添字表記と下付き文字に対する総和規約を用いた。

変形場に関する境界値問題 (2.7) の近似解は、 $\partial\Omega^u$ 上の節点 \mathbf{x}^α に与えられた変位境界条件 $\mathbf{u}^\alpha = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^\alpha)$ のもと、離散化された力のつり合い式 (2.22) を解くことによって得られる。力のつり合い式 (2.22) の右辺の外力ベクトル \mathbf{F}^α は、乾燥収縮ひずみ $\epsilon^{s\beta}$ により発生する力 (式 (2.25) における右辺第 1 項) と、外部 Neumann 境界に与えられた節点トラクション $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$ (式 (2.25) における右辺第 2 項) によって構成されている。さらに、式 (2.25) 右辺第 1 項の詳細である式 (2.26) を分析すると、ここには、空間微分を表す $\mathbf{B}^{\beta\alpha}$ と乾燥収縮ひずみ $\epsilon^{s\beta}$ の積が含まれていることが分かる。つまり、乾燥に伴う体積収縮の影響は、式 (2.26) における β 番目の要素の乾燥収縮ひずみ $\epsilon^{s\beta}$ の空間微分として、力のつり合い式 (2.22) に反映されている。

PDS の枠組みでは、Voronoi ブロック間の相互作用の喪失により、要素剛性マトリクスと外力ベクトルがゼロとなる条件が選択される。式 (2.24) における要素剛性マトリクスがゼロとなる条件 $((\partial\Phi^\alpha \cup \partial\Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma}$ は、要素剛性マトリクスの寄与を (α と γ に関して) 対称的に除くことで、亀裂面の影響が全体剛性マトリクス $\mathbf{K}^{\alpha\gamma}$ に導入されることを意味している。また、式 (2.26) における β 番目の要素の乾燥収縮による力ベクトルがゼロとなる条件 $(\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma}$ は、 β 番目の要素の乾燥収縮ひずみ $\epsilon^{s\beta}$ の寄与を α 番目の節点に働く節点力から除くことで、亀裂面の影響が外力ベクトル \mathbf{F}^α に導入されることを意味している。PDS-FEM において、このような要素剛性マトリクスと力ベクトルをゼロとする操作は、破壊された境界 $\Gamma^{\beta\alpha}$ に対応する $B^{\beta\alpha}$ を変化させることによって行うことができる。具体的には、式 (2.17) において、破壊された Voronoi ブロック境界 $\Gamma^{\beta\alpha} = \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ における面積分の値をゼロとする。この操作により、破壊された境界 $\Gamma^{\beta\alpha} = \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ における Voronoi ブロック間の変位ギャップが、部分的に破壊された Delaunay 四面体 Ψ^β におけるひずみエネルギー密度に対し寄与しなくなる。

また、これら一連の操作に物理的描像を与えると、剛性マトリクス $\mathbf{K}^{\alpha\gamma}$ は Voronoi 粒子群を繋ぐばね定数とみなすことができ、破壊に伴う Voronoi ブロック間の相互作用の喪失は Voronoi 粒子群を繋ぐばねの切断と捉えることができる。本研究では、破壊は、Voronoi ブロック境界 $\Gamma^{\beta\alpha} = \partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ にはたらくトラクション (直応力) が材料の引張強度を超えた際に起こるものとする。本研究の解析における具体的なトラクションの計算方法は、A.3 に示す。

以上が、PDS-FEM において、固体連続体における変形と破壊の問題の一貫した解析が可能となる理由である。

2.3.3 PDS-FEMにおける亀裂モデルを用いた拡散過程の離散的な定式化

透水性のある物体内の拡散過程に対して与えられる初期値境界値問題 (2.3) において, 解析領域 Ω を, 節点の組 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ と Delaunay 四面体の組 $\{\Psi^\beta\}$ によって空間的に離散化する. ここで, 節点の組 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ と Delaunay 四面体の組 $\{\Psi^\beta\}$ の配置は, 変形と破壊の問題に対する PDS-FEM と同様であるとする.

変形と破壊の問題に対する PDS-FEM では, 亀裂面 Γ は図- 2.4 に示すように, Voronoi ブロックの境界上として定義されており, traction-free な亀裂面 $\hat{\Gamma}$ 上には節点が存在しない. つまり, 変形と破壊の問題に対する PDS-FEM では亀裂面が blunt crack としてモデル化されている. 図- 2.5 に, blunt crack および blunt crack の境界面 Γ' を示す. Blunt crack の境界面 Γ' は部分的に破壊した Delaunay 四面体と破壊していない Delaunay 四面体との境界である.

PDS-FEM におけるこの亀裂モデルを拡散の問題にも適用すると, 亀裂面 Γ 上での水分場の不連続性および亀裂面 Γ からの蒸発による水分フラックス \bar{v} を与える Neumann 境界条件 (2.3e) は, 離散形式において, i) 部分的に破壊された要素における異方性をもつ拡散係数, ii) 亀裂面に隣接する節点に与えられる水分フラックス, によって表現することができる. ここで, 「部分的に破壊された要素における異方性をもつ拡散係数」は図- 2.6 (a) に示すように, 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に直交する方向の水分フラックスを除去するように与えられる. また, 「亀裂面に隣接する節点に与えられる水分フラックス」は図- 2.6 (b) に示すように, 部分的に破壊した Delaunay 四面体と破壊していない Delaunay 四面体との境界 (Γ') 上に位置する節点に与えられた蒸発による水分フラックス \bar{v} である.

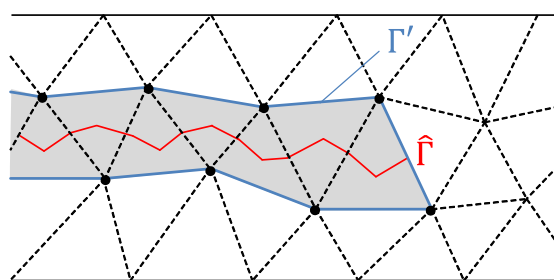


図-2.5 変形物体における変形と破壊の問題に対する PDS-FEM の亀裂モデル. 簡単のために二次元の場合における亀裂モデルを示す. 灰色のエリアが blunt crack を表し, 青線が blunt crack の境界面 Γ' を表す.

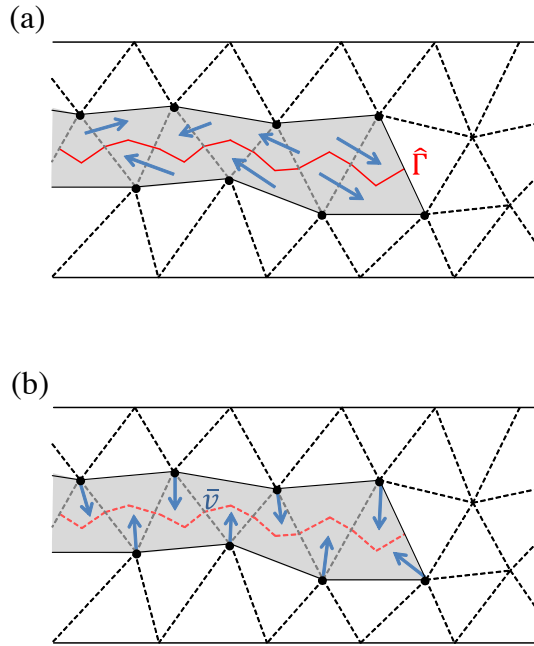


図-2.6 部分的に破壊した透水性物体内の拡散の問題に対する亀裂モデル.

(a) 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に直交する方向の水分フラックスの除去, (b) Γ' 上に位置する節点に与えられた蒸発による水分フラックス \bar{v} .

離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に直交する方向の水分フラックスを除去するような拡散係数は、以下のように定義される.

図- 2.7 に示す正規直交座標系 $\{e_i\}$ 上でのダルシー則を水分量表記で記述すると

$$\mathbf{J} = -D\nabla\theta \quad (2.27)$$

となる. ここで, \mathbf{J} は $\{e_i\}$ 座標系上での水分フラックスベクトルである. 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に対し e'_3 が直交するような正規直交座標系 $\{e'_i\}$ を導入する. \mathbf{J} の, 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ への射影 (\mathbf{J}^c とおく) は, $\{e_i\}$ 座標系上で

$$\mathbf{J}^c = \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{J} \quad (2.28)$$

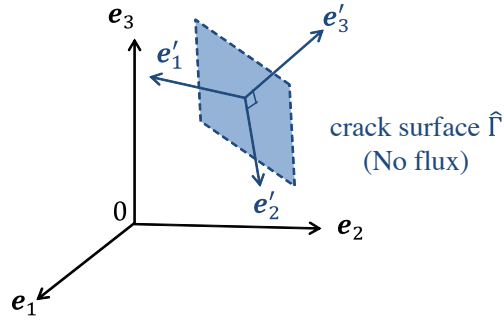


図-2.7 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に対し e'_3 が直交する正規直交座標系.

と表される. ここで, \mathbf{T} は添字表記で

$$T_{ij} = e'_i \cdot e_j \quad (2.29)$$

と表される座標変換行列である. また, \mathbf{P} は $\hat{\Gamma}$ に直交する水分フラックスを除くための射影行列であり, その成分は,

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.30)$$

となる. 部分的に破壊した要素内において, \mathbf{J} を \mathbf{J}^c に置き換えることは, 拡散係数 D を (離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ を通過する流れを除くような) 異方性をもった要素拡散係数マトリクス $(\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T})D$ に置き換えることと同義である.

以上の亀裂面の取り扱いを踏まえ, 拡散の問題に関する初期値境界値問題 (2.3) を, 節点の組 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ と Delaunay 四面体の組 $\{\Psi^\beta\}$ によって空間的に離散化し, 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ に直交する流れを除くための異方性をもった拡散係数を, 部分的に破壊された四面体要素に導入する. これにより, 初期値境界値問題 (2.3) の離散形式は, 四面体一次要素における形状関数 $\mathbf{N}^{\beta\alpha}$ を用いて以下のように表すことができる.

$$\begin{cases} \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{M}^{\alpha\gamma} \dot{\theta}^\gamma + \mathbf{A}^{\alpha\gamma} \theta^\gamma) = - \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{W}^{\alpha\gamma} \bar{w}^\gamma + \mathbf{V}^{\alpha\gamma} \bar{v}^\gamma) & (2.31a) \\ \theta^\alpha(0) = \theta_0(\mathbf{x}^\alpha) & (2.31b) \\ \theta^\alpha(t) = \bar{\theta}(\mathbf{x}^\alpha, t) \quad \mathbf{x}^\alpha \text{ on } \partial\hat{\Omega}^\theta. & (2.31c) \end{cases}$$

ここで, $\bar{w}^\alpha(t) = \bar{w}(\mathbf{x}^\alpha, t)$, $\bar{v}^\alpha(t) = \bar{v}(\mathbf{x}^\alpha, t)$ であり, 各マトリクスは以下のように構成される.

$$\mathbf{M}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M \int_{\Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dV \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M \mathbf{A}_e^\beta \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}_e^\beta = \begin{cases} D^\beta \int_{\Psi^\beta} (\nabla \mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \nabla \mathbf{N}^{\beta\gamma} dV & \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial\Phi^\alpha \cup \partial\Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \notin \hat{\Gamma} \\ D^\beta \int_{\Psi^\beta} (\nabla \mathbf{N}^{\beta\alpha})^T (\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T})^\beta \nabla \mathbf{N}^{\beta\gamma} dV & \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial\Phi^\alpha \cup \partial\Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma} \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{W}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M \int_{\partial\hat{\Omega}^w \cap \Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dS \quad (2.35)$$

$$\mathbf{V}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M \int_{\Gamma' \cap \Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dS. \quad (2.36)$$

これを解くことによって, 各節点における体積含水率 $\theta^\alpha(t) = \theta(\mathbf{x}^\alpha, t)$ の時間発展を得ることができる.

初期値境界値問題 (2.31) を解くことで得られる節点での体積含水率 $\theta^\alpha(t)$ の変化から, β 番目の Delaunay 四面体の乾燥による体積収縮ひずみ $\varepsilon^{v\beta}$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon^{v\beta} &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\Psi^\beta} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\rho_w}{\rho_d} (\theta^\alpha(t) - \theta^\alpha(0)) \right\} dV \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha}(\bar{\mathbf{x}}^\beta) \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\rho_w}{\rho_d} (\theta^\alpha(t) - \theta^\alpha(0)) \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

と評価される. ここで, $\bar{\mathbf{x}}^\beta$ は, β 番目の Delaunay 四面体の重心座標である. したがって, 式 (2.25) 中

に現れる β 番目の Delaunay 四面体の乾燥収縮ひずみ $\varepsilon^{s\beta}$ の具体形は

$$\varepsilon_{ij}^{s\beta} = \frac{1}{3} \varepsilon^{v\beta} \delta_{ij} \quad (2.38)$$

となる.

2.3.4 乾燥破壊現象の離散モデルにおける亀裂面の数理的解釈

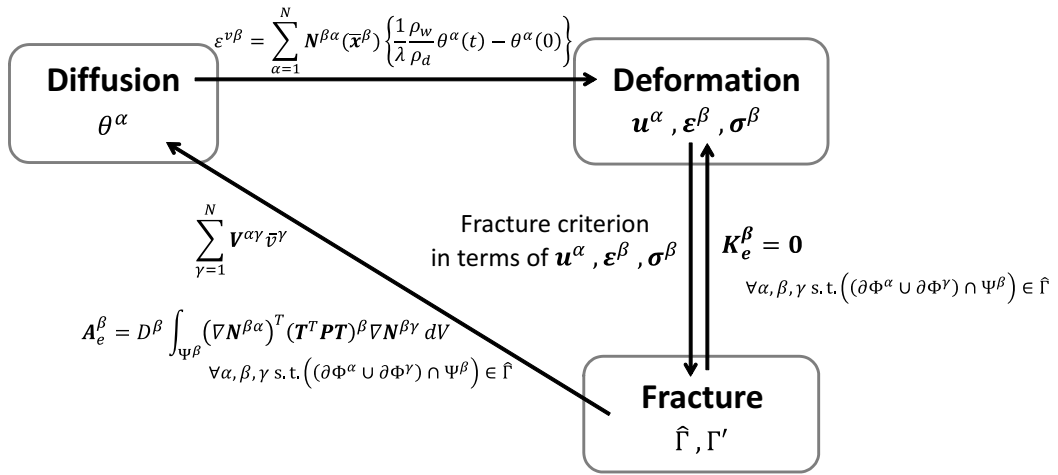


図-2.8 乾燥破壊現象に対する離散モデルの構造.

乾燥破壊現象の離散モデルの構造を図- 2.8 に示す. 拡散および変形の問題に関する解析的な定式化では, 亀裂面 Γ は内部 Neumann 境界として扱われ, 亀裂面 Γ 上で場は不連続となっていた.

一方で, 内部に亀裂面 Γ を含む領域全体を空間的に離散化した場合, 亀裂面 Γ という不連続面上に与えられた Neumann 境界条件を表現するためには, 「亀裂面上での不連続性の表現」と 「亀裂面上に与えられた Neumann 境界条件の導入」という 2 つの操作が必要となる. 離散場において, 内部 Neumann 境界 (亀裂面 Γ) は区分 $\Gamma^{\beta\alpha}$ の組で表される $\hat{\Gamma}$ としてモデル化される. 「亀裂面上での不連続性」は, 拡散の問題では, 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ をまたぐ水分フラックスがなくなるという透水性の喪失につながり, 変形の問題では, 離散化された亀裂面 $\hat{\Gamma}$ をまたぐ Voronoi ブロック間の相互作用がなくなるという力学的相互作用の喪失につながる. この透水性の喪失と力学的相互作用の喪失は, それぞれ, 部分的に

破壊した要素の要素拡散係数マトリクスの変化

$$D^\beta (\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T})^\beta \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial \Phi^\alpha \cup \partial \Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma}$$

と、部分的に破壊した要素の要素剛性マトリクスの変化

$$\mathbf{K}_e^\beta = \mathbf{0} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \text{ s.t. } ((\partial \Phi^\alpha \cup \partial \Phi^\gamma) \cap \Psi^\beta) \in \hat{\Gamma}$$

によって表される。また、離散場では、亀裂面 $\hat{\Gamma}$ は亀裂面上に節点が存在しない blunt crack としてモデル化されていることから、「亀裂面上に与えられた Neumann 境界条件」は、亀裂面 $\hat{\Gamma}$ から半要素分ずれた Γ' (部分的に破壊した Delaunay 四面体と破壊していない Delaunay 四面体との境界) 上に位置する節点に与えられる。亀裂面上に与えられた Neumann 境界条件は、拡散の問題では亀裂面からの蒸発による水分フラックス \bar{v} を表し、変形の問題では (本論文では扱わないが) 摩擦力などを表す。

図- 2.8 に示すように、拡散の問題と変形の問題が扱う場は異なる (拡散の問題はスカラー場、変形の問題はベクトル場) にも関わらず、どちらの問題においても亀裂面上での不連続性はマトリクスの変化によって表され、亀裂面上に与えられた Neumann 境界条件は亀裂面 $\hat{\Gamma}$ から半要素分ずれた Γ' 上の節点に与えられる。つまり、拡散の問題と変形の問題における亀裂面の数理的な取扱いには、一貫性・整合性があるといえる。

第3章 数値解析手法

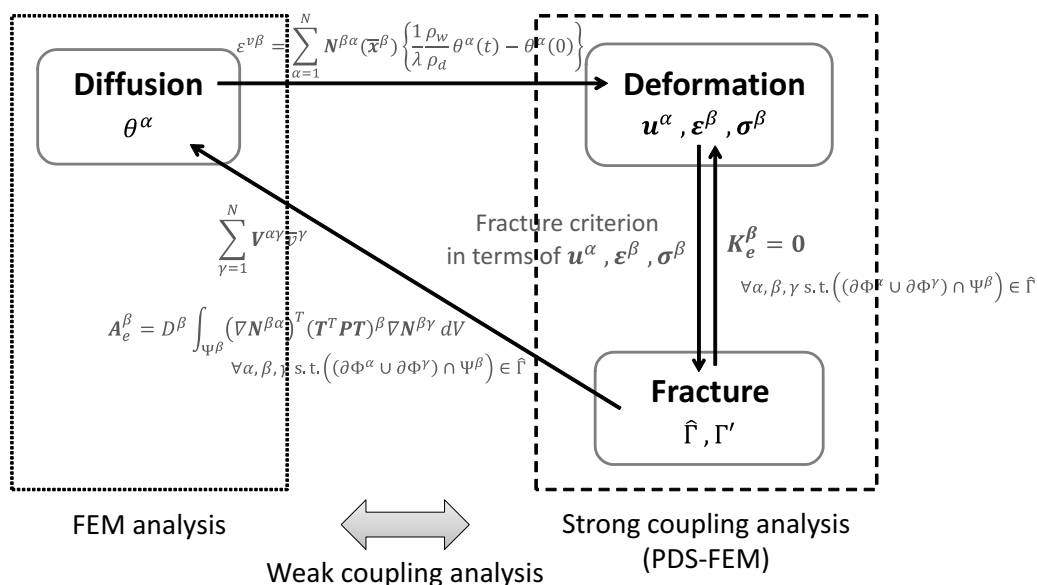


図-3.1 解析手法の切り分け.

2.2節で述べたように、図- 2.2 に示す連成モデルの構造において、直接的かつ双方向の作用が存在する変形過程と破壊過程は強連成解析を行う必要があるが、他の過程との間に一方方向の作用しかない拡散過程は、変形/破壊過程とは別に解くことができる。本研究では、拡散過程は四面体一次要素を用いた通常の有限要素法によって解き、変形/破壊過程は PDS-FEM によって解く。拡散の有限要素解析と変形/破壊の PDS-FEM 解析を弱連成させることで、拡散・変形・破壊の連成解析を行う (図- 3.1)。乾燥破壊現象における水分拡散と破壊は互いに時間スケールが大きく異なる物理現象であることから、両過程を厳密に連立して解く必要はなく、力の発生や水分移動といった物理領域については連立しながら時間領域については交互に計算を行う弱連成解析が妥当であることが分かる。

このとき、拡散の有限要素解析と変形/破壊の PDS-FEM 解析では同じ四面体メッシュを用いる。つ

まり、有限要素解析の四面体要素と、PDS-FEM 解析における Delaunay 四面体の形状と配置は一致している。

解析対象は透水性のある等方均質線形弾性体であると仮定し、水分分布と応力分布の時間発展を、時間ステップ $\Delta t = 0.1 \text{ h}$ で計算した。ただし、亀裂発生後、亀裂先端での応力場が大きく変化するため、全要素中最大のトラクションが引張強度の 97% 以上の場合には、次の時間ステップを $\Delta t = 0.01 \text{ h}$ と小さくした。各要素におけるトラクションの具体的な計算方法および破壊の判定方法は、A.2 と A.3 に示す。

水分移動を表す初期値境界値問題 (2.31) の時間発展の解法には完全陰解法（後退 Euler 法）を用いた。変形と破壊の問題に対する PDS-FEM による強連成解析では、各時間ステップの中で、時間ステップを固定しながら 1 つずつ要素を破壊し、その都度、静的つり合い状態を確保する、準静的破壊進展解析を行った。破壊条件を満たす要素が無くなれば次の時間ステップに進む。実験の際の典型的な亀裂進展の平均速度はたかだか $1[\text{cm/h}]$ 程度であり、準静的な破壊進展解析の適用は妥当であるといえる。また、いずれの解析においても、境界面 $\partial\Omega^w$ および亀裂面 Γ からの蒸発による水分フラックス \bar{w} と \bar{v} は体積含水率 θ に依らず一定とした。さらに、解析の開始時点で試験体全体は飽和しているとし、初期体積含水率の分布は解析領域内で一様とした。

図- 3.2 に解析のフローチャートを示す。

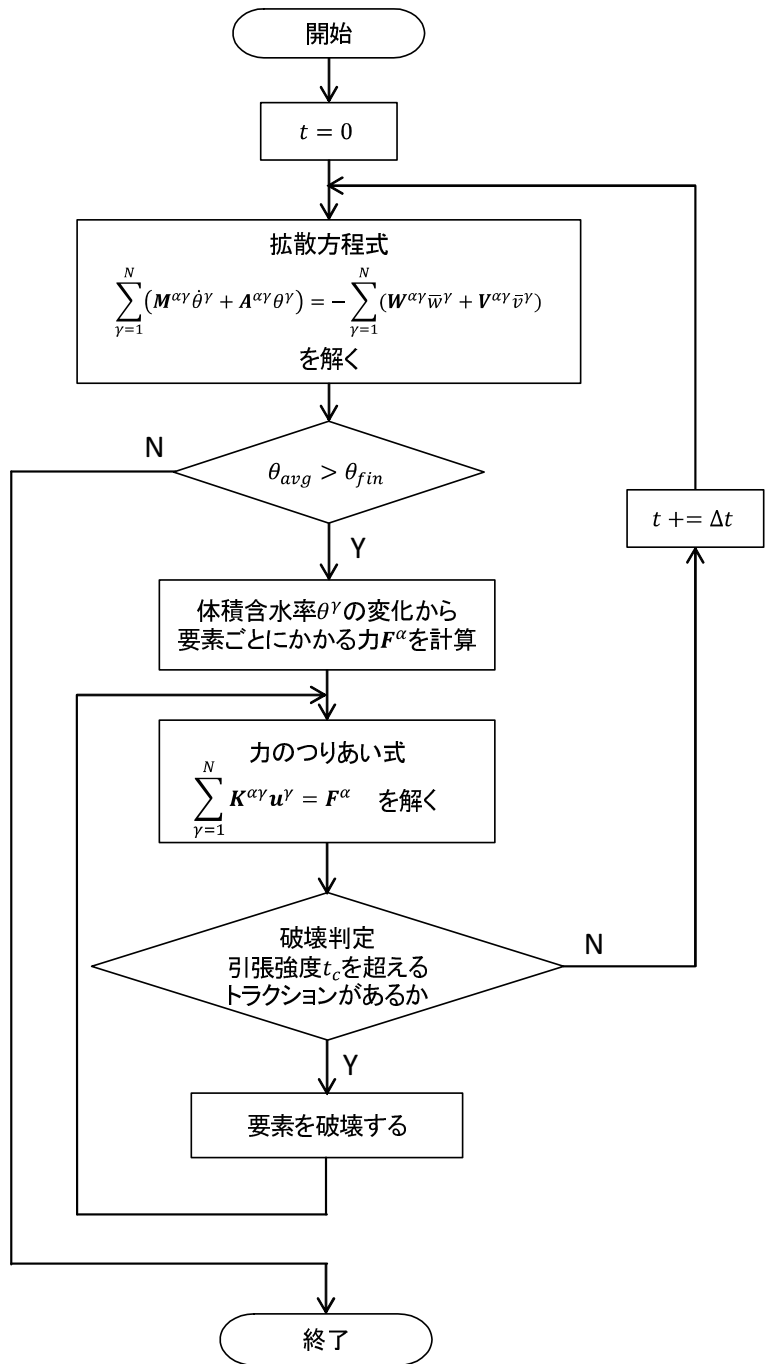


図-3.2 解析のフローチャート.

第4章 平行亀裂パターンの再現

4.1 解析条件

Peron et al. (2009b)²⁰⁾ や Nahlawi and Kodikara (2006)¹⁶⁾ は、薄く細長い形状の水 - シルト混合物に特定の境界条件を与えて乾燥させると、試験体上面で一次元的な平行亀裂パターンが観察されることを示した。このとき、全ての亀裂は試験体の長辺に対して垂直な向きに進展するとともに、鉛直な亀裂面を形成する。また、試験体上面において、亀裂および試験体の境界によって囲まれた長方形領域を「乾燥亀裂によって形成される多角形セル」とみなすと、新たな亀裂は既に形成されているセルを分割するように発生する。つまり、亀裂パターンは一度には形成されず、セルの階層的な分割過程によって形成される。

Peron et al.(2009b)²⁰⁾ の実験では成形した試験体を基盤上に置くのみで、側面は囲われていない。また、基盤に切り込みを入れることで底面の長辺方向の収縮のみ拘束している。一方、Nahlawi and Kodikara (2006)¹⁶⁾ の実験では細長い容器に水-シルト混合物を入れ、底面は容器と試験体の癒着により、長辺方向、短辺方向共に収縮を拘束しているが、側面については滑らかにすることで拘束を弱くしている。どちらの実験においても、亀裂パターンの特徴は一致するが、本研究では Peron et al. (2009b)²⁰⁾ の乾燥実験に基づき図- 4.1 のように解析領域 Ω の形状と境界条件を設定した。具体的には、

- 底面にある節点は z 方向と x 方向の変位のみ拘束
- 側面にある節点の変位は拘束しない
- 上面と側面から蒸発が起こる（亀裂発生後は亀裂面からも蒸発する）

となる。

ここで、試験体の底面を $\partial\Omega^{(1)}$ 、側面と上面を $\partial\Omega^{(2)}$ とすると、完備性 $\partial\Omega = \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ と排他性 $\partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} = \emptyset$ が成り立つ。このとき、拡散に関する初期値境界値問題 (2.3) における Dirichlet 境界

$\partial\Omega^\theta$ と Neumann 境界 $\partial\Omega^w$ には, $\partial\Omega^w = \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ と $\partial\Omega^\theta = \emptyset$ が成り立ち, 変形に関する境界値問題 (2.7) における Dirichlet 境界 $\partial\Omega^u$ と Neumann 境界 $\partial\Omega^t$ には, $\partial\Omega^u = \partial\Omega^{(1)}$ と $\partial\Omega^t = \partial\Omega^{(2)}$ が成り立つ. $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ の点を O とすると, Peron et al. (2009b)²⁰⁾ による乾燥破壊実験における亀裂パターンは, 以下に示す拡散に関する初期値境界値問題 (4.1) と変形に関する境界値問題 (4.2) の連成問題を解くことによって得られる.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\theta} = D\nabla^2\theta & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (4.1a) \\ \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (4.1b) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(1)} \quad (4.1c) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{w}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(2)} \quad (4.1d) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{v}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \Gamma \quad (4.1e) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (4.2a) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (4.2b) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) \quad (4.2c) \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(1)} \setminus O \quad (4.2d) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \text{ on } O \quad (4.2e) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \text{ on } (\partial\Omega^{(2)} \cup \Gamma) \quad (4.2f) \end{array} \right.$$

ここで, 変位境界条件 $\bar{\mathbf{u}}$ は, $u_1 = u_3 = 0$ である.

また, 解析に用いるパラメータは Peron et al. (2009b)²⁰⁾ の実験値を参考に, 表- 4.1 のように決定した. 亀裂の開口幅は小さいため, 亀裂面からの蒸発速度は試験体と外気の境界面からの蒸発に比べ遅いと考えられることから, 亀裂面からの蒸発速度は境界面からの蒸発速度の 50% とした. 以上のパラメータ設定に加え, 図- 4.1 の解析モデルについて, 要素数 56,597, 節点数 11,822 の四面体非構造メッシュによる有限要素モデルを作成し⁶⁷⁻⁶⁹⁾, 解析を行った.

表-4.1 平行亀裂パターンの数値解析におけるパラメータ

粉体乾燥密度 ρ_d	$2.77 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
水密度 ρ_w	$1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
初期体積含水率 θ_0	0.721
亀裂進展終了時体積含水率 θ_{fin}	0.324
境界面の蒸発速度 \bar{w}	$2.0 \times 10^{-4} \text{ m/h}$
亀裂面の蒸発速度 \bar{v}	$1.0 \times 10^{-4} \text{ m/h}$
水分収縮係数 λ	0.64
水分拡散係数 D	$3.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{h}$
ポアソン比 ν	0.3
ヤング率 E	5.0 MPa
引張強度 t_c	0.45 MPa

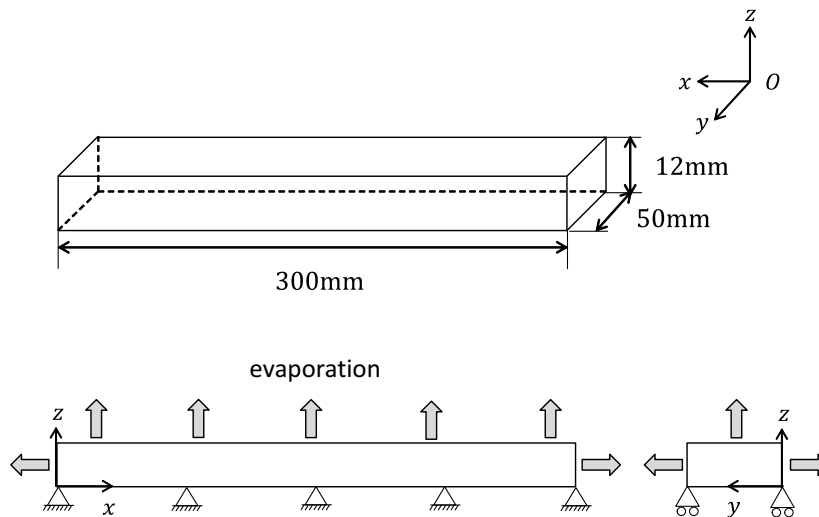


図-4.1 平行亀裂パターンの数値解析における解析モデルと境界条件.

4.2 解析結果

破壊は蒸発開始後 15.37 h で発生し、25.13 h には亀裂進展終了時の体積含水率となった。0.01 h（全要素中最大のトラクションが引張強度の 97% より小さい場合には 0.1 h）ごとの平均体積含水率 θ_{avg} の変化を図- 4.2 に、最終的な亀裂パターンの三次元的な様子を図- 4.3 に、上面の最終的な亀裂パターンを図- 4.4 にそれぞれ示す。図- 4.2 のように乾燥開始時から亀裂進展終了時の体積含水率になるまでの間、平均体積含水率はほぼ一定の割合で減少した。図- 4.3 および図- 4.4 から、実験結果と同様、長辺方向に垂直で互いに平行な亀裂が複数発生し、亀裂は試験体底面まで到達することで、鉛直な亀裂面を形成していることが分かる。

Peron et al. (2009b)²⁰⁾ や Nahlawi and Kodikara (2006)¹⁶⁾ は亀裂パターンの定量的な評価指標として亀裂本数および亀裂間隔を用いている。この指標に基づき、本研究の解析結果の検証を行ったところ、図- 4.4 に示す解析結果では、亀裂本数（短辺の半分以上の長さまで進展している亀裂の本数）は 8 本であり、得られた 9 個の亀裂同士の間隔は 15 mm から 55 mm であった。一方、Peron et al. (2009b)²⁰⁾ の実験で観察された 17 個の試験体における亀裂本数は 6 本から 8 本である。また、亀裂同士の間隔は 0 mm から 90 mm であり、多くは 20 mm から 60 mm の間に分布している²⁰⁾。したがって、図- 4.4 に示す解析結果の亀裂本数と亀裂間隔は、Peron et al. (2009b)²⁰⁾ の実験結果の範囲内にあるため、解析結果は妥当であるといえる。

また、上面の亀裂進展の様子を図- 4.5 に、上面に亀裂が発生する以前に観察される亀裂群を図- 4.6 にそれぞれ示す。図- 4.5 では、初めにいくつかの亀裂によって大きなセルが形成されたあと、解析モデルの側面上（長辺上）で亀裂同士の間隔の中心付近にあたる位置から新たな亀裂が発生し、セルを階層的に分割していることが分かる。さらに、図- 4.6 に示すように、解析モデルの上面に亀裂が発生する以前に、解析モデル底面（ $z = 0$ mm）の両端（ $x = 0$ mm, 300 mm）付近で、密集した亀裂群の発生が観察される。この亀裂群の発生は、Peron et al. (2009b)²⁰⁾ による実験でも指摘されており、試験体底面の角の基盤からの剥離につながる。

解析で得られた亀裂の幾何形状の特徴は、以上に示すように、亀裂の本数、亀裂面同士の間隔、セルの階層的な分割過程、試験体底面の両端付近に密集して現れる亀裂群まで、Peron et al. (2009b)²⁰⁾ による実験で観察された現象に一致しているといえる。

さらに、最終的な亀裂パターンに至った時点での、解析モデルの水平面における相当応力コンター図および体積含水率分布を、それぞれ図- 4.7 と図- 4.8 に示す。ここで、解析領域 Ω 内において、領域境

界 $\partial\Omega$ と亀裂面 Γ によって囲まれた領域を Ω^f とする。この問題では、 Ω^f は解析モデルの上面、底面、側面または鉛直な亀裂面に囲まれた直方体状の領域となる。蒸発に伴い、 Ω^f の体積は全方向で収縮するが、底面の x 方向の変位が拘束されているため、 Ω^f 内には x 方向の引張応力が発生する。図- 4.7 に示す相当応力の分布からも、 Ω^f 内に引張応力が発生していることが分かる。

また、図- 4.8 に示すように、亀裂面をまたぐ水分フラックスが存在せず、亀裂面が新たな蒸発面となるため、どの水平断面においてもセル (Ω^f の水平断面) の中心付近で含水量が高くなり、セルの境界付近では含水量が低下する。つまり、どの水平断面 (xy -平面) においても、体積含水率は同心円状の分布を示す。このような同心円状の体積含水率の分布によって、各セル内での収縮はセルの境界付近では大きく、中心付近は小さくなる。その結果、収縮が大きい境界付近では、同心円状の分布の円周方向に引張応力が発生し、セルの境界から中心に向かって新たな亀裂が進展すると考えられる。実際、図- 4.7 に示す相当応力の分布においても、解析モデルの側面付近の応力の方が、セルの中心付近より高くなっていることが分かる。

以上より、Peron et al. (2009b)²⁰⁾ の実験で観察された、

- 試験体側面上（長边上）で亀裂同士の間隔の中心付近にあたる位置からの亀裂の発生
- セルの階層的な分割

による亀裂パターン形成のメカニズムは、底面の x 方向の変位および同心円状の不均一な水分分布によって説明できるといえる。

このメカニズムに関する具体的考察は、第 6 章に示す。

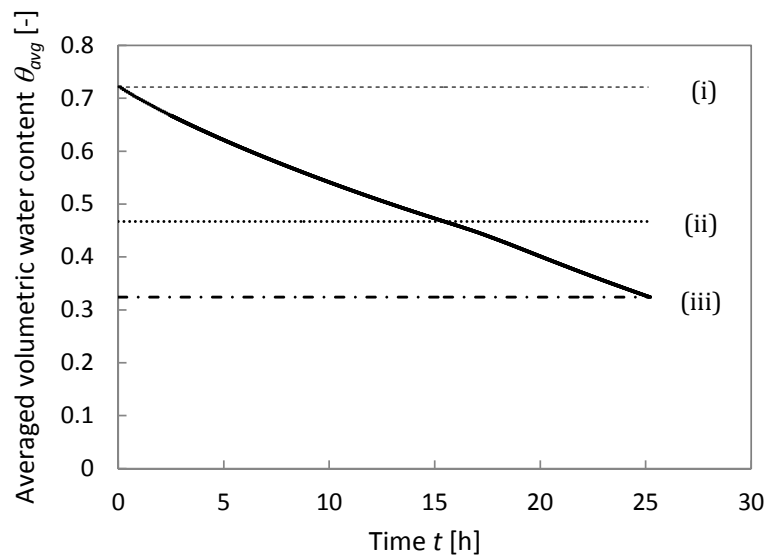


図-4.2 平行亀裂パターンの数値解析における平均体積含水率の変化. (i) 試験体表面の水分層がなくなった時点, (ii) 亀裂発生時, (iii) 亀裂進展終了時.

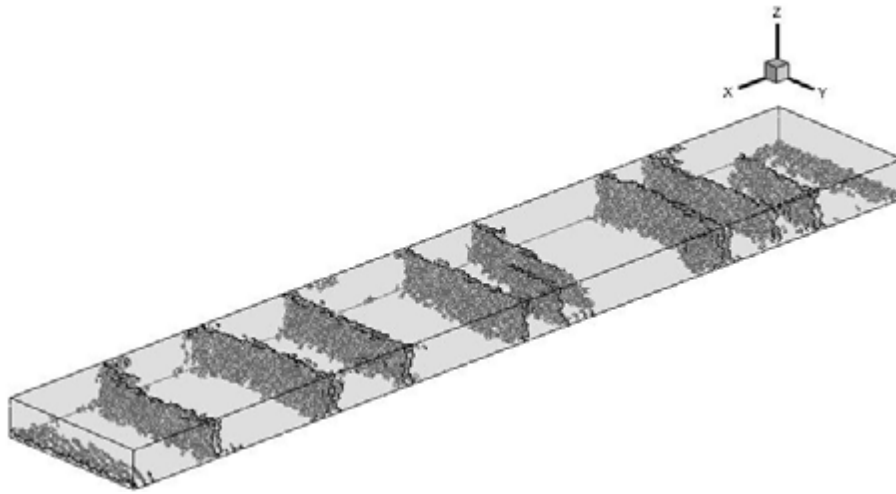


図-4.3 平行亀裂パターンの数値解析において最終的に形成された亀裂の三次元的な様子.

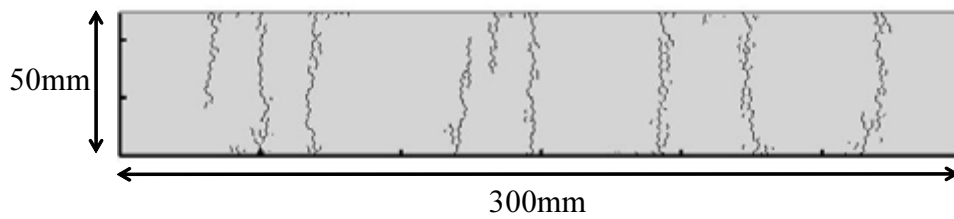


図-4.4 平行亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン.

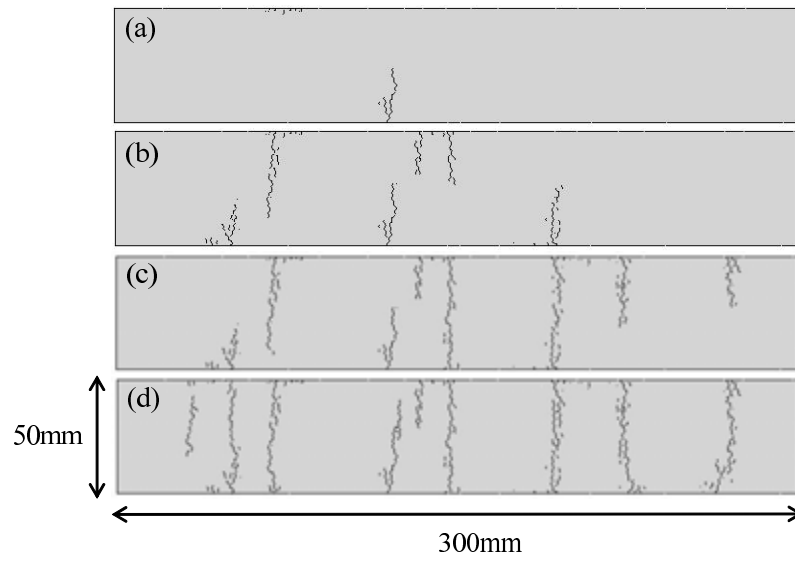


図-4.5 平行亀裂パターンの数値解析における解析モデル上面での亀裂進展の様子.
 (a) $t = 15.59$ hour, (b) $t = 17.03$ hour, (c) $t = 19.18$ hour, (d) $t = 25.14$ hour (最終的な亀裂パターン).

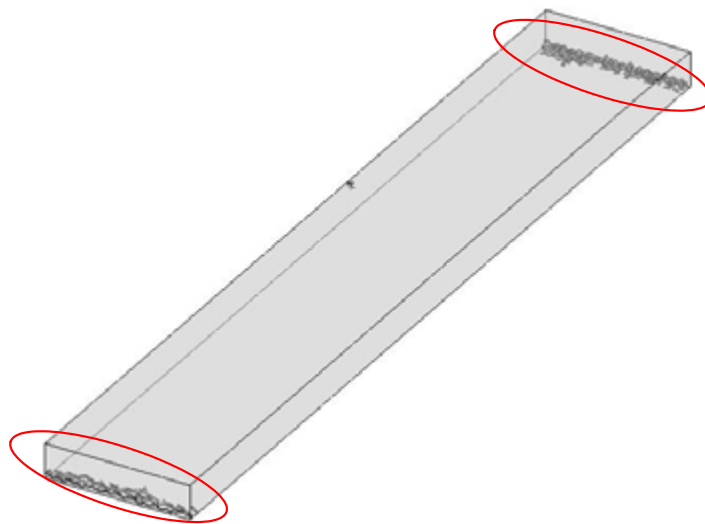


図-4.6 平行亀裂パターンの数値解析において上面に亀裂が発生する以前に観察される亀裂群.

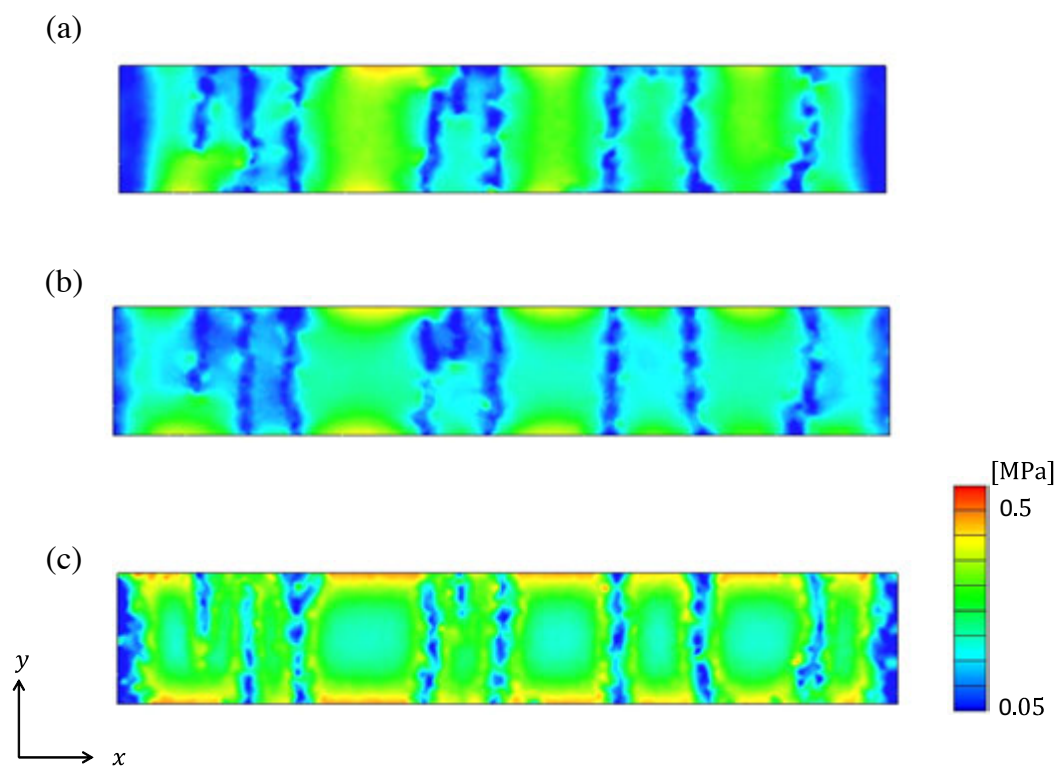


図-4.7 平行亀裂パターンの数値解析において、最終的な亀裂パターンに至った時点での、解析モデルの水平面における相当応力コンター図。(a) $z = 12 \text{ mm}$, (b) $z = 6 \text{ mm}$, (c) $z = 0 \text{ mm}$.

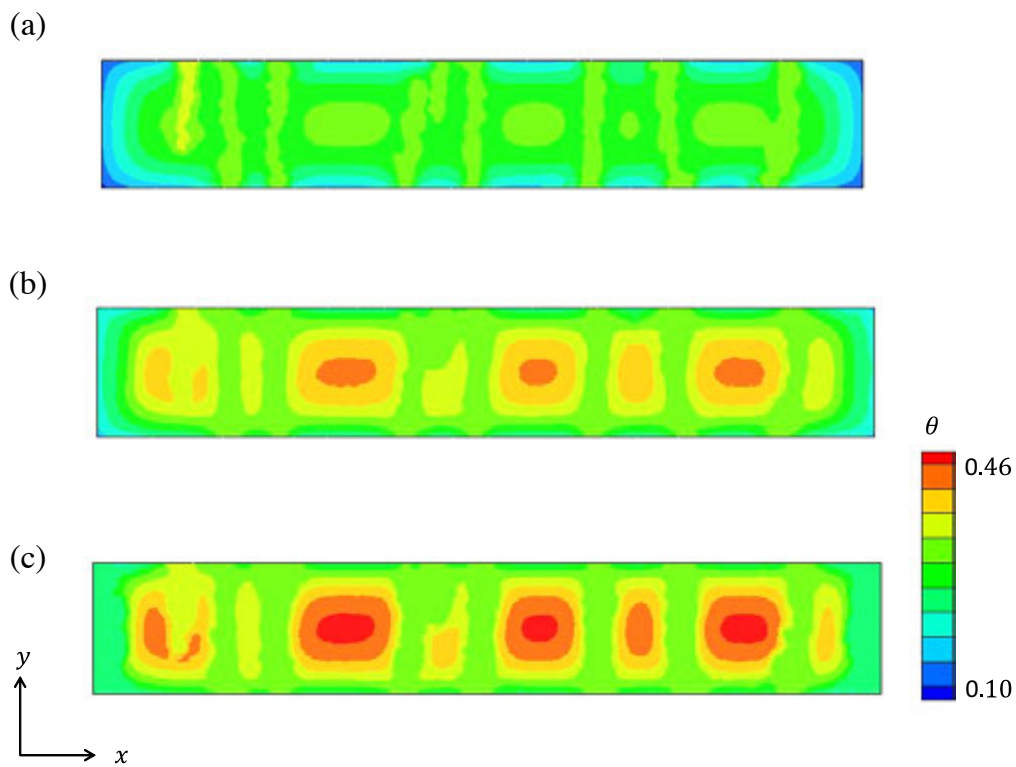


図-4.8 平行亀裂パターンの数値解析において、最終的な亀裂パターンに至った時点での、解析モデルの水平面における体積含水率分布. (a) $z = 12$ mm, (b) $z = 6$ mm, (c) $z = 0$ mm.

第5章 網目状亀裂パターンの再現

5.1 乾燥破壊実験

5.1.1 実験方法

網目状亀裂パターンに関する数値解析結果の検証データの取得および数値解析におけるパラメータ (e.g., 試験体の自由境界面からの蒸発速度, 初期および亀裂進展終了時の体積含水率) の測定を目的とした, 炭酸カルシウム懸濁液の乾燥破壊実験を行った. 炭酸カルシウム懸濁液は, そのメモリー効果⁷⁰⁻⁷³⁾や亀裂進展過程⁷⁴⁾に着目した乾燥破壊実験でしばしば用いられている.

実験の概要は以下の通りである. まず粒径 $5\mu\text{m}$ 以下の炭酸カルシウム粉と水を混ぜ合わせ, 体積含水率 0.72 の炭酸カルシウム懸濁液を作成した. この懸濁液を, 上面のみが開放された幅 $100\text{mm} \times$ 奥行 $100\text{mm} \times$ 深さ 50mm のアクリル容器に注いだものを試験体とした (図- 5.1). このとき炭酸カルシウム懸濁液は飽和状態にあった. 層厚とセルサイズとの関係を観察するため, 試験体の層厚は 5mm , 10mm , 20mm , 30mm の 4 パターンに設定した.

各層厚について, 24 個 (層厚 5mm), 11 個 (層厚 10mm), 10 個 (層厚 20mm), 10 個 (層厚 30mm) の試験体を作成し, 乾燥破壊実験を行った. ここでは, 層厚が小さくなるほど炭酸カルシウム懸濁液のメモリー効果が発生しやすく, 均一な試験体を作成するのが困難になるため, 薄層の試験体数を増やしている. 均一な試験体から得られる実験の結果は, 層厚ごとに一致していたため, 本論文では各層厚について 3 個ずつ, 計 12 個の試験体における実験結果のみを示す. 炭酸カルシウム懸濁液をアクリル容器に注いだ後しばらく静置すると, 表面に水分層ができるため, 水分層を除いた層の厚さが設定したい試験体厚さになるよう懸濁液の分量を調整した. 例えば, 設定する層厚が 10mm の場合, 必要な懸濁液の重さは 152g であった.

作成した試験体を室温 20°C , 相対湿度 50% の一定値に保たれた実験室に静置し乾燥させた. 乾燥中, 試験体の底面と側面は, 容器と試験体との間の摩擦と癒着によって拘束されている. 乾燥亀裂のパ

ターン形成過程を観察するため、試験体上面の様子を10分ごとに撮影した。また、試験体の平均体積含水率 (θ_{avg}) の変化を記録するため、水分蒸発に伴う試験体の質量変化も10分ごとに計測した。

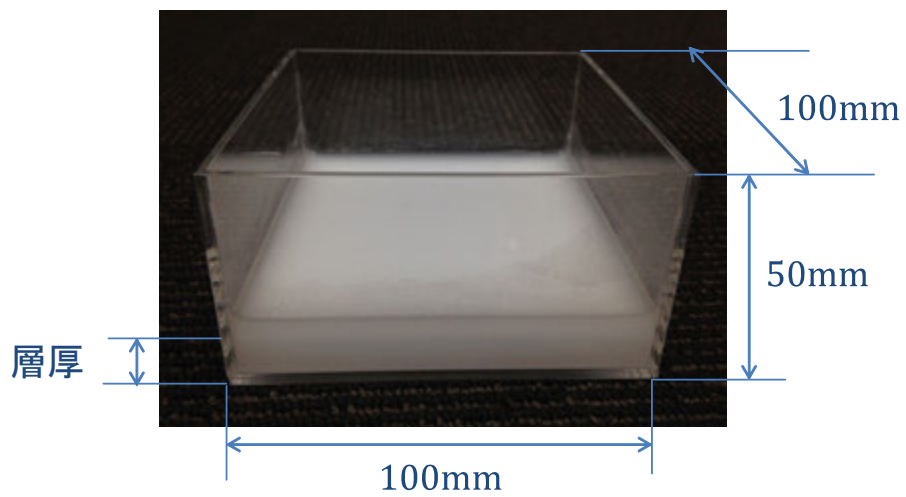


図-5.1 炭酸カルシウム懸濁液の乾燥破壊実験の試験体.

5.1.2 実験結果

図- 5.2 - 図- 5.5 は、各層厚における試験体上面の最終的な亀裂パターンを示している。ここで各図における (a)-(c) は、層厚ごとの 3 つの試験体を示している。どの層厚においても網目状の亀裂パターンが形成され、亀裂によって囲まれた多角形セルを形成している。

図- 5.6 は、層厚 30 mm の試験体 (図- 5.5 (a) に示す試験体) における最終的な亀裂パターンを上面と底面から見た図である。上面で観察される全ての亀裂は底面でも観察されており、上面の亀裂は全て底面まで到達していることが分かる。層厚 30 mm の他の試験体および層厚が 5 mm, 10 mm, 20 mm の試験体でも同様に、上面の亀裂は全て底面まで到達していた。つまり、亀裂は試験体の上面にのみ形成されているのではなく、上面から底面に向けて試験体を縦断するような鉛直亀裂面を形成している。したがって、各試験体は試験体と同じ厚さをもつ多角形断面の板に分割されていることになる。

次に、図- 5.2 - 図- 5.5 に示した試験体上面での亀裂パターンの画像から、各試験体におけるセルの面積を計測した。岩石やコンクリート、ゴムなどの表面に生じるひび割れでは、亀裂形状の定量的評価にフラクタル次元を用いている例が多くあり⁷⁵⁻⁸⁰⁾、乾燥亀裂パターンの幾何学的な評価にもフラクタル次元を適用した例がある^{81,82)}。しかし、乾燥亀裂パターンでは多くの場合、特徴的な長さスケール (i.e., セルサイズ) をもつ多角形セルが観察され、その特徴的な長さスケールと材料特性・試料形状・乾燥条件の関係性に着目した研究^{2,12-15)} が主流である。このことを踏まえ、本研究では、乾燥亀裂パターンの定量的評価指標としてセル面積を用いた。

セル面積の計測には画像解析ソフト ImageJ を用いた (ImageJ の面積計測精度は 1pixel (本研究の使用画像では 0.2 mm 程度) である)。面積の計測にあたり、容器との癒着および摩擦の影響を大きく受ける境界付近のセルは除外し、中心付近のセルのみを計測の対象とした。各試験体で計測されたセル面積の平均値および、各層厚 3 個の試験体から算出された層厚ごとのセル面積の平均値を、それぞれ図- 5.7 のグラフに示す。また、各層厚 3 個の試験体から算出された層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数を表- 5.1 に示す。図- 5.7 における試験体ごとの平均値から、層厚が同じ試験体のセル面積はほぼ同じ値をとることが分かる。このことから、容器との癒着および摩擦の影響を大きく受ける境界付近の一部のセルを除き、各層厚で観察されるセルのサイズはほぼ一定に保たれているといえることができる。このように試験体の境界を除いた中心付近で観察される一定のセルサイズは、各層厚に対応した特徴的な長さスケールとみなすことができる。また、図- 5.7 における層厚ごとの平均値から、層厚の増加に伴い各層厚におけるセルの平均的な面積が増加していることが確認できる。表- 5.1 の変動係数では、層厚 10 mm

と 30 mm でセル面積のばらつきが大きくなっており、この実験からではセル面積のばらつきの層厚に対する傾向は観察されない。層厚に応じた特徴的な長さスケールの存在と、層厚の増加に応じたセルの平均的な面積の増加傾向は、既存の実験的研究における結論と一致する。

図- 5.8 は層厚 10 mm の試験体 (図- 5.3 (a) に示す試験体) 上面における亀裂進展の様子を示している。乾燥破壊現象の初期段階 (図- 5.8 (a)-(c)) では、いくつかの長い亀裂が試験体上面を横切り、大きなセル構造を形成する。これらの亀裂は、一次亀裂¹⁶⁾と考えられる。乾燥が進むにつれ、一次亀裂によって形成されたセルは、二次亀裂によって段階的に分割されていく (図- 5.8 (d), (e))。ここで、「一次亀裂」、「二次亀裂」という分類は、Nahlawi et al. (2006)¹⁶⁾による定義に従っている。つまり、一次亀裂は、乾燥破壊現象の初期段階で現れる最初の亀裂の組で、二次亀裂は一次亀裂の間に発生する亀裂である。二次亀裂は一次亀裂に比べて短く、しばしば枝分かれが発生する。また、セルの境界から発生し、他の亀裂にあたるまでセルの中心方向に進展していく。このような二次亀裂によるセル分割は、亀裂の成長が終了し、最終的な亀裂パターン (図- 5.8 (f)) になるまで繰り返される。この階層的なセルの分割過程は他の試験体においても同様に観察された。

図- 5.9 は、層厚 10 mm の試験体 (図- 5.3 (a) に示す試験体) における平均体積含水率 θ_{avg} の変化を示している。実験開始後、蒸発が進み $\theta_{avg} = 0.560$ の時点で試験体上面の水分層がなくなった。また、 $\theta_{avg} = 0.224$ の時点で、初めて上面に亀裂が発生した。その後、試験体の体積含水率 θ_{avg} の減少量がほぼゼロになる (乾燥が終了する) よりも前に、亀裂進展は終了した。この亀裂進展終了時の平均体積含水率は、 $\theta_{avg} = 0.204$ であった。さらに、平均体積含水率 θ_{avg} が時間の経過に従い線形に減少していることから、少なくとも亀裂が進展している間の蒸発速度は一定であるといえる。粉体-水混合物の蒸発速度は、大気の蒸発能を満たす蒸発可能速度で蒸発が進行する「乾燥の第 1 段階 (恒率乾燥段階)」、粉体-水混合物の水分供給能力が大気の蒸発速度を満たせなくなり、蒸発速度が減少する「乾燥の第 2 段階 (減率乾燥段階)」、さらに低い蒸発速度を維持する「乾燥の第 3 段階」に分けられる⁸³⁾。蒸発速度が一定であることから、亀裂進展中の蒸発は常に「乾燥の第 1 段階」にあったことが分かる。乾燥の第 2 段階における蒸発速度の低下は、体積含水率が低く水分拡散関数の値が小さい表層部分の増加により、水分供給能力が低下することに起因する。このことから、乾燥の第 1 段階にある亀裂進展過程では、表層部の水分拡散関数は十分大きく、本実験のような比較的薄い試験体における水分拡散係数一定の仮定は妥当であるといえる。

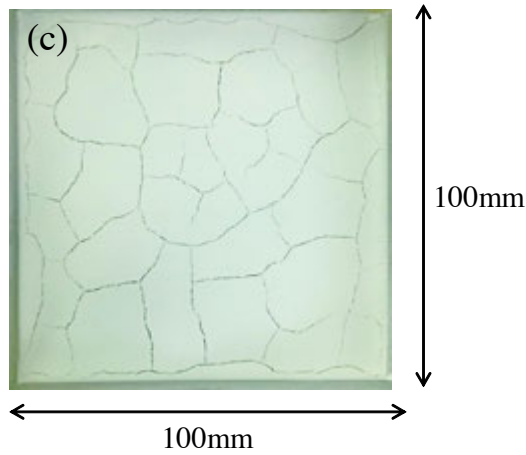
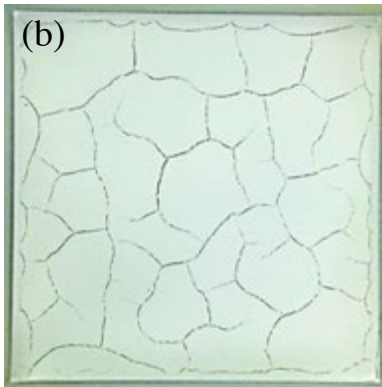
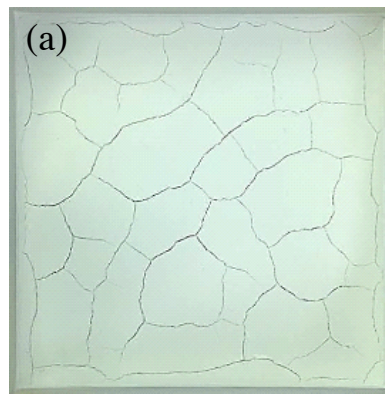


図-5.2 乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 5 mm の場合.

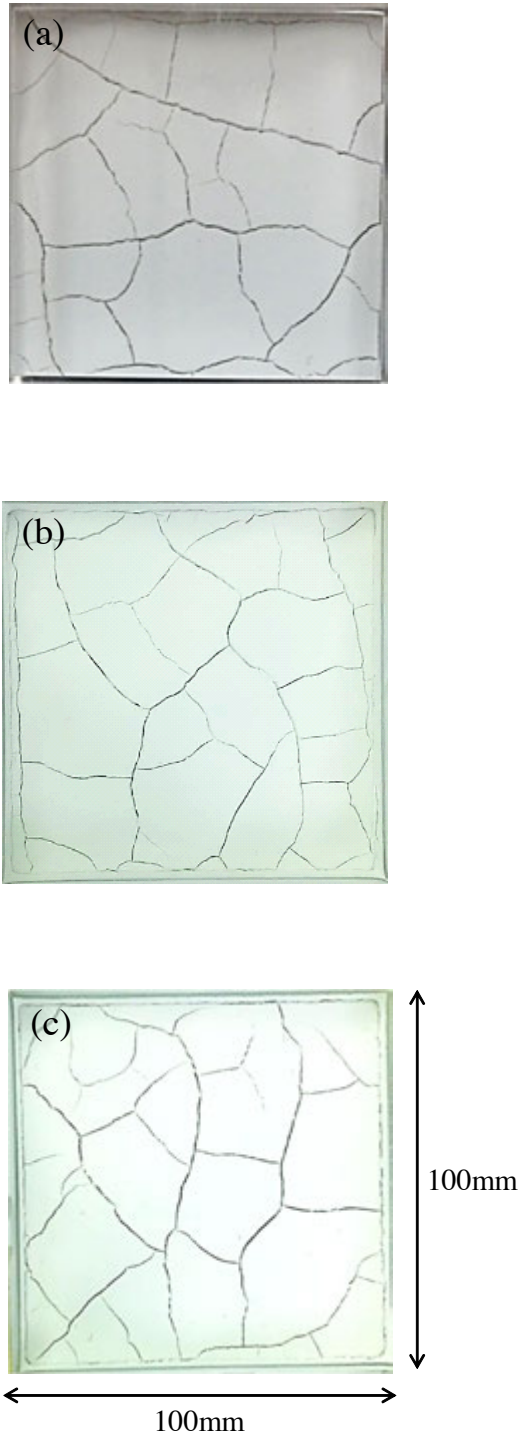


図-5.3 乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 10 mm の場合.

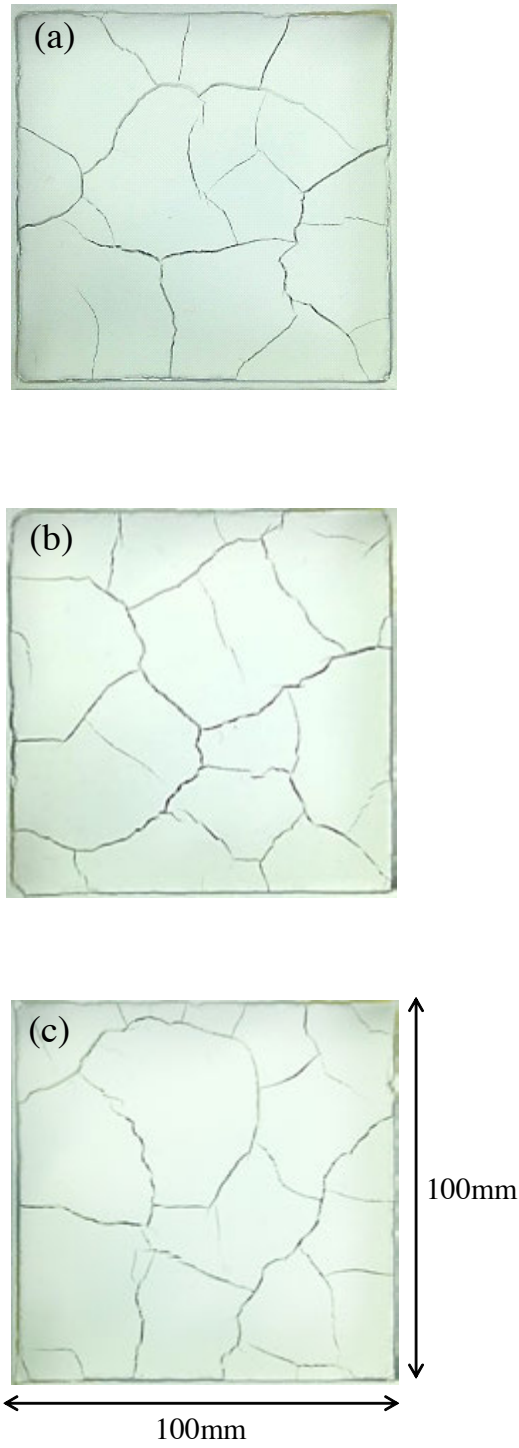


図-5.4 乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 20 mm の場合.

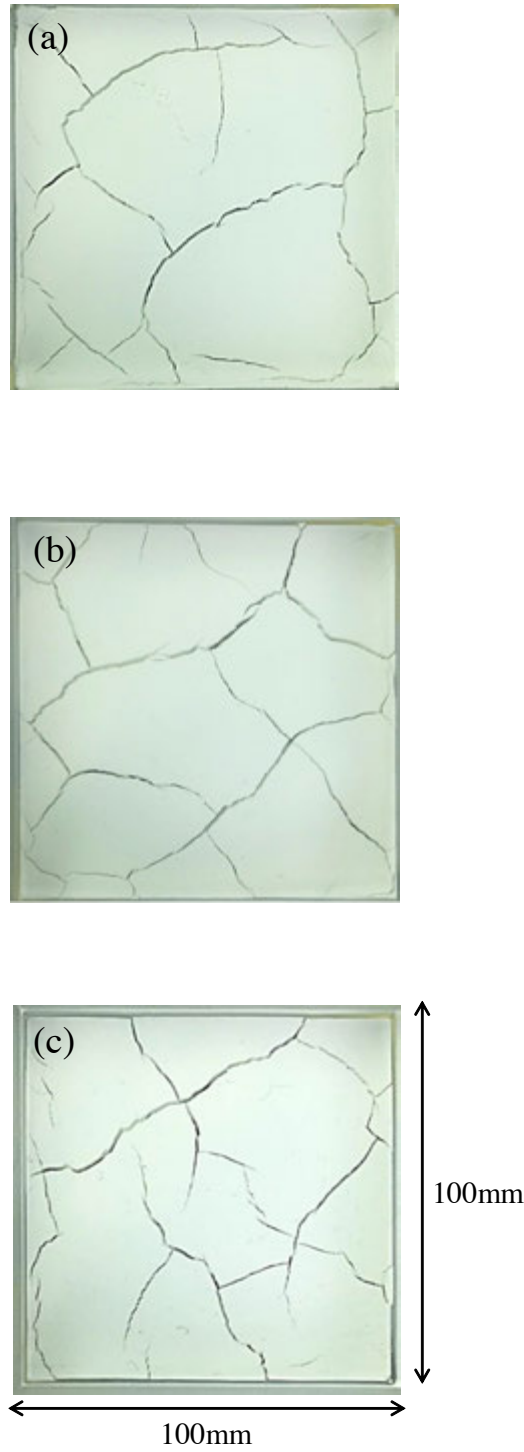


図-5.5 乾燥破壊実験において試験体上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 30 mm の場合.

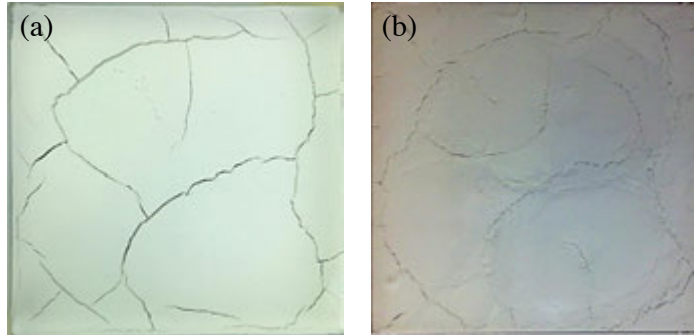


図-5.6 層厚 30 mm (a) の試験体における最終的な亀裂パターンの上表面と底面からの様子.
 (a) 上面の様子, (b) 底面の様子.

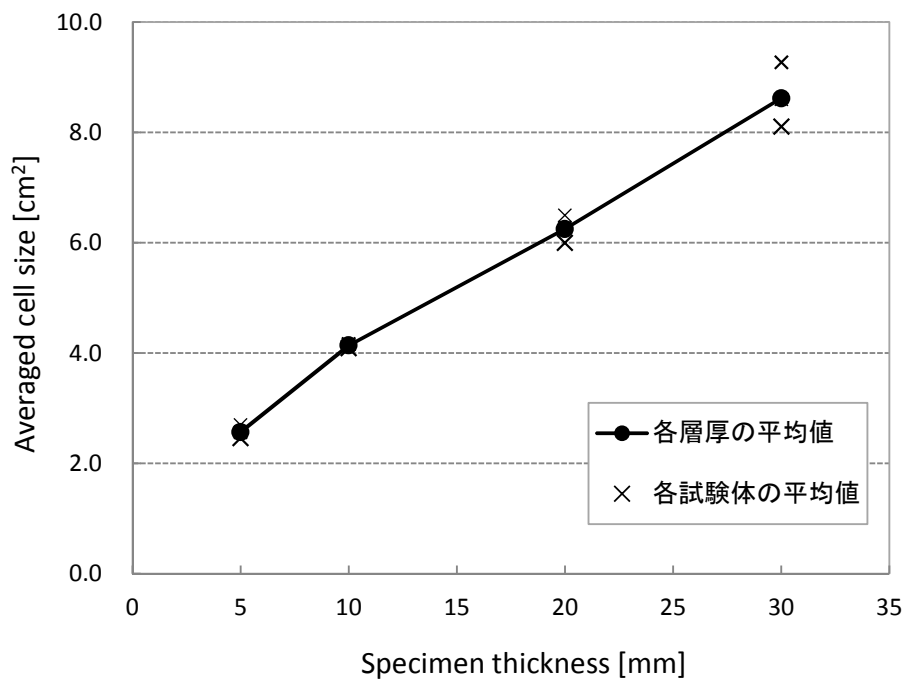


図-5.7 各試験体で計測されたセル面積の平均値と層厚ごとのセル面積の平均値.

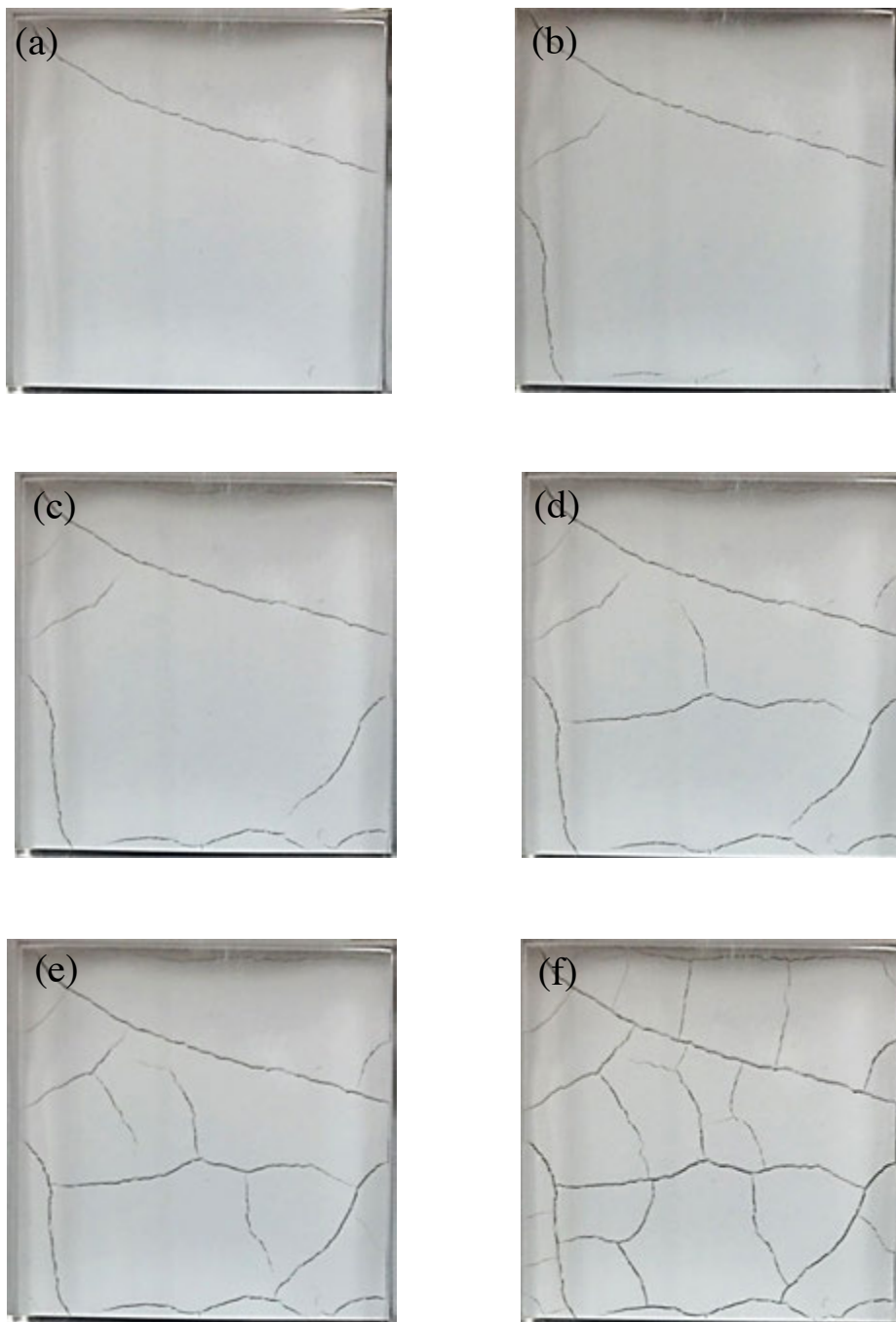


図-5.8 乾燥破壊実験における亀裂進展過程の様子. 層厚 10 mm (a) の試験体の場合.
(a)-(c) 一次亀裂による大きなセル構造の形成, (d), (e) 二次亀裂によるセル分割,
(f) 最終的な亀裂パターン.

表-5.1 乾燥破壊実験における層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数

層厚	平均値	変動係数	セル数
5 mm	2.57 cm ²	0.459	98
10 mm	4.14 cm ²	0.642	65
20 mm	6.25 cm ²	0.570	45
30 mm	8.62 cm ²	0.739	32

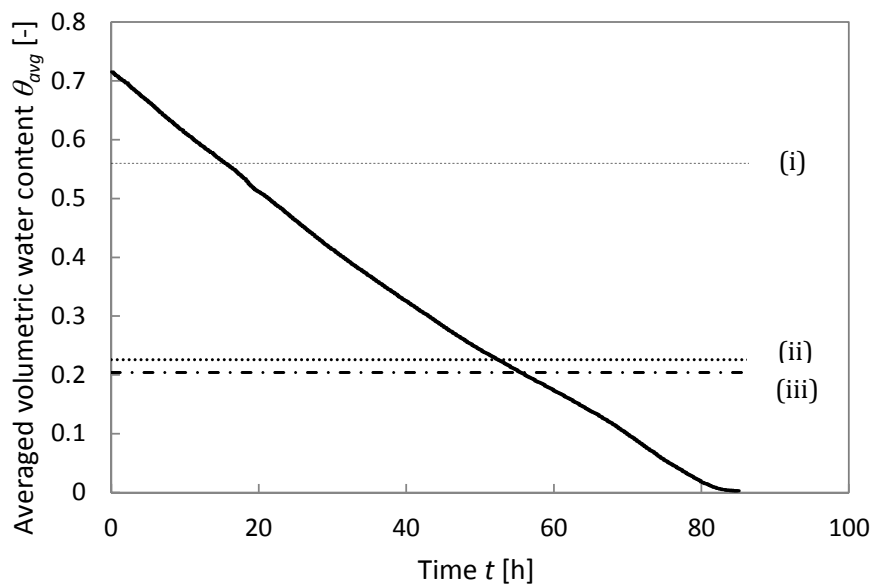


図-5.9 平均体積含水率 θ_{avg} の変化. 層厚 10 mm (a) の試験体の場合.

(i) 試験体表面の水分層がなくなった時点, (ii) 亀裂発生時, (iii) 亀裂進展終了時.

5.2 数値解析

5.2.1 解析条件

5.1 節で示した炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験で観察された、二次元的な網目状亀裂パターンと層厚によるセルサイズの変化を数値解析によって再現する。

5.1 節の乾燥破壊実験に従い、幅と奥行きが 100 mm の直方体解析モデルを用意し、層厚 T は 5 mm, 10 mm, 20 mm, 30 mm に設定した。乾燥破壊実験では、アクリル容器と接している試験体の境界面（側面と底面）は試料と容器の間の癒着と摩擦によって拘束されており、蒸発は容器の開口部（試験体上面）と亀裂面からのみ起こっていた。これに基づき、数値解析における境界条件を図- 5.10 のように設定した。

ここで、試験体の側面と底面を $\partial\Omega^{(1)}$ 、上面を $\partial\Omega^{(2)}$ とすると、完備性 $\partial\Omega = \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ と排他性 $\partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} = \emptyset$ が成り立つ。このとき、拡散に関する初期値境界値問題 (2.3) における Dirichlet 境界 $\partial\Omega^\theta$ と Neumann 境界 $\partial\Omega^w$ には、 $\partial\Omega^w = \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ と $\partial\Omega^\theta = \emptyset$ が成り立ち、変形に関する境界値問題 (2.7) における Dirichlet 境界 $\partial\Omega^u$ と Neumann 境界 $\partial\Omega^t$ には、 $\partial\Omega^u = \partial\Omega^{(1)}$ と $\partial\Omega^t = \partial\Omega^{(2)}$ が成り立つ。したがって、炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験における亀裂パターンは以下に示す、拡散に関する初期値境界値問題 (5.1) と変形に関する境界値問題 (5.2) の連成問題を解くことによって得られる。

$$\begin{cases} \dot{\theta} = D\nabla^2\theta & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) & (5.1a) \\ \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) & (5.1b) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(1)} & (5.1c) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{w}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(2)} & (5.1d) \\ D\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = -\bar{v}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \text{ on } \Gamma & (5.1e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) & (5.2a) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^s) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) & (5.2b) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) & \mathbf{x} \in \Omega \setminus (\partial\Omega \cup \Gamma) & (5.2c) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \text{ on } \partial\Omega^{(1)} & (5.2d) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \text{ on } (\partial\Omega^{(2)} \cup \Gamma) & (5.2e) \end{cases}$$

パラメータは、炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験で得られた値から表- 5.2 のように設定した。初期体積含水率 θ_0 と解析終了時の体積含水率 θ_{fin} は、炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験において、表面の水分層がなくなった時点と試験体上面での亀裂進展が終了した時点での平均体積含水率とした。亀裂面からの蒸発速度 \bar{v} は、平行亀裂パターンに関する解析と同様、境界面からの蒸発速度 \bar{w} の 50% とした。

炭酸カルシウム懸濁液の材料定数 (i.e., 水分拡散係数 D , ポアソン比 ν , ヤング率 E , 引張強度 t_c) の測定は非常に困難であり、信頼できる実験データは存在しない。そこで、水分拡散係数 D , ポアソン比 ν , ヤング率 E に関しては、シルト質の粘土に関する実験から得られている値を用いた^{15,20)}。また、本論文が対象とする乾燥破壊の問題ではヤング率 E と引張強度 t_c それぞれの値ではなく、 t_c/E と λ との比率、すなわち、試料を線形弾性体とみなした場合の破壊時の限界ひずみと、水分収縮係数 λ との比率が、亀裂生成のふるまいを支配している。水分収縮係数 λ は、間隙率や他の測定可能なパラメータを用いて比較的高い信頼度を持つ値が得られるため、層厚 10 mm の解析モデルを用いて、 $t_c/E = 0.12, 0.32, 0.52$ についてパラメトリックスタディを行った。その結果、 $t_c/E = 0.12$ では解析領域のほぼ全体にわたって細かな亀裂が発生し (このような亀裂パターンが実験で観察されることはない)、 $t_c/E = 0.52$ では亀裂が十分に進展しなかった (亀裂が解析モデル上面を横切ることなく進展が終了した) ことから、 $t_c/E = 0.32$ に定めた上で、シルト質の粘土におけるヤング率 $E = 5.0$ MPa を用いて t_c の値を決定した。

以上のパラメータ設定に加え、各解析モデルに対し四面体非構造メッシュによる有限要素モデルを作成した。このとき、亀裂パターンのメッシュ依存性を検証するため、各層厚ごとに空間分解能が異なる 3 パターンまたは 4 パターンの有限要素モデルを作成し⁶⁷⁻⁶⁹⁾ 解析を行った。各有限要素モデルのメッシュサイズ、および層厚 5 mm で節点数 32,802 の有限要素モデル (model 5-2) におけるメッシュ空間分解能によって正規化した各有限要素モデルの空間分解能を表- 5.3 に示す。

表-5.2 網目状亀裂パターンの数値解析におけるパラメータ

粉体乾燥密度 ρ_d	$8.0 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
水密度 ρ_w	$1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
初期体積含水率 θ_0	0.560
解析終了時の体積含水率 θ_{fin}	0.204
境界面の蒸発速度 \bar{w}	$8.8 \times 10^{-5} \text{ m/h}$
亀裂面の蒸発速度 \bar{v}	$4.4 \times 10^{-5} \text{ m/h}$
水分収縮係数 λ	0.69
水分拡散係数 D	$3.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{h}$
ポアソン比 ν	0.3
ヤング率 E	5.0 MPa
引張強度 t_c	1.6 MPa

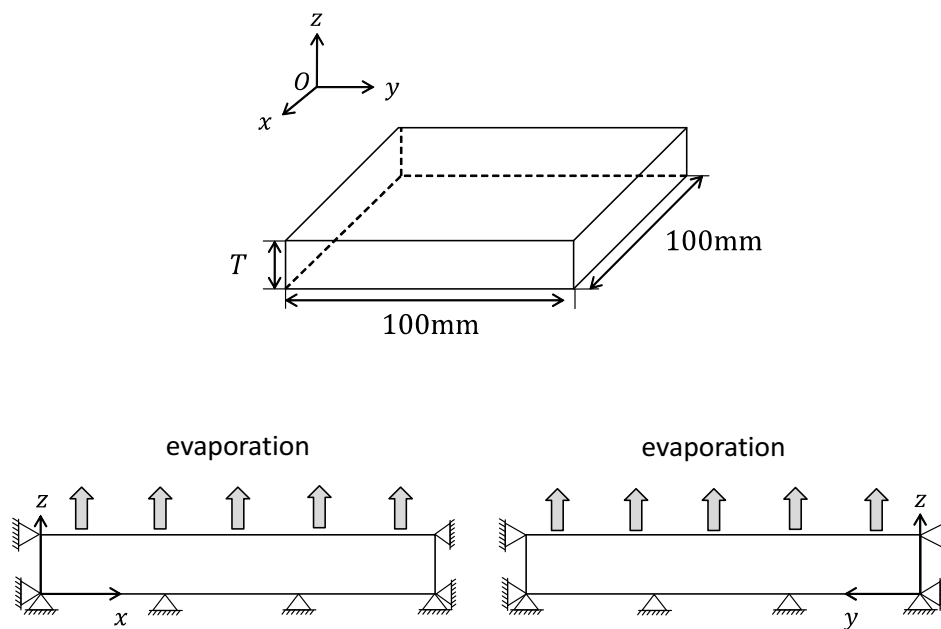


図-5.10 網目状亀裂パターンの数値解析における解析モデルと境界条件.

表-5.3 各有限要素モデルのメッシュサイズおよび正規化した空間分解能

層厚 T	Model No.	要素数	節点数	正規化された空間分解能
5 mm	model 5-1	109,110	22,959	0.70
	model 5-2	160,732	32,802	1.00
	model 5-3	253,930	50,355	1.54
	model 5-4	341,198	66,425	2.03
10 mm	model 10-1	178,235	33,870	0.516
	model 10-2	278,337	51,726	0.788
	model 10-3	326,368	60,215	0.918
20 mm	model 20-1	309,509	55,304	0.421
	model 20-2	325,931	58,129	0.443
	model 20-3	682,805	119,210	0.909
30 mm	model 30-1	347,551	61,146	0.311
	model 30-2	362,406	63,628	0.323
	model 30-3	1,053,347	180,271	0.916

5.2.2 解析結果

表- 5.3 に示した各モデル上面における最終的な亀裂パターンを図- 5.11 - 図- 5.14 に示す。モデルごとに亀裂パターンは変化するが、いずれの場合においても、網目状構造をもつ亀裂群が解析モデル上面を多角形のセルに分割している様子が再現されている。

また、図- 5.15 に層厚 5 mm のモデル (model 5-2) における三次元的な亀裂の様子を示す。この図から、全ての亀裂面は上面から底面へ向けて解析モデル内を縦断しており、上面と垂直な向き (鉛直方向) の亀裂面を形成していることが分かる。このように、上面に垂直で底面まで到達する亀裂面は、他の層厚のモデルにおいても同様に観察された。

ここで、モデル上面の亀裂パターン画像 (図- 5.11 - 図- 5.14) を用いて、各モデルで形成された多角形セルの平均面積を計測した。このとき、炭酸カルシウム懸濁液の乾燥破壊実験におけるセルサイズの計測と同様に、変位拘束の影響を受ける側面付近のセルや局所的な亀裂群の発生により明確に形成されていないセルは除外している。

図- 5.16 はモデルごとのセルの平均面積と正規化された空間分解能の関係を層厚ごとに示したグラフである。ここでは、メッシュサイズを細かくしてもセルの平均面積が変化しなくなった際に、それらのメッシュは十分な空間分解能を有していると判断する。層厚 5mm のモデル (model 5-1, 5-2, 5-3, 5-4) に着目すると、model 5-2, 5-3, 5-4 におけるセルの平均面積はそのメッシュ空間分解能に関わらずほぼ同じ値をとるのに対し、model 5-1 (正規化された空間分解能が 0.8 のモデル) は他の層厚 5 mm のモデルに比べセルの平均面積が大きくなっている。したがって、model 5-1 の有限要素モデルにおけるメッシュはセルサイズが収束するのに十分な空間分解能を有していないといえる。他の層厚のモデルでは、メッシュの空間分解能によってセルの平均面積は大きく変化していないことから、表- 5.3 に示した空間分解能においてセルサイズは収束していると考えることができる。以上から、亀裂パターン自体はメッシュ形状に依存して変化するが、メッシュ空間分解能が十分に高い場合には、形成される多角形セルのサイズはほぼ同じになるといえる。この収束した多角形セルのサイズが、各層厚に対応して形成される特徴的な長さスケールである。このように、亀裂パターン自体には多様性がありながらも特徴的な長さスケールが形成されることは、乾燥破壊実験での観察事実と一致する。

次に、層厚 5mm のセルサイズが収束していないモデル (model 5-1) を除き、各層厚ごとに、3 パターンのモデルで形成された全セルの面積の平均値を計算した。このセル面積による亀裂パターンの評価は先行研究にも多くみられ、材料に依らず層厚の増加に伴いセルの平均面積は増加することが分かっている。

る^{11,12,16-19}). 解析における層厚ごとのセルの平均面積を 5.1 節で示した炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験の結果 (図- 5.7) と比較したものを図- 5.17 に示す. この図から, 数値解析で得られたセルの平均面積はどの層厚においても実験値よりわずかに小さくなっているが, およそのセルサイズや層厚の増加に応じたセル面積の増加という乾燥亀裂パターンの基本的な特徴は数値解析によって捉えることができているといえる. また, 各層厚 3 パターンのモデルから算出された層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数を表- 5.4 に示す. この表から, セル面積のばらつきは層厚によらずほぼ一定であることが分かる. 数値解析におけるセルの平均面積を実験値と一致させるには, 実験から測定するのが困難な水分拡散係数, 亀裂面からの蒸発速度, 物質の強度を表す t_c/E といったパラメータに関してより広いパラメータ空間でのパラメトリックスタディを行いこれらのパラメータが亀裂パターンに与える影響を検証する必要がある.

図- 5.18 に, 層厚 10 mm のモデル (model 10-3) における上面での亀裂進展過程を示す. 乾燥破壊の初期段階では, いくつかの亀裂が長く進展し, 大きなセル構造を形成する (図- 5.18 (a)-(c)). これらの亀裂は, 炭酸カルシウムによる乾燥破壊実験で観察された一次亀裂とみなすことができる. その後, 二次亀裂が発生し, 一次亀裂の間を進展していくことで, 大きなセルを分割していく (図- 5.18 (d)-(f)). 二次亀裂の幾何学的特徴 (i.e., 短く, 枝分かれする場合がある) は, 乾燥破壊実験における観察結果と一致している. また, 二次亀裂は, 既に形成されているセルの周囲から発生し, 他の亀裂にあたるまで, セルの中心を通るように進展していく. この二次亀裂によるセルの分割は, 亀裂パターンが最終的な形状 (図- 5.18 (f)) になるまで, 繰り返される. つまり, 図- 5.18 に示した数値解析結果は, Bohn (2005a, 2005b)^{2,3}) が指摘した乾燥亀裂のパターン形成過程の基本的な特徴を捉えているといえることができる. このようなセルの段階的かつ階層的な分割過程は, 他の層厚 (5 mm, 20 mm, 30 mm) のモデルでも同様に観察された.

図- 5.19 に, 層厚 10 mm における 0.01 h (全要素中最大のトラクションが引張強度の 97% より小さい場合には 0.1 h) ごとの平均体積含水率 θ_{avg} の変化を示す. 図- 5.9 と図- 5.19 を比較すると, 実験では試験体表面の水分層がなくなった時点から亀裂進展終了時の体積含水率に至るまでの時間は約 40.2 h であったが, 数値解析では 45.48 h であり, 実験よりわずかに長かった. これは, 炭酸カルシウムの拡散係数に関するデータが得られておらず, Peron et al. (2009b)²⁰) によるシルト質の粘土の拡散係数を用いたためであり, 実際の炭酸カルシウムの拡散係数の値は本論文で用いた値より大きいと考えられる. また, 試験体表面に亀裂が発生する平均体積含水率は数値解析結果の方が実験結果より大きくなった. セルの平均面積と同様, 実験における測定が困難なパラメータに関するパラメータ・チューニングにより,

この値を実験値に近づけることは可能ではある。

以上より、数値解析の結果は、パラメータ・チューニングにより修正可能な差を残してはいるが、5.1節で示した炭酸カルシウム懸濁液の乾燥破壊実験で得られた

- 段階的かつ階層的なセルの分割過程
- 網目状亀裂群と多角形セルの形成
- セルサイズと層厚との関係

と良好な一致を見せていると結論づけられる。

これらの結果は、全て拡散・変形・破壊という3つのファンダメンタルな物理現象の連成によって得られるものである。連成の背後にある微妙なバランスによってこの現象が決定されていることを考えると、次元解析から得られる長さスケールと層厚との比較といった単純な議論は十分ではない。乾燥破壊現象における亀裂パターン形成を完全に記述するためには、本論文で提案した連成解析が必要不可欠であるといえる。

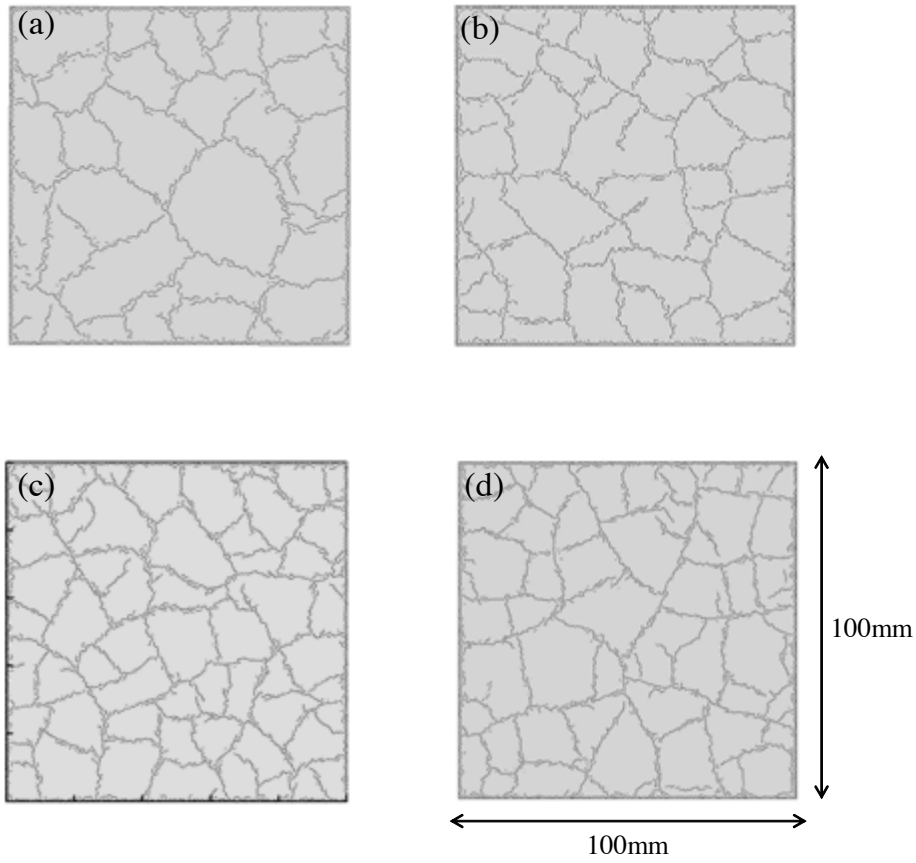


図-5.11 網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン．厚さ 5 mm の場合．

(a) model 5-1, (b) model 5-2, (c) model 5-3, (d) model 5-4.

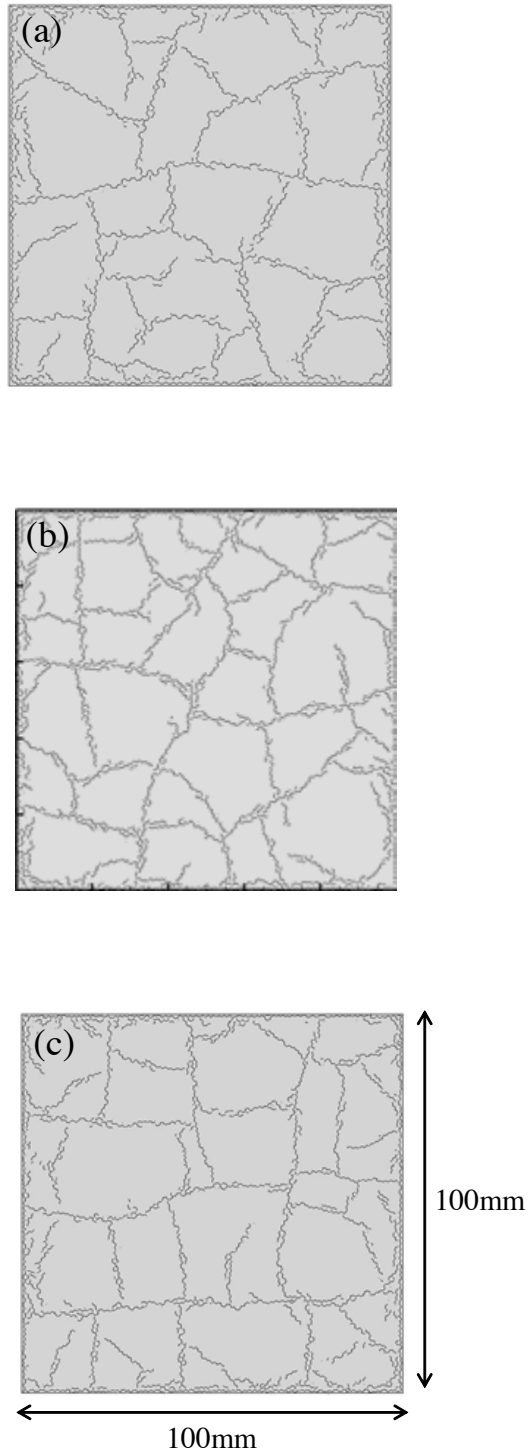


図-5.12 網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 10mm の場合.

(a) model 10-1, (b) model 10-2, (c) model 10-3.

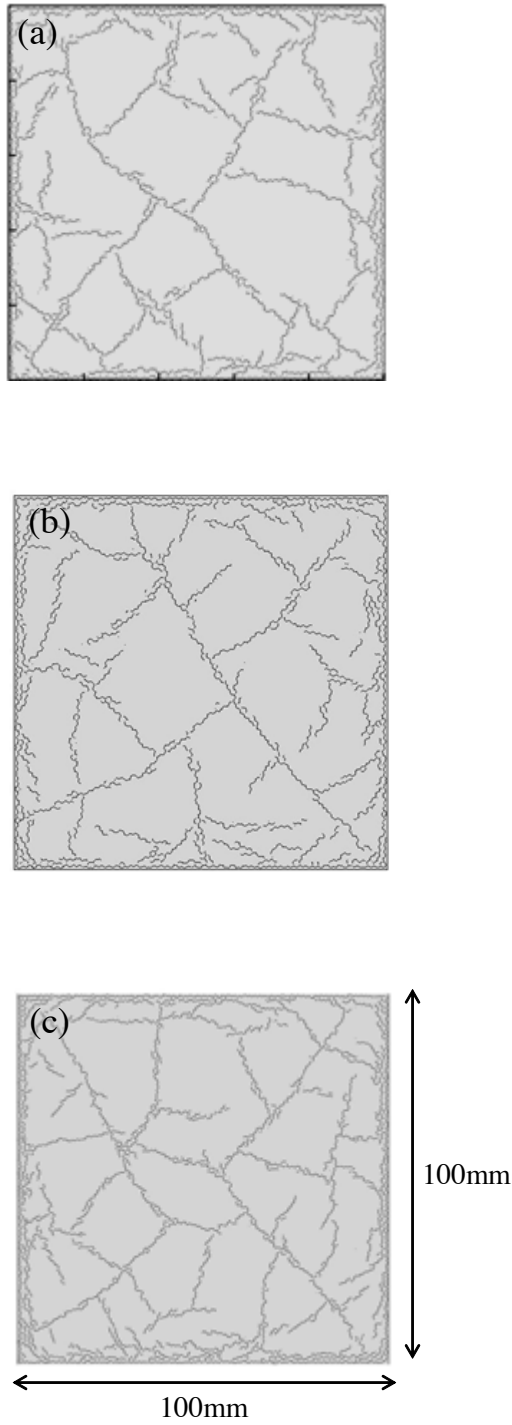


図-5.13 網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン. 厚さ 20 mm の場合.

(a) model 20-1, (b) model 20-2, (c) model 20-3.

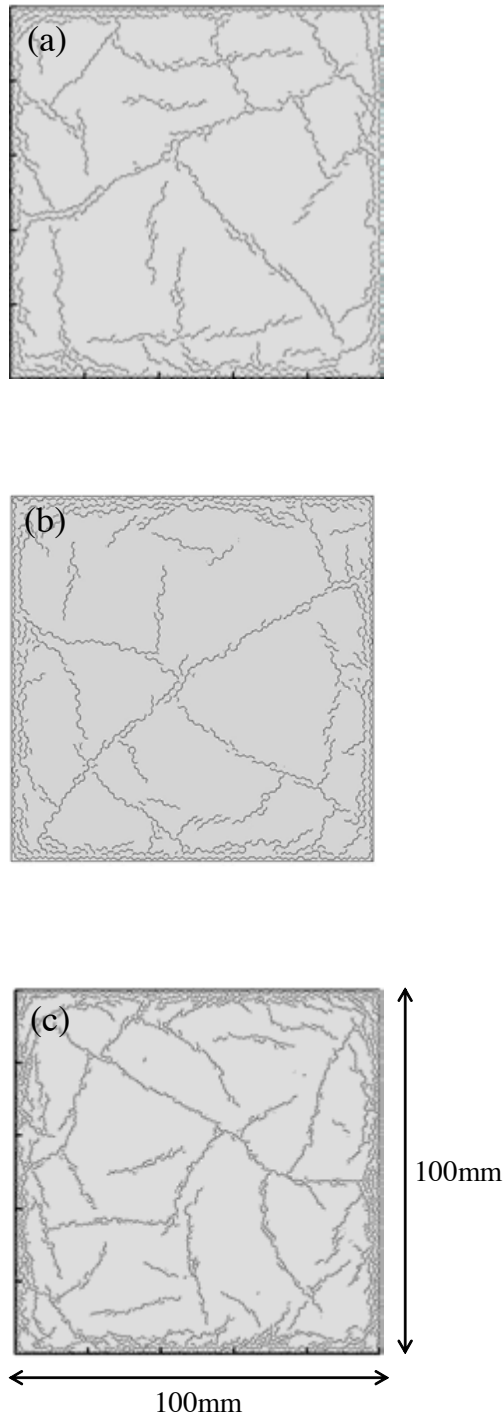


図-5.14 網目状亀裂パターンの数値解析において解析モデル上面に形成された最終的な亀裂パターン．厚さ 30 mm の場合．

(a) model 30-1, (b) model 30-2, (c) model 30-3.

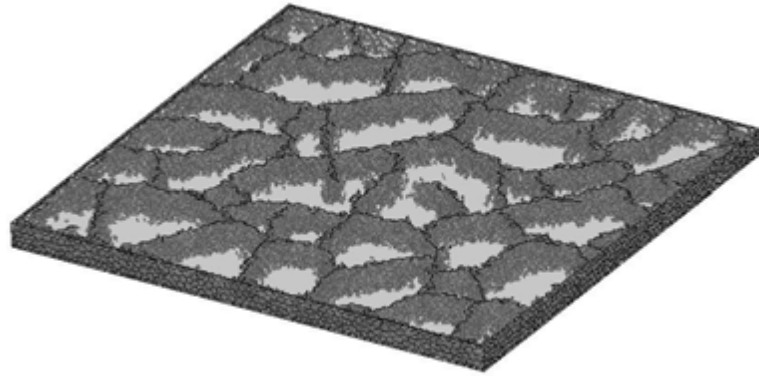


図-5.15 層厚 5 mm の解析モデル (model 5-2) における三次元的な亀裂の様子.

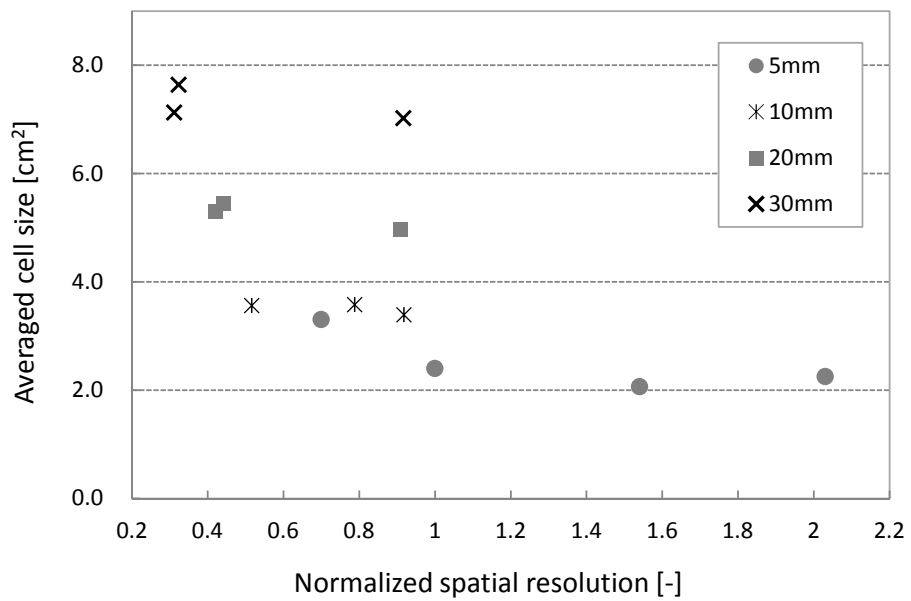


図-5.16 モデルごとのセルの平均面積と正規化されたメッシュ空間分解能の関係.

表-5.4 網目状亀裂パターンの数値解析における層厚ごとのセル面積の平均値と変動係数

層厚	平均値	変動係数	セル数
5 mm	2.23 cm ²	0.493	118
10 mm	3.50 cm ²	0.543	76
20 mm	5.25 cm ²	0.474	46
30 mm	7.27 cm ²	0.503	30

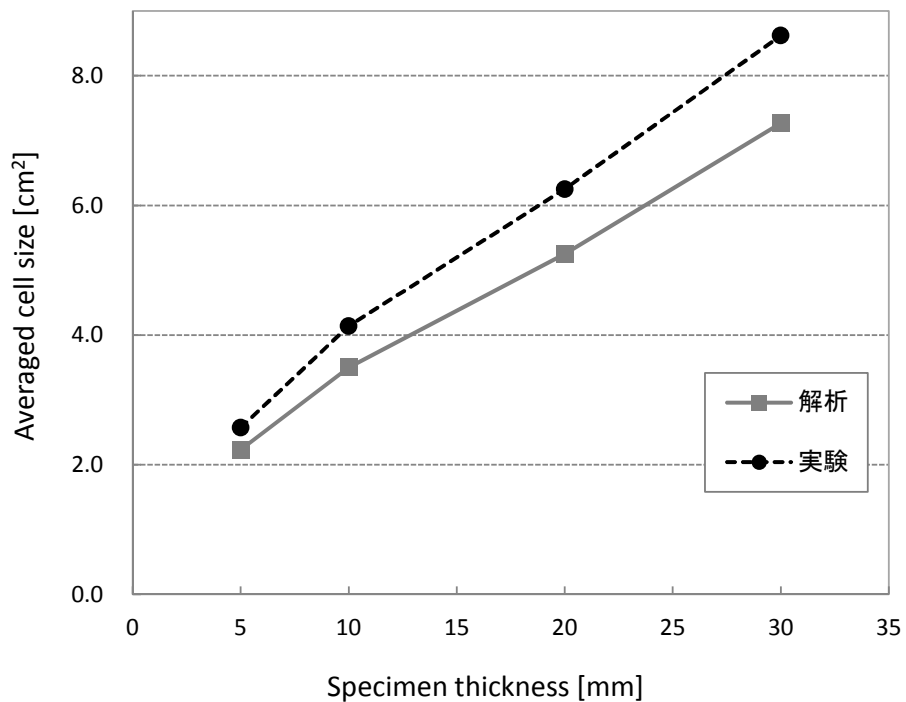


図-5.17 層厚ごとのセルの平均面積に関する実験結果と数値解析結果の比較.

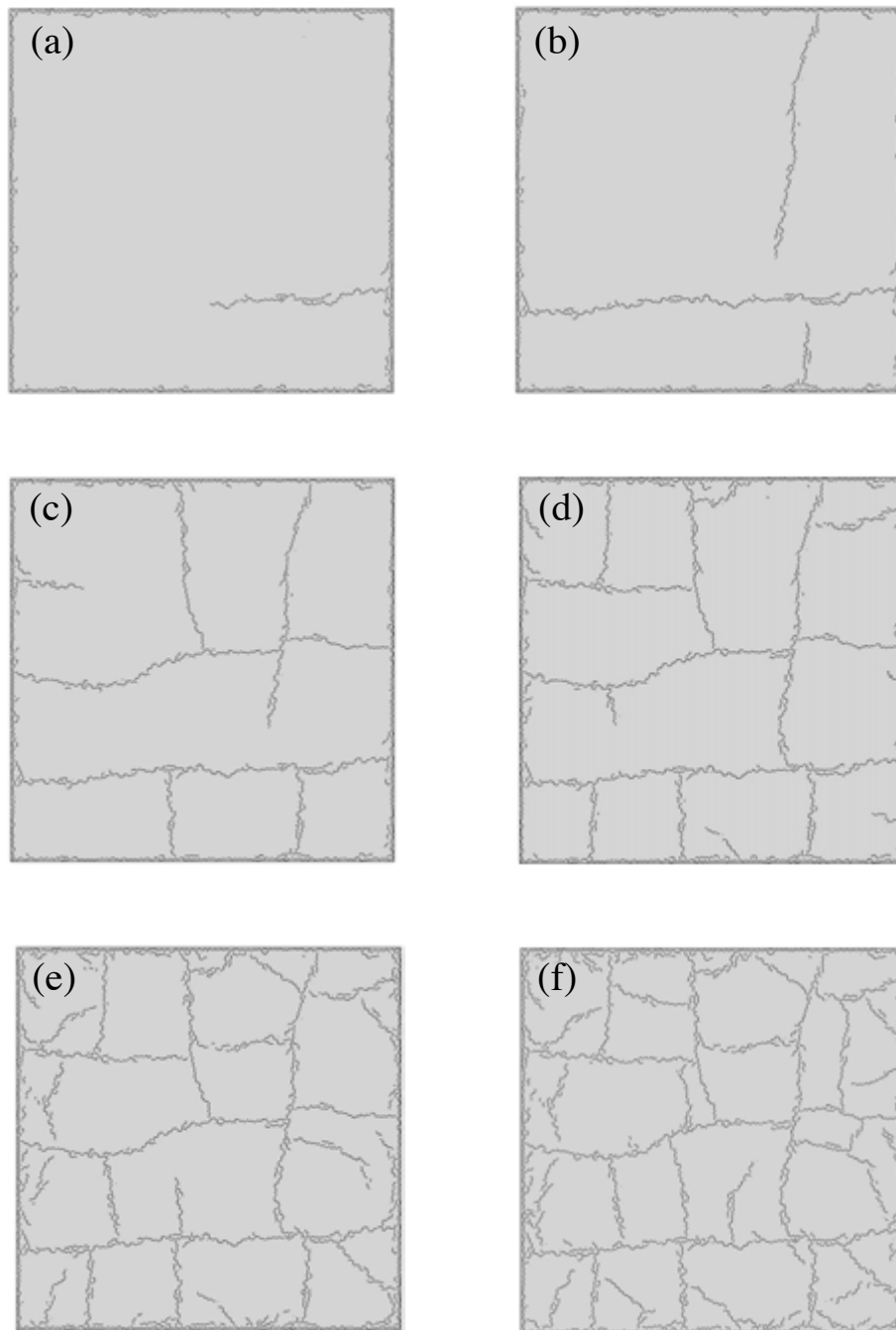


図-5.18 網目状亀裂パターンの数値解析における解析モデル上面での亀裂進展の様子.
 層厚 10 mm (model 10-3) の場合. (a)-(c) 一次亀裂による大きなセル構造の形成,
 (d), (e) 二次亀裂によるセルの分割, (f) 最終的な亀裂パターン.

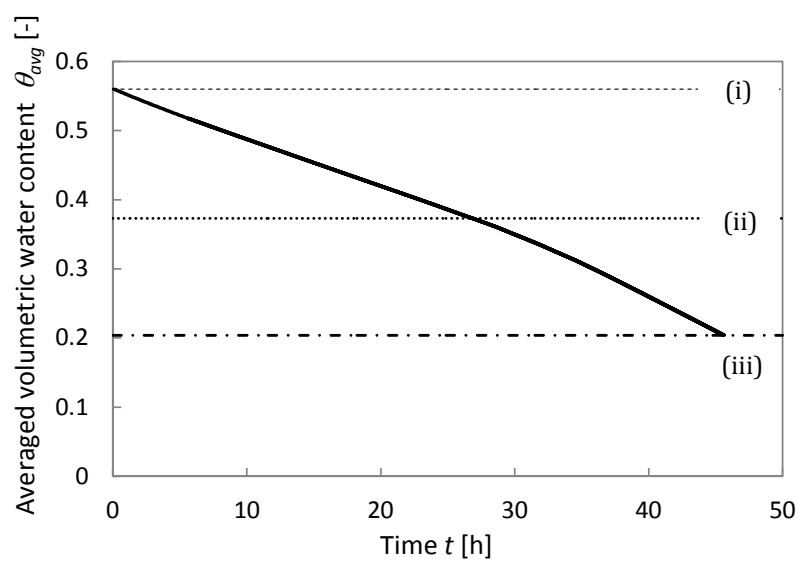


図-5.19 網目状亀裂パターンの数値解析における平均体積含水率の変化。
層厚 10 mm の場合。

- (i) 試験体表面の水分層がなくなった時点,
- (ii) 亀裂発生時, (iii) 亀裂進展終了時.

第6章 考察

6.1 層厚が応力場とセルサイズに与える影響

本節では、拡散と変形の連成にのみ着目し、問題設定を単純化して数値解析を行う。この単純化した問題設定により、亀裂によって形成される特徴的なセルサイズ（長さスケール）と層厚との間に物理的関係が生じる要因を直観的に捉えることができるようになる。

破壊を考慮せず、拡散と変形の連成にのみ着目することで単純化した問題設定は以下のようになる。表- 6.1 に示すように、厚さと横断面サイズが異なる複数の直方体領域を考える。図- 6.1 は、これらの解析領域に対する共通の模式図を、対応する座標系および境界条件とともに示している。図- 6.1 に示すように、直方体解析領域の底面の変位は拘束されており、他の境界面の変位は拘束されていない。また、水分の蒸発は上面からのみ起こるものとし、他の境界面は蒸発のない flux-free 境界として設定する。このような問題設定により、「底面の変位拘束と上面からの水分蒸発によって、破壊がない直方体状試験体内に蓄積される応力」を捉えることができる。この底面の変位拘束と上面からの蒸発による応力の蓄積は、乾燥亀裂の発生の最も基本的なメカニズムである。

以上の問題設定のもと、表- 6.1 に示すモデルについて拡散と変形の連成解析を行うことで、解析領域内の応力場の変化を得る。パラメータは、表- 5.2 に示す網目状亀裂パターンに関する解析と同様のものを用いる。この解析により、領域サイズ（i.e., 層の厚さと横断面サイズ）が、水分拡散による応力の発現に与える影響を評価することができる。

まず、横断面サイズが $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ で層厚が異なるモデル（表- 6.1 の model 1 - model 4）における解析結果を比較することで、層厚がモデル内に蓄積される応力に対して与える影響を評価する。蒸発はモデル上面に限定されているため、水分分布とそれに対応した乾燥収縮量は xy -平面内において均一となる。また、式 (2.6) に示すように、乾燥収縮ひずみ ϵ^s は体積成分のみをもつ。したがって、この問題においては、 xy -平面内での直応力成分 σ_{xx} を応力度の指標として用いることができる。

表-6.1 各解析モデルの厚さと横断面サイズ

L	T	Model No.	要素数	節点数
100 mm	5 mm	model 1	160,732	32,802
	10 mm	model 2	278,337	51,726
	20 mm	model 3	309,509	55,304
	30 mm	model 4	347,551	61,146
50 mm	5 mm	model 5	68,724	13,949
	10 mm	model 6	90,259	17,120
25 mm	5 mm	model 7	18,868	3,964
	10 mm	model 8	23,156	4,578
12.5 mm	5 mm	model 9	4,571	1,042

この問題における典型的な体積含水率の分布とそれに対応した xz -平面内での直応力成分 σ_{xx} の分布を図- 6.2 に示す。ここでは、例として $L = 100$ mm, $T = 10$ mm のモデルの $y = 0$ 平面（図- 6.1 の座標系の定義に従う）における分布を示す。底面の変位拘束がない場合には、図- 6.2 (a) の水分分布によって、図- 6.3 (a) のように試験体を曲げるような乾燥収縮ひずみ場が形成される。しかし、実際には底面の変位は拘束されているため、図- 6.3 (b) に示すように、試験体の底面は引き伸ばされつつ元の平面に向けて曲げ返される。つまり、この問題設定における試験体は、乾燥による収縮ひずみ場に反して「たわみに対して逆に作用する曲げ」と「底面の引き伸ばし」を受けるディープビームとみなすことができる。また、試験体上面の中心は、梁の引き伸ばされている側のスパン中心に対応しており、試験体内で最も強い引張力を受ける点である。このことは、図- 6.2 (b) に示す σ_{xx} の分布からもわかる。したがって、試験体上面の中心（図- 6.1 に示す座標系の原点 O ）における σ_{xx} を、この問題での応力度の指標とする。

図- 6.4 に、横断面が 100 mm \times 100 mm のモデルにおける応力度の体積含水率に対する変化を示す。この図内の応力度（試験体上面の中心における σ_{xx} ）は、引張強度（表- 5.2 における t_c ）によって正規化されている。層厚が異なるモデル同士を比較すると、応力度は層厚の増加にしたがい減少することが分かる。また、厚さが 5 mm と 10 mm (i.e., 比較的薄い層) のモデルにおける応力度は、互いに非常に

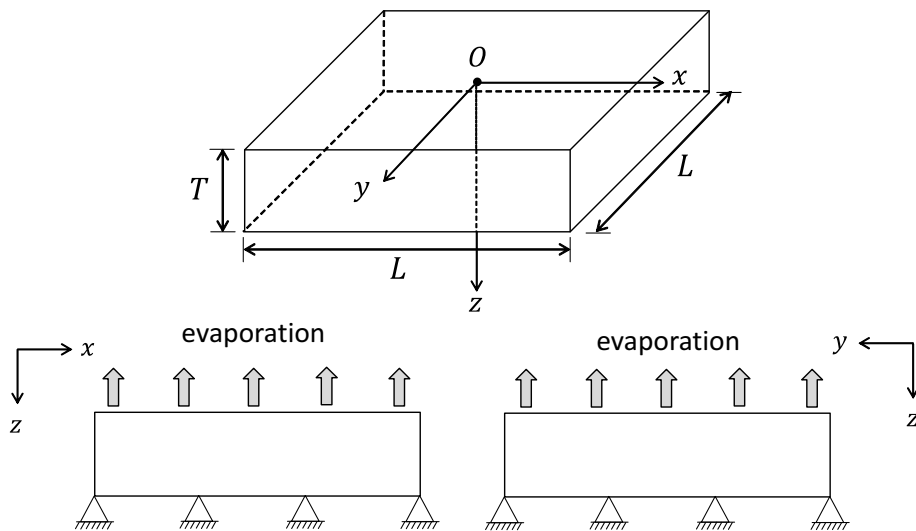


図-6.1 単純化した問題設定下での数値解析における解析領域と境界条件.

近い値をとり、どちらも体積含水率の減少に対し線形に増加する。これらのモデルでは、上面に与えられた Neumann 境界条件から導出される拡散長 ($D/\bar{w} \simeq 40 \text{ mm}$) に比べ層厚が十分に小さいため、鉛直方向の水分分布はほぼ一定と見なすことができ、この水分分布に対応した乾燥収縮量もモデルの厚さ全体を通じてほぼ一定となる。したがって、試験体の層厚が拡散長に対し十分小さく、薄層試験体とみなせる場合には、底面の変位拘束と試験体の収縮とのずれが、上面の応力蓄積に寄与する唯一の要因となる。つまり、薄層試験体における拡散長は、拡散と変形の連成によって形成される応力場の支配的な長さスケールにはなり得ない。これが、厚さが 5 mm と 10 mm の薄層モデルにおける応力度が、体積含水率の変化に対し似た挙動を示す理由である。

一方で、層が厚い（層厚が拡散長に近い値をとる）モデルでは、底面の変位拘束が上面の応力場を与える影響は小さくなり、代わりに、鉛直方向の水分分布の変化が上面の応力場の決定に対し重要な役割を果たすようになる。このことは、図- 6.4 に示す厚さ 30 mm のモデルのプロットからも分かる。図- 6.5 は、この問題設定における鉛直方向の水分分布の形状を模式的に表したものである。初期段階において、二次関数的な分布形状は、その一端が底面に到達するまで変化していく（図- 6.5 (a)-(c)：過渡状態）。その後、鉛直方向の水分分布は定常状態となり、その分布形状を維持したまま水平方向に移動し、全体の水分量が減少していく（図- 6.5 (c)-(e)）。図- 6.4 の厚さ 30 mm のモデルのプロットにおいて、体積含水率の減少に従い応力が増加傾向を示す段階は、鉛直方向の水分分布形状が過渡状態（図- 6.5 (a)-(c)）にある段階に対応する。一方で、図- 6.4 の厚さ 30 mm のモデルのプロットの収束段階は、鉛直方向の

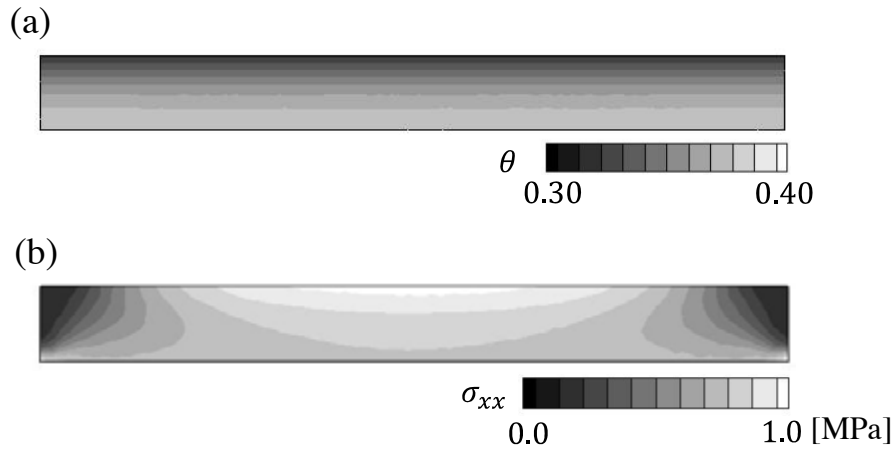


図-6.2 典型的な体積含水率の分布と対応した xz -平面内での直応力成分 σ_{xx} の分布.

$L = 100 \text{ mm}$, $T = 10 \text{ mm}$ のモデルにおける $y = 0$ 平面.

(a) 体積含水率の分布, (b) σ_{xx} の分布.

水分分布形状が定常状態 (図- 6.5 (c)-(e)) にある段階に対応する. この収束段階では, 水分量の減少に伴い試験体全体が収縮しているにも関わらず上面の応力は増加していない. このことから, 厚層試験体では, 底面の変位拘束が上面の応力蓄積に対し与える影響は非常に小さく, 拡散長 (D/\bar{w}) が上面の応力場に関する支配的な長さスケールになるということができる.

次に, 横断面サイズが異なるモデル (表- 6.1 の model 1, 2, 5 - 9) における解析結果を比較することによって, セルの分割が応力度に対し与える影響を考察する. 最初に, 厚さを 5 mm に固定したモデルの組 (表- 6.1 の model 1, 5, 7, 9) を考える. 図- 6.6 に, 厚さ 5 mm のモデルにおける応力度の体積含水率に対する変化を示す. この図内の応力度 (試験体上面の中心における σ_{xx}) は, 引張強度 (表- 5.2 における t_c) によって正規化されている. さらに, 厚さを 10 mm に固定したモデルの組 (表- 6.1 の model 2, 6, 8) を考え, それらのモデルにおける正規化された応力度の体積含水率に対する変化を図- 6.7 に示す.

図- 6.6 と図- 6.7 において, 層厚に関わらず, モデルの横断面サイズの減少にしたがい応力度が減少していることが分かる. つまり, セルの分割によるセル横断面のサイズ減少は, セル内の応力度を低下させる. 図- 6.8 に, 厚さ 10 mm で横断面サイズが異なるモデルにおいて, 体積含水率が 0.30 の時点での応力分布 (図- 6.1 における $y = 0$ 平面での σ_{xx} の分布) を示す. この図から, モデル側面の自由境界付近では応力の増加が少なく, 横断面サイズの減少に伴いこの自由境界の影響が上面の中心付近にまで

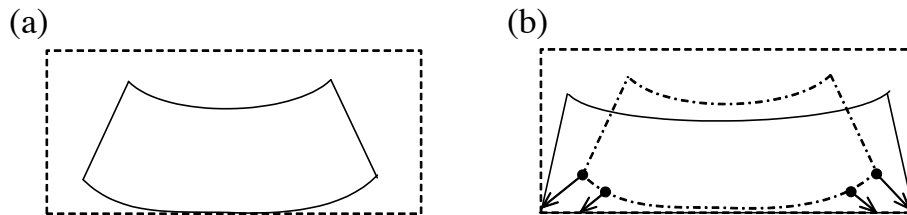


図-6.3 「たわみに対して逆に作用する曲げ」と「底面の引き伸ばし」を受けているディープビーム.

及ぶようになることが分かる. これが, セルの分割によって応力が減少するメカニズムである.

以上に示した, 拡散と変形の連成にのみ着目した解析の結果により, 試験体の層厚と横断面サイズは, 底面の変位拘束と上面からの蒸発によって生じる応力の強度に大きな影響を与えることが分かる. 図- 6.4 に示した層厚の増加に伴う応力の減少傾向, および図- 6.6, 6.7, 6.8 に示したセルの分割に伴う応力減少が, 乾燥亀裂パターンにおいて層厚に応じた特徴的な長さスケールが形成される主な物理的要因であると考えられる.

しかしながら, 図- 6.8 に示した応力分布 (セルの境界付近の応力度がセルの中心付近に比べて低い) に反し, 実験ではセルの境界から新たな亀裂が発生する. したがって, 本節で示した, 底面の変位拘束と上面からの均一な蒸発による応力発生メカニズムだけでは実験事実を十分に説明できておらず, セルの境界付近で引張応力を増加させるような他のメカニズムが存在するはずである. 本論文では, このようなセルの境界付近での応力増加に対し, セルの形成過程における亀裂面からの蒸発が重要な役割を果たしていると考えた. 次節で, 亀裂面からの蒸発が与える影響に関して詳細な議論を行う.

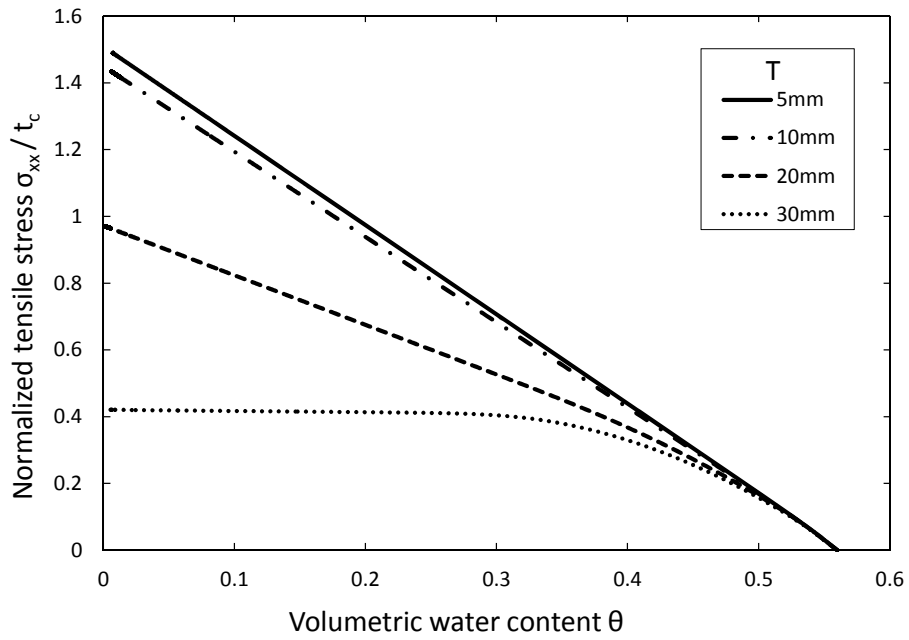


図-6.4 $L = 100$ mm で厚さが異なるモデルにおける体積含水率と応力度の関係.

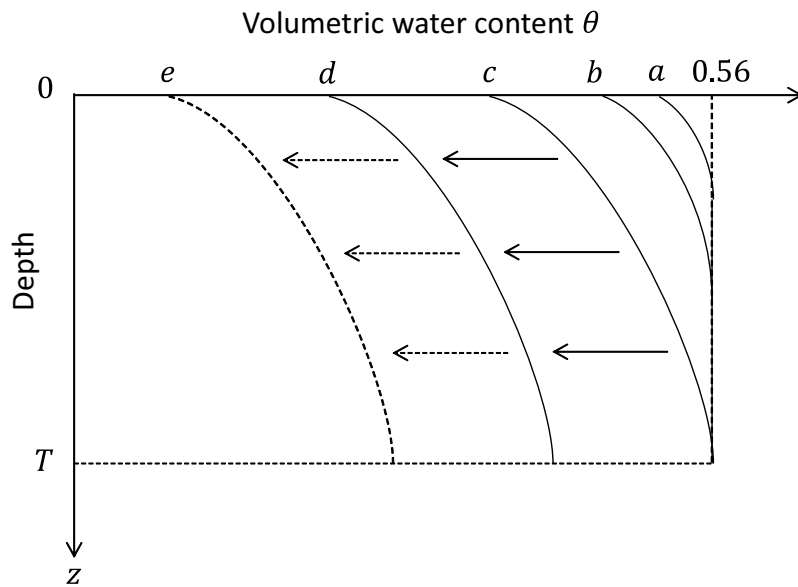


図-6.5 単純化された問題設定における鉛直方向の水分分布形状の模式図.

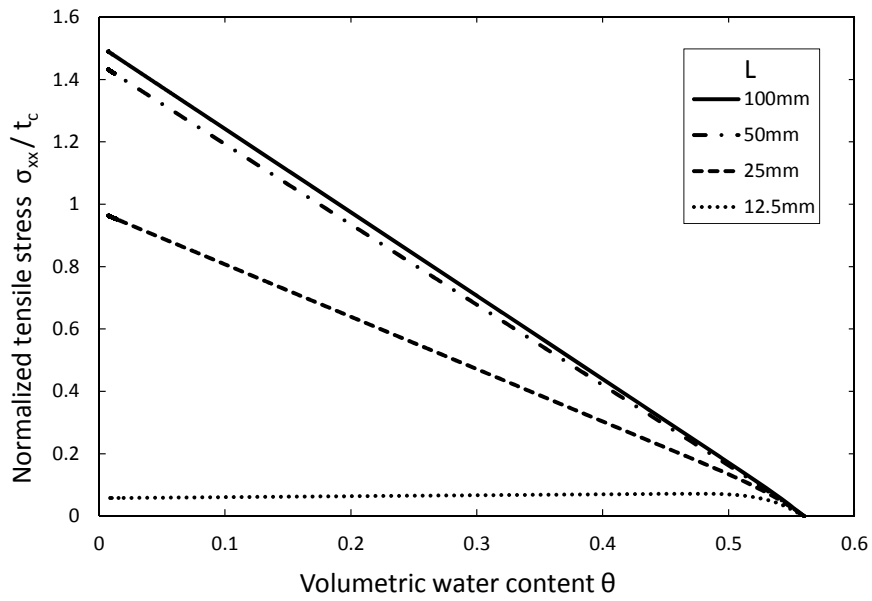


図-6.6 $T = 5 \text{ mm}$ で L が異なるモデルにおける，体積含水率に対する応力度の変化.

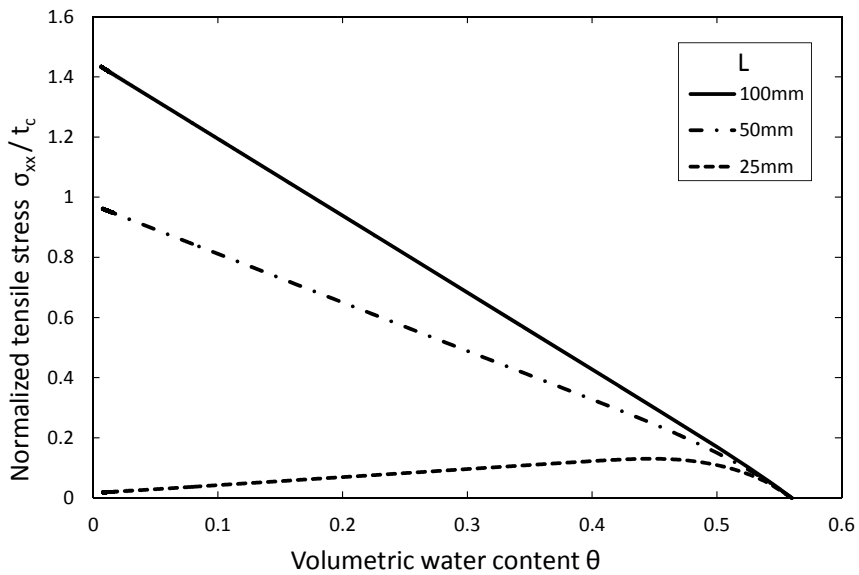


図-6.7 $T = 10 \text{ mm}$ で L が異なるモデルにおける，体積含水率に対する応力度の変化.

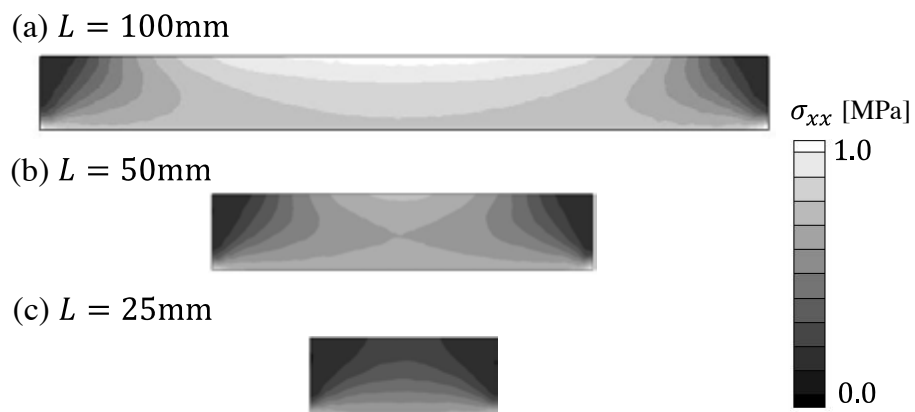


図-6.8 $T = 10\text{mm}$ で L が異なるモデルにおける応力分布 (図- 6.1 における $y = 0$ 平面) .

6.2 亀裂面からの蒸発が応力場とセルサイズに与える影響

乾燥破壊現象に対する既存の数値解析モデルの多くは、モデルを単純化するために亀裂面からの蒸発は無視できるものと仮定していた^{34,36,37,50,51,57-59}。先行研究における乾燥破壊実験では、試験体全体で平均化された水分蒸発速度は亀裂面の成長にほぼ影響されないとするデータを示しているものもあり^{14,58,60}、亀裂面からの蒸発は無視できるとする仮定の妥当性を示す根拠となっている。一方で、亀裂面の形成は蒸発速度に大きな影響を与えるとする実験データもあり²⁰、実験事実に基づいて亀裂面からの蒸発を無視することの妥当性を検証することは難しい。

しかしながら、乾燥破壊現象における亀裂開口幅は小さく、亀裂開口部における蒸気の飽和度は高いことから、亀裂面からの蒸発量は自由境界面に比べ少ないと考えられる。また、亀裂面の総面積は自由境界面に比べて小さいことを踏まえると、「試験体全体で平均化された蒸発量」に対して亀裂面からの蒸発の影響を無視することは十分に妥当であるといえる。実際、網目状亀裂パターンの数値解析における平均体積含水率の変化（図- 5.19）および、炭酸カルシウムを用いた乾燥破壊実験における平均体積含水率の変化（図- 5.9）では、亀裂面の形成後も体積含水率の減少量に変化はない。しかし、局所的な応力場は、たとえ蒸発量は少なくとも、亀裂面からの蒸発によって強い影響を受ける。つまり、亀裂先端や亀裂面近傍では、亀裂面からの蒸発によって収縮ひずみに空間勾配が生じ、応力の強さと分布が大きく変化する。本節では、セルの形成過程における体積含水率の分布を分析することで、亀裂面からの蒸発が応力場に与える影響に関して考察を行い、亀裂面からの蒸発が亀裂パターン形成に対して果たす役割を明らかにする。

図- 6.9 に、図- 5.18 の各時点での亀裂パターンに対応した試験体上面での体積含水率 θ の分布を示す。乾燥が進むにつれて体積含水率 θ の平均が下がっていくため、ここではコンターの幅を体積含水率の差で 0.05 に統一し、 θ の減少に伴いコンターの下限值 θ_{min} を変化させることで、各時点での分布の違いだけを抽出した。体積含水率（とそれに対応した乾燥収縮ひずみ）は、セル境界（i.e., 亀裂面）からの蒸発によって各セル内で同心円状の分布を形成する。つまり、各セルの中心部では体積含水率 θ が高くなり、セルの境界に向かって減少していく。この同心円状の体積含水率の分布により、半径方向に向けて増加する同心円状の乾燥収縮ひずみ場が形成される。この乾燥収縮ひずみ場は、セルの中心付近に比べセル境界付近の方が大きく収縮することを示しており、半径方向に向けて増加する同心円状のフープ応力場を形成する⁸⁴。このフープ応力は、同心円状の水分分布の円周方向に働く引張応力で、セル境界に働くフープ応力の強さは、セル中心とセル境界の収縮量の差によって決定される。したがって、最大

フープ応力度はセルのサイズと体積含水率の空間勾配に依存する。

過剰なフープ応力場は、セル境界から発生しセル中心に向けて進展する亀裂を形成する。図- 6.9 (a), (c), (d) の赤い円内に示すように、すでに形成されたセルはセル境界からセル中心に向かう亀裂によって分割されていく。このセル分割の過程は、炭酸カルシウムの乾燥実験における観察事実と一致する。つまり、亀裂面からの蒸発は、対応した乾燥収縮ひずみがモード I 亀裂の開口を促進するという意味において、亀裂先端の応力場に対し正のフィードバック効果をもつといえる。このフィードバック効果は乾燥亀裂の安定的な成長を促す。

本節での議論および前節に述べた層厚に関する議論から、乾燥破壊現象における応力場の発生要因は、「境界面の変位拘束と試験体全体の収縮のずれ」と「不均一な水分分布に伴う乾燥収縮ひずみの空間勾配」であるといえることができる。また、乾燥破壊現象における応力（ひずみエネルギー）の解放は、亀裂によるセル分割によって行われ、最大引張応力が材料強度を下回るまでセルの分割が繰り返される。このとき、セル分割の分割形状（亀裂経路）の決定に重要な役割を果たすのが、亀裂面からの蒸発である。以上のような段階的かつ階層的な応力解放過程によって、最終的に特徴的な長さスケールをもつ亀裂パターンが形成されると考えることができる。

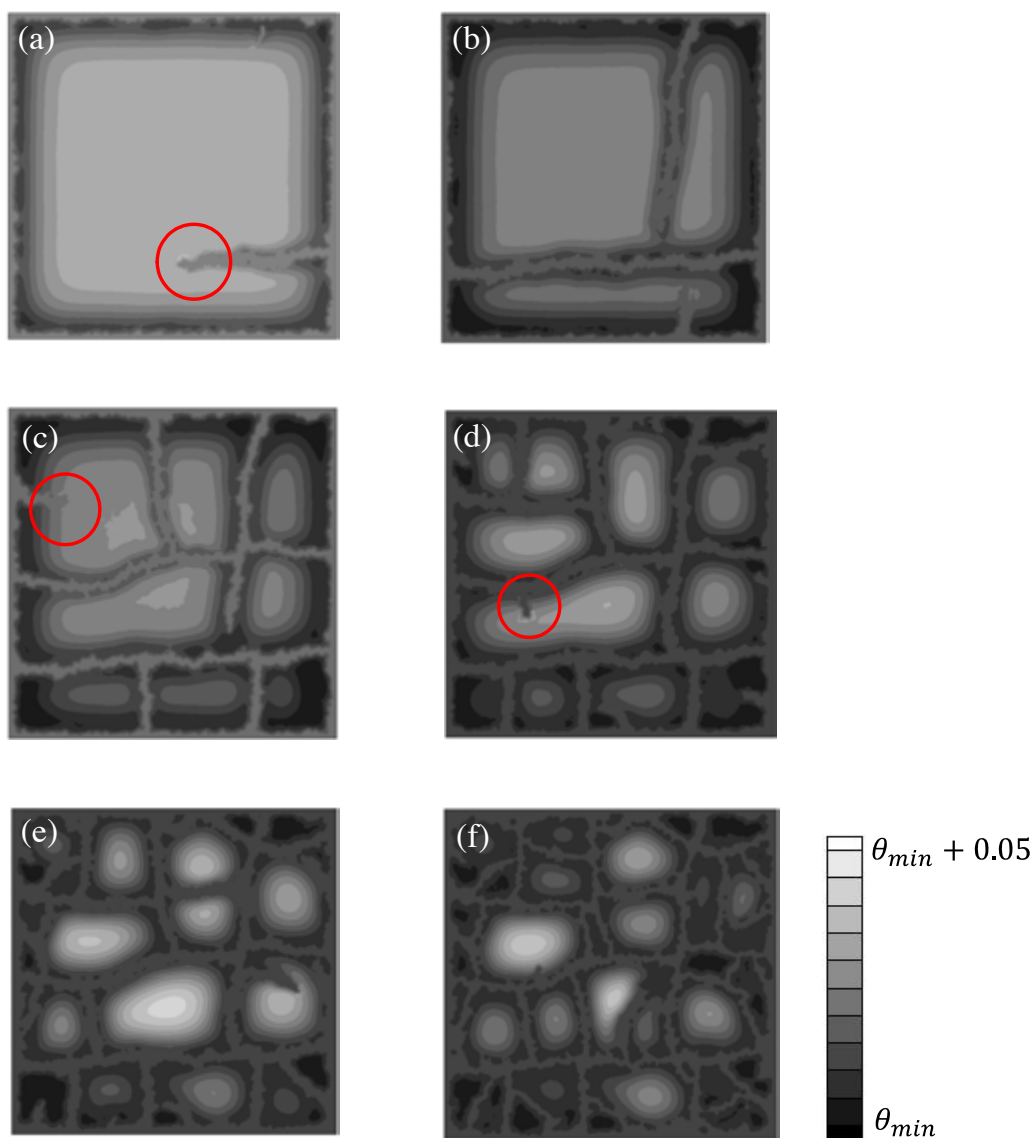


図-6.9 図- 5.18 の各時点での亀裂パターンに対応した試験体上面での体積含水率 θ の分布.

(a) $\theta_{min} = 0.30$, (b) $\theta_{min} = 0.29$, (c) $\theta_{min} = 0.28$, (d) $\theta_{min} = 0.27$, (e) $\theta_{min} = 0.25$,

(f) $\theta_{min} = 0.19$.

第7章 結論

本論文では、乾燥破壊現象を、材料内の水分拡散、材料の変形、材料の破壊という3つのファンダメンタルな物理現象から成り立つマルチフィジックスの問題であると考え、乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の問題に対し、拡散・変形・破壊の連成モデルを提案した。

本研究の連成モデルは、領域内の水分拡散係数が一定で水分移動における重力項の影響が無視できるような比較的薄い材料を、等方的な透水性をもつ均質線形弾性体としてモデル化することで構成されている。連成モデルの全ての面 (i.e., 材料の力学的性質, 初期水分分布, 境界条件, 解析領域の幾何形状) において恣意的な長さスケールは一切導入していないにも関わらず、この連成モデルに基づいた数値解析では、乾燥亀裂パターンの基本的な特徴 (i.e., 亀裂の網目状構造, 特徴的な長さスケールをもつ多角形セルの形成, 層厚に応じた特徴的な長さスケールの変化) とその形成過程を再現することができた。これらの結果を炭酸カルシウムによる乾燥実験の結果と比較したところ、亀裂パターンの具体的な形状 (i.e., 個々のセルの形, 各亀裂の進展経路) は異なるが、亀裂の網目状構造とその形成過程の定性的傾向および亀裂パターンの特徴的な長さスケール (i.e., セルサイズ) は良好に一致した。このことから提案したモデルおよび数値解析手法は、特徴的な長さスケールをもつ亀裂パターンとその時空間階層構造が、完全に均質な初期状態から創発される過程を再現するための基本的な仕組みを有しているといえる。

さらに、領域サイズと亀裂面からの蒸発が応力場に対して与える影響に着目し、特徴的な長さスケールをもつ多角形セルが自発的に形成される物理的要因に関して考察を行った。本論文では、応力の発現に対し試験体の層厚と横断面サイズが与える影響を捉えるため、拡散と変形の連成に主眼をおくことで問題設定を単純化した数値解析を行った。この数値解析によって、層厚の増加とセルの分割が (試験体底面の変位拘束と上面からの蒸発によって蓄積される) 応力度を低減させることを示した。また、数値解析によって得られたセルの形成過程における水分分布を検証することで、亀裂面からの蒸発による同心円状の水分分布が各セルにおいてフープ応力を発生させていることを明らかにした。このフープ応力は、亀裂経路の決定において重要な役割を果たしている。したがって、乾燥による不均一な体積収縮 (収

縮みずみの空間勾配)の等価介在力が亀裂の駆動力であり、セル分割による応力の低減・解放プロセスが特徴的な長さスケールをもつ亀裂パターンを形成するということができる。

以上の数値解析結果および考察から、特徴的な長さスケールをもつ多角形セルの自発的形成に関する支配的要因は拡散・変形・破壊の連成にあると結論づけることができる。よって、「複数の物理現象の連成が特徴的な長さスケールを決定する」という本論文で提案した仮説の妥当性が、その長さスケールが創発する過程も含めて示されたといえる。現象を構成する個々の支配方程式 (i.e., 拡散方程式と力のつりあい式) がスケール不変性をもつことを踏まえると、この結論は「スケール不変性をもつ支配方程式の相互作用によって均質な場から特徴的な長さスケールを決定できる」ことを意味している。これが、乾燥破壊現象における亀裂パターン形成の背後に存在する共通の支配法則である。

また、本研究では、提案した連成モデルを数値解析で扱うにあたり、PDS-FEMの乾燥収縮を伴う場への拡張と、破壊面の影響を拡散場へマッピングする手法の開発を行った。PDS-FEMの乾燥収縮を伴う場への拡張では、不均一な非弾性変形の等価介在力とその等価介在力によって生じる弾性変形の評価方法を提案することで、材料の弾性変形と破壊による不連続な変位場を扱うための数値解析手法であったPDS-FEMを、弾性変形と非弾性変形が混在する場における破壊現象へと適用することを可能にした。さらに、PDS-FEMと有限要素法による強連成解析と弱連成解析を使い分けることで、拡散と破壊という、時定数に10桁以上の開きがある物理現象の連成を実現した。これらの数値解析手法は、乾燥収縮のみならず熱膨張/収縮を伴う場や他のマルチフィジックスの問題にも適用できるものであり、コンクリート材料や物理強化ガラス、溶岩の冷却過程で生じる柱状節理における亀裂パターンも同様の手法によって解析できると考えられる。

本研究の今後の課題は、他の様々な材料・条件における乾燥亀裂パターンに関して実験および数値解析を行うとともに、境界面の影響がない理想的な無限領域において創発される長さスケールに関して理論的な考察を行うことで、乾燥亀裂パターンの長さスケールを支配するパラメータの比率を決定することである。これを踏まえ、本論文で示したパターン形成の支配法則を他のマルチフィジックスおよびパターン形成の問題にも適用できる一般的な方法論へと拡張することが本研究の最終的な課題である。

付録

A.1 拡散に関する初期値境界値問題の離散形式の導出

式 (2.3a) に仮想変分 $\delta\theta$ をかけて、 Ω で全体積分すると、

$$\int_{\Omega} \delta\theta\dot{\theta}dV = \int_{\Omega} \delta\theta(D\nabla^2\theta)dV \quad \forall\delta\theta \quad (\text{A.1})$$

となり、これに Gauss の発散定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\delta\theta\dot{\theta} + D\nabla\delta\theta\nabla\theta) dV &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (D\delta\theta\nabla\theta) dV \\ &= \int_{\partial\Omega} \delta\theta D \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} dS + \int_{\Gamma} \delta\theta D \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} dS \\ &= - \left(\int_{\partial\Omega^w} \delta\theta \bar{w} dS + \int_{\Gamma} \delta\theta \bar{v} dS \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。領域 Ω が Delaunay 四面体 Ψ^β で分割されているとして各領域を足し合わせると、

$$\sum_{\beta=1}^M \int_{\Psi^\beta} (\delta\theta\dot{\theta} + D\nabla\delta\theta\nabla\theta) dV = - \left(\sum_{\beta=1}^M \int_{\partial\hat{\Omega}^w \cap \Psi^\beta} \delta\theta \bar{w} dS + \sum_{\beta=1}^M \int_{\Gamma' \cap \Psi^\beta} \delta\theta \bar{v} dS \right) \quad (\text{A.3})$$

となる。

式 (A.3) にガラーキン法を適用すると、 θ , $\delta\theta$, \bar{w} , \bar{v} は四面体一次要素における形状関数 $\mathbf{N}^{\beta\alpha}$ を用

いて β 番目の要素内で次のように離散化される.

$$\theta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha} \theta^\alpha \quad (\text{A.4})$$

$$\delta\theta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha} \delta\theta^\alpha \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{w} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha} \bar{w}^\alpha \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{v} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}^{\beta\alpha} \bar{v}^\alpha \quad (\text{A.7})$$

よって, 式 (A.3) は次のように変形できる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^M \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \int_{\Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dV \delta\theta^\alpha \dot{\theta}^\gamma \right) + \sum_{\beta=1}^M \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \int_{\Psi^\beta} D^\beta (\nabla \mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \nabla \mathbf{N}^{\beta\gamma} dV \delta\theta^\alpha \theta^\gamma \right) \\ &= - \sum_{\beta=1}^M \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \int_{\partial\hat{\Omega}^w \cap \Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dS \delta\theta^\alpha \bar{w}^\gamma \right) - \sum_{\beta=1}^M \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \int_{\Gamma' \cap \Psi^\beta} (\mathbf{N}^{\beta\alpha})^T \mathbf{N}^{\beta\gamma} dS \delta\theta^\alpha \bar{v}^\gamma \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{M}^{\alpha\gamma} \dot{\theta}^\gamma) \delta\theta^\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{A}^{\alpha\gamma} \theta^\gamma) \delta\theta^\alpha = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{W}^{\alpha\gamma} \bar{w}^\gamma) \delta\theta^\alpha - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{V}^{\alpha\gamma} \bar{v}^\gamma) \delta\theta^\alpha \\ &\Leftrightarrow \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{M}^{\alpha\gamma} \dot{\theta}^\gamma + \mathbf{A}^{\alpha\gamma} \theta^\gamma) = - \sum_{\gamma=1}^N (\mathbf{W}^{\alpha\gamma} \bar{w}^\gamma + \mathbf{V}^{\alpha\gamma} \bar{v}^\gamma) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となり, 式 (2.31a) に帰着する.

A.2 PDS-FEMにおける破壊パターン

Delaunay 四面体要素は 4 つの Voronoi ブロックから構成されており，Voronoi ブロックの母点と Delaunay 四面体の頂点が一致する．また，Delaunay 四面体内の Voronoi ブロック境界面は，図- A.1 に示すように 6 面存在する．PDS-FEM では Voronoi ブロック Φ^α がそれぞれ剛体変位し，破壊面は Voronoi ブロックの境界面となる．本論文では，要素の複数回破壊は考慮しない．つまり，一度破壊された要素がさらに破壊されることはないとする．このとき，破壊パターンは 1 つの Voronoi ブロックが他の 3 つのブロックから分離するパターンと，2 つずつの Voronoi ブロックに分離するパターンに分けられる．ここでは前者をパターン 1，後者をパターン 2 とする．ある Delaunay 四面体が 4 つの Voronoi ブロック A,B,C,D から構成されているとすると，パターン 1 では A と BCD，B と ACD，C と ABD，D と ABC の 4 組，パターン 2 では AB と CD，AC と BD，AD と BC の 3 組の計 7 組のブロックの組み合わせが存在する．各破壊パターンは，図- A.2 の通りである．

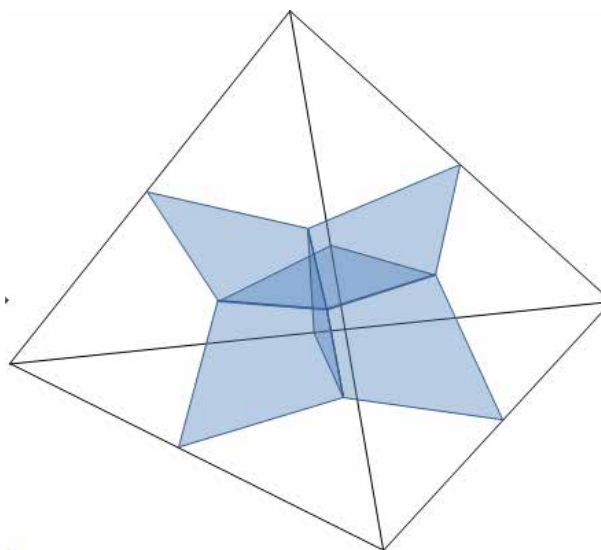
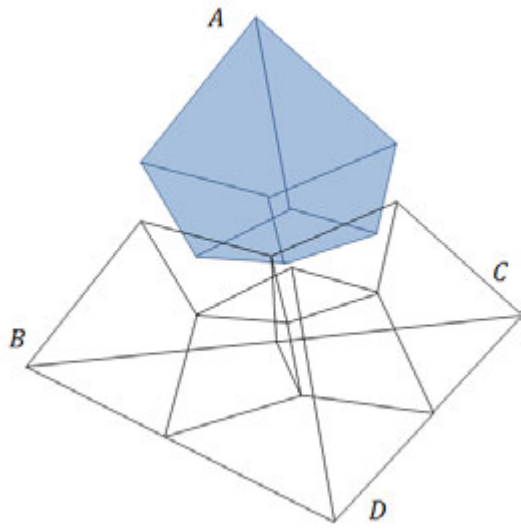
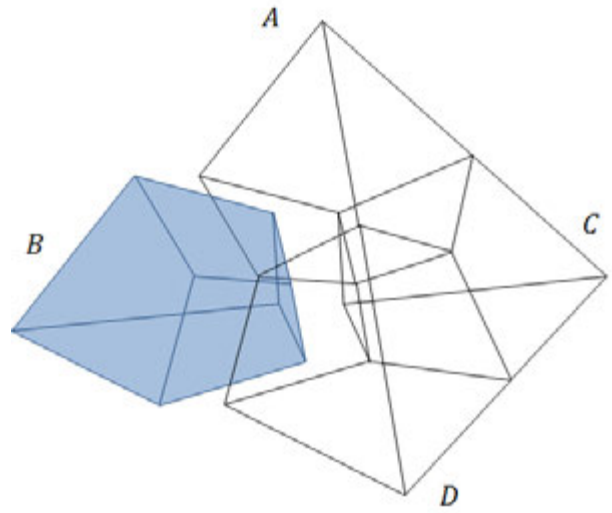


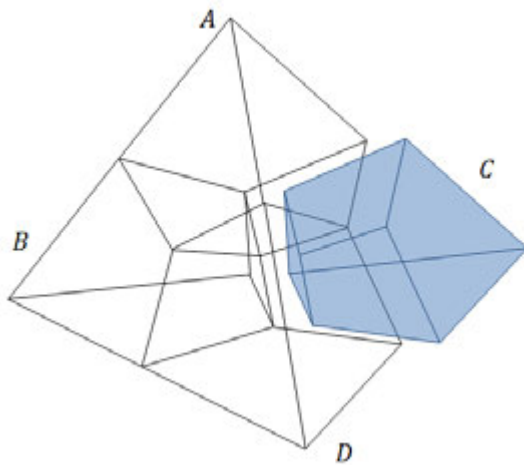
図-A.1 Voronoi ブロック境界面.



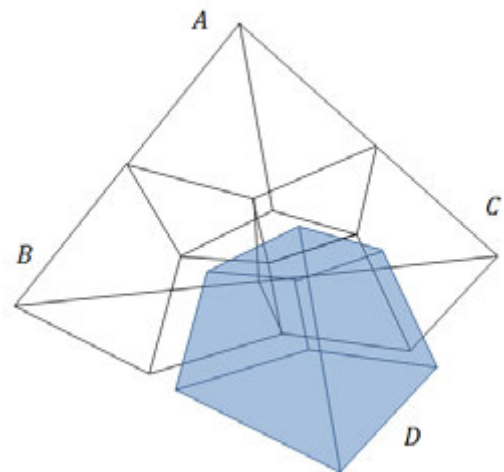
(a) パターン1 : A と BCD の組み



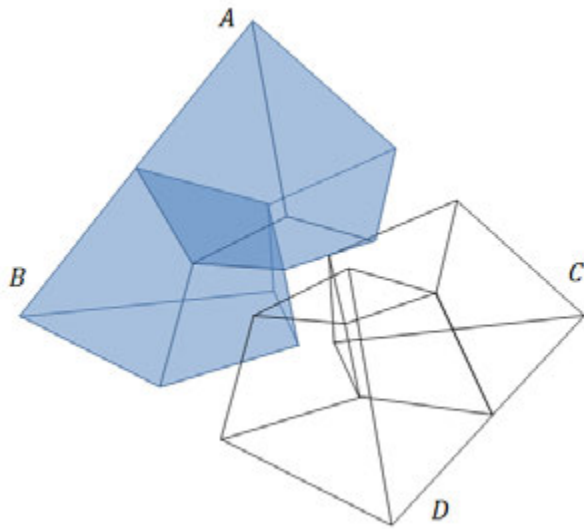
(b) パターン1 : B と ACD の組み



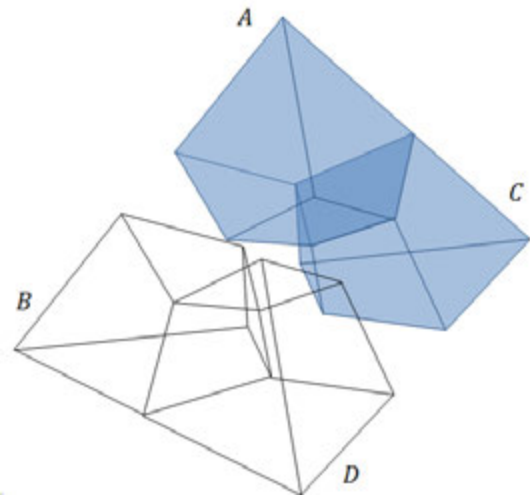
(c) パターン1 : C と ABD の組み



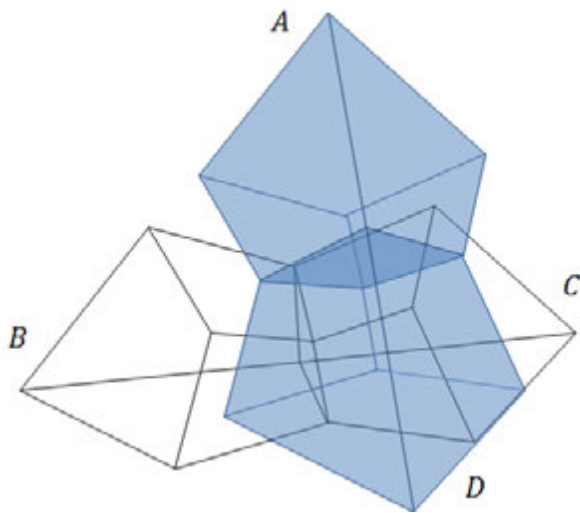
(d) パターン1 : D と ABC の組み



(e) パターン 2 : AB と CD の組み



(f) パターン 2 : AC と BD の組み



(g) パターン 2 : AD と BC の組み

図-A.2 Delaunay 四面体の破壊パターン.

A.3 破壊面にかかる直応力の計算

A.2 で述べた 7 つの組み合わせのうち、どの組み合わせで破壊するかを判定するためには、全破壊パターンにおける破壊面の直応力を計算し、直応力が最大となる破壊パターンを求めなければならない。このとき、破壊パターンごとに直応力を計算するための面を 1 つに定める必要がある。

A.3.1 任意の面にかかる応力

式 (2.14) で表される応力は Delaunay 四面体内で一定である。応力が応力テンソル σ_{ij}^β で表されるとき、任意の面 S におけるトラクション t_i は、面 S の単位法線ベクトルを n_i として

$$t_i = \sigma_{ij}^\beta n_j \quad (\text{A.9})$$

と計算することが出来る。また、 S に作用する直応力の大きさ σ_n は

$$\begin{aligned} \sigma_n &= n_i t_i \\ &= \sigma_{ij}^\beta n_i n_j \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。

A.3.2 パターン 1

破壊パターン 1 の場合における直応力の計算方法について述べる。図- A.3 のように Delaunay 四面体内の Voronoi ブロック境界面を構成する点を定める。例えば図- A.2 (a) のように Voronoi ブロック A が分離する場合、破壊面は Voronoi ブロック B,C,D と Voronoi ブロック A との境界面である $pxzv$, $qvzw$, $rwzx$ の 3 面になる。そこで、直応力を計算する面を、図- A.3 の \vec{pq} , \vec{pr} で構成される面に定める。図- A.4 に示すように、 \vec{pq} , \vec{pr} で構成される面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}^{(A)}$ とすると、式 (A.10) から、この面にかかる直応力は

$$\sigma^{(A)} = n_i^{(A)} \sigma_{ij}^\beta n_j^{(A)} \quad (\text{A.11})$$

と求められる。

その他の組み合わせも同様に、Voronoi ブロック B が分離する場合には、 $\vec{p}\vec{u}$, $\vec{p}\vec{s}$ で構成される面、Voronoi ブロック C が分離する場合には、 $\vec{q}\vec{s}$, $\vec{q}\vec{t}$ で構成される面、Voronoi ブロック D が分離する場合には、 $\vec{r}\vec{u}$, $\vec{r}\vec{t}$ で構成される面を、各破壊パターンでの直応力を計算する面とする。

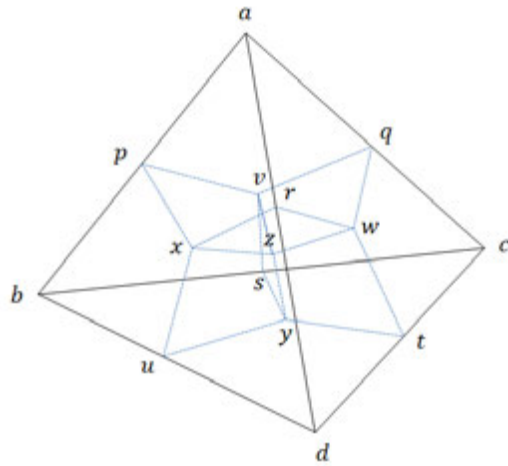


図-A.3 Voronoi ブロックの境界の頂点.

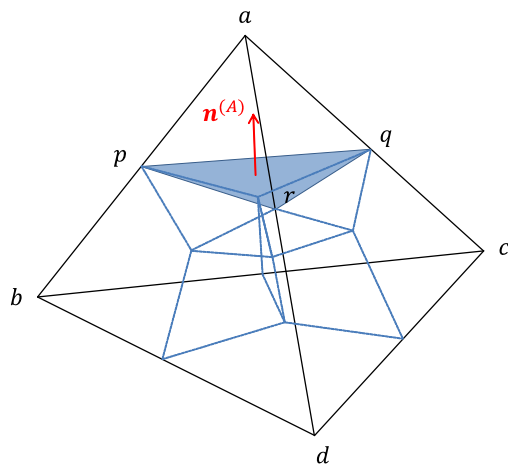


図-A.4 直応力の計算用の単位法線ベクトル.

A.3.3 パターン 2

次に破壊パターン 2 の場合における直応力の計算方法について述べる。図- A.2 (e) のように Voronoi ブロック A,C と B,D の組みで分離する場合、破壊面は図- A.3 において AB と CD の境界面である $pxzv$, $rwzx$, $syzv$, $twzy$ の 4 面になる。

このとき、直応力を計算する面には点 p, r, s, t によってできる 1 面を選びたいが、線分 pt と rs はねじれの位置にあるため、4 点は同一平面上に存在し得ない。そこで、ベクトル $\mathbf{n}_{AC,BD}$ を

$$\mathbf{n}_{AC,BD} = \vec{pt} \times \vec{rs} \quad (\text{A.12})$$

と定義すると、 $\mathbf{n}_{AC,BD}$ は \vec{pt} と \vec{rs} に直交するベクトルとなる。したがって、ベクトル $\mathbf{n}_{AC,BD}$ が法線ベクトルとなるような面を直応力を計算する面とする。

その他のブロックの組み合わせも同様に、Voronoi ブロック A,B と C,D の組みに分離する場合は $\vec{uq} \times \vec{rs}$, Voronoi ブロック A,D と B,D の組みに分離する場合は $\vec{uq} \times \vec{pt}$ のベクトルで定義される面を、各破壊パターンでの直応力を計算する面とする。

参考文献

- 1) K.B. Toga and B.E. Alaca. Junction formation during desiccation cracking. *Physical Review E*, Vol. 74, p. 021405, 2006.
- 2) S. Bohn, L. Pauchard, and Y. Couder. Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. I. Temporal and geometrical hierarchy. *Physical Review E*, Vol. 71, p. 046214, 2005a.
- 3) S. Bohn. Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. II. Form disordered to deterministic behavior. *Physical Review E*, Vol. 71, No. 4, p. 046215, 2005b.
- 4) E.M. Kindle. Some factors affecting the development of mud-cracks. *Journal of Geology*, Vol. 25, pp. 135–144, 1917.
- 5) P.H. Morris, J. Graham, and D.J. Williams. Cracking in drying soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 29, No. 2, pp. 263–277, 1992.
- 6) J.H. Li and L.M. Zhang. Study of desiccation crack initiation and development at ground surface. *Engineering and Geology*, Vol. 123, pp. 347–358, 2011.
- 7) CS. Tang, YJ. Cui, AM. Tang, and B. Shi. Experiment evidence on the temperature dependence of desiccation cracking behavior of clayey soils. *Engineering Geology*, Vol. 114, pp. 261–266, 2010.
- 8) CS. Tang, B. Shi, C. Liu, WB. Sho, and L. Gao. Experimentanl characterization of shrinkage and desiccation cracking in thin clay layer. *Applied Clay Science*, Vol. 52, pp. 69–77, 2011a.
- 9) CS. Tang, YJ. Cui, B. Shi, AM. Tang, and C. Liu. Desiccation and cracking behaviour of clay layer from slurry state under wetting drying cycles. *Geoderma*, Vol. 166, pp. 111–118, 2011b.
- 10) S. Costa, J. Kodikara, and B. Shannon. Salient factors controlling desiccation cracking of clay in laboratory experiments. *Géotechnique*, Vol. 63, No. 1, pp. 18–29, 2013.

- 11) A. Corte and A. Higashi. Experimental research on desiccation cracks in soil. Technical report, U.S. Army Snow Ice and Permafrost Research Establishment, Illinois, USA, 1960.
- 12) A. Groisman and E. Kaplan. An experimental study of cracking induced by desiccation. *Europhysics Letters*, Vol. 25, No. 6, pp. 415–420, 1994.
- 13) J.K. Kodikara, S.L. Barbour, and D.G. Fredlund. Desiccation cracking of soil layers. In *Unsaturated soils for Asia. Proceedings of the Asian Conference on Unsaturated Soils, UNSAT-ASIA 2000, Singapore, 18-19 May, 2000*, pp. 693–698, 2000.
- 14) R. Rodríguez, M. Sánchez, A. Ledesman, and A. Lloret. Experimental and numerical analysis of desiccation of mining waste. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 44, No. 6, pp. 644–658, 2007.
- 15) H. Peron, L. Laloui, T. Hueckel, and L.B. Hu. Desiccation cracking of soils. *European journal of environmental and civil engineering*, Vol. 13, No. 7-8, pp. 869–888, 2009a.
- 16) H. Nahlawi and J.K. Kodikara. Laboratory experiments on desiccation cracking of thin soil layers. *Geotechnical and Geological Engineering*, Vol. 24, pp. 1641–1664, 2006.
- 17) CS. Tang, B. Shi, C. Liu, LZ. Zhao, and BJ. Wang. Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils. *Engineering Geology*, Vol. 101, No. 3-4, pp. 204–217, 2008.
- 18) S. Kitsunzaki. Cracking condition of cohesionless porous materials in drying process. *Physical Review E*, Vol. 87, p. 052805, 2013.
- 19) K.A. Shorlin, J.R. de Bruyn, M. Graham, and S.W. Morris. Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns. *Physical Review E*, Vol. 61, No. 6, p. 6950, 2000.
- 20) H. Peron, T. Hueckel, L. Laloui, and L.B. Hu. Fundamentals of desiccation cracking of fine-grained soils: experimental characterisation and mechanisms identification. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 46, No. 10, pp. 1177–1201, 2009b.
- 21) G. Müller. Starch columns: Analog model for basalt columns. *Journal of geophysical research*, Vol. 103, No. B7, pp. 15239–15235, 1998a.

- 22) G. Müller. Experimental simulation of basalt columns. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, Vol. 86, pp. 93–96, 1998b.
- 23) R. Saliba and E.A. Jagla. Analysis of columnar joint patterns from three-dimensional stress modeling. *Journal of geophysical research*, Vol. 108, No. B10, p. B002513, 2003.
- 24) A. Toramaru and T. Matsumoto. Columnar joint morphology and cooling rate: A starch-water mixture experiment. *Journal of geophysical research*, Vol. 109, No. B2, p. B02205, 2004.
- 25) L. Goehring and S.W. Morris. Experimental investigation of the scaling of columnar joint. *Physical Review E*, Vol. 74, p. 036115, 2006.
- 26) 西本明弘, 水口毅, 狐崎創. 乾燥亀裂における柱状構造. *地質学雑誌*, Vol. 117, pp. 183–191, 2011.
- 27) N. Shokri, P. Zhou, and A. Keshmiri. Patterns of desiccation cracks in saline bentonite layers. *Transport in Porous Media*, Vol. 110, pp. 333–344, 2015.
- 28) C.J. Miller, M. Hong, and Y. Nazli. Experimental analysis of desiccation crack propagation in clay liners. *Journal of the American Water Resources Association*, Vol. 34, No. 3, pp. 677–686, 1998.
- 29) B.A. Albrecht and C.H. Benson. Effect of desiccation on compacted natural clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 127, pp. 67–75, 2001.
- 30) V.Y. Chertkov and I. Ravina. Modeling the crack network of swelling clay soils. *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 62, No. 5, pp. 1162–1171, 1998.
- 31) V.Y. Chertkov. Modelling cracking stages of saturated soils as they dry and shrink. *European Journal of Soil Science*, Vol. 53, pp. 105–118, 2002.
- 32) H.J. Vogel, H. Hoffmann, and K. Roth. Studies of crack dynamics in clay soil: I. Experimental methods, result, and morphological quantification. *Geoderma*, Vol. 125, pp. 203–211, 2005a.
- 33) M. Sanchez, A. Atique, and S. Kim. Exploring desiccation cracks in soils using a 2D profile laser device. *Acta Geotechnica*, Vol. 8, pp. 583–596, 2013.
- 34) G. Deng and ZJ. Shen. Numerical simulation of crack formation process in clays during drying and wetting. *Geomechanics and Geoengeering: An International Journal*, Vol. 1, No. 1, pp. 27–41, 2006.

- 35) K. Leung and Z. Néda. Criticality and pattern formation in fracture by residual stresses. *Physical Review E*, Vol. 82, p. 046118, 2010.
- 36) A.L. Amarasiri, J.K. Kodikara, and S. Costa. Numerical modelling of desiccation cracking. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 35, pp. 82–96, 2011.
- 37) H. Trabelsi, M. Jamei, H. Zenzri, and S. Olivella. Crack patterns in clayey soils: Experiments and modeling. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 36, pp. 1410–1433, 2012.
- 38) S. Ito and S. Yukawa. Dynamic scaling of fragment distribution in drying paste. *Physical Review E*, Vol. 90, p. 042909, 2014.
- 39) L. Goehring, A. Nakahara, T. Dutta, S. Kitsunozaki, and S. Tarafdar. *Desiccation Cracks and their Patterns: Formation and Modelling in Science and Nature*. Wiley-VCH, 2015.
- 40) S. Ziegler, D. Leshchinsky, H. Ling, and E. Perry. Effect of short polymeric fibers on crack development in clays. *Soils and Foundations*, Vol. 38, pp. 247–253, 1998.
- 41) H. Colina, L. de Arcangelis, and S. Roux. Model for surface cracking. *Physical Review B*, Vol. 48, pp. 3666–3667, 1993.
- 42) M.J. Alava, P.K.V.V. Nukala, and S. Zapperi. Statistical models of fracture. *Advances in Physics*, Vol. 55, pp. 349–476, 2006.
- 43) P. Meakin. A simple model for elastic fracture in thin films. *Thin Solid Films*, Vol. 151, pp. 165–190, 1987.
- 44) M. Sahimi and S. Arbabi. Mechanics of disordered solids. III. Fracture properties. *Physical Review B*, Vol. 47, pp. 713–722, 1993.
- 45) L. Monette and M. Anderson. Elastic and fracture properties of the two-dimensional triangular and square lattices. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 2, p. 53, 1994.

- 46) T. Hornig, M. Sokolov, and A. Blumen. Patterns and scaling in surface fragmentation processes. *Physical Review E*, Vol. 54, pp. 4293–4298, 1996.
- 47) U. Handge, I. Sokolov, and A. Blumen. Fragmentation of viscoelastic surface layers. *Europhysics Letters*, Vol. 40, pp. 275–280, 1997.
- 48) T.S. Komatsu and S. Sasa. Pattern selection of cracks in directionally drying fractures. *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 36, pp. 391–395, 1997.
- 49) S. Kitsunzaki. Fracture patterns induced by desiccation in a thin layer. *Physical Review E*, Vol. 60, No. 6, pp. 6449–6464, 1999.
- 50) H.J. Vogel, H. Hoffmann, A. Leopold, and K. Roth. Studies of crack dynamics in clay soil: II. A physically based model for crack formation. *Geoderma*, Vol. 125, No. 3-4, pp. 213–223, 2005b.
- 51) A. Nishimoto, T. Mizuguchi, and S. Kitsunzaki. Numerical study of drying process and columnar fracture process in granule-water mixtures. *Physical Review E*, Vol. 76, p. 016102, 2007.
- 52) S. Sadhukhan, S.R. Majumder, D. Mal, T. Dutta, and S. Tarafdar. Desiccation cracks on different substrates: simulation by a spring network model. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 19, p. 356206, 2007.
- 53) G. Valette, S. Prevost, L. Lucas, and J. Leonard. Dynamic model of cracks development based on a 3D discrete shrinkage volume propagation. *Computer Graphics Forum*, Vol. 27, pp. 47–62, 2008.
- 54) E.A. Jagla. Maturation of crack patterns. *Physical Review Letters*, Vol. 69, p. 056212, 2004.
- 55) R. Ayad, J.M. Konrad, and M. Souliè. Desiccation of a sensitive clay: application of the model CRACK. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 34, pp. 943–951, 1997.
- 56) J.M. Konrad and R. Ayad. An idealized framework for the analysis of cohesive soils undergoing desiccation. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 34, No. 4, pp. 477–488, 1997.
- 57) M. Sánchez, O.L. Manzoli, and L.J.N. Guimarães. Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. *Computers and Geotechnics*, Vol. 62, pp. 27–39, 2014.

- 58) J. Sima, M. Jiang, and C. Zhou. Numerical simulation of desiccation cracking in a thin clay layer using 3D discrete element modeling. *Computers and Geotechnics*, Vol. 56, pp. 168–180, 2014.
- 59) H. Peron, J.Y. Delenne, L. Laloui, and M.S.E. Youssoufi. Discrete element modeling of drying shrinkage and cracking of soils. *Computers and Geotechnics*, Vol. 36, pp. 61–69, 2008.
- 60) G. Musielak and T. Śliwa. Fracturing of clay during drying: Modelling and numerical simulation. *Transport in Porous Media*, Vol. 95, pp. 465–481, 2012.
- 61) 小國健二, 堀宗朗, 阪口秀. 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案. 土木学会論文集, Vol. 766, pp. 203–217, 2004.
- 62) M. Hori, K. Oguni, and H. Sakaguchi. Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomenon. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 53, pp. 681–703, 2005.
- 63) N. Kame, S. Saito, and K. Oguni. Quasi-static analysis of strike fault growth in layered media. *Geophysical Journal International*, Vol. 173, No. 1, pp. 309–314, 2008.
- 64) K. Oguni, M.L.L. Wijerathne, T. Okinaka, and M. Hori. Crack propagation analysis using PDS-FEM and comparison with fracture experiment. *Mechanics of Materials*, Vol. 41, No. 11, pp. 1242–1252, 2009.
- 65) M.L.L. Wijerathne, K. Oguni, and M. Hori. Numerical analysis of growing crack problems using particle discretization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 80, No. 1, pp. 46–73, 2009.
- 66) L.A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, Vol. 1, No. 318, pp. 318–333, 1931.
- 67) 小坂未来, 田中美緒, 小國健二. PDS-FEM を用いた破壊解析のための FEM モデルの自動生成手法の開発. 応用力学論文集, Vol. 14, pp. 113–122, 2010.
- 68) 小坂未来. 汎用ランダムメッシュジェネレーターの開発. 修士論文, 慶應義塾大学大学院理工学研究科, 2012.

- 69) 栗野友貴. 複雑形状に対応したランダムメッシュジェネレーターの開発. 修士論文, 慶應義塾大学大学院理工学研究科, 2014.
- 70) M. Otsuki. Memory effect on the formation of drying cracks. *Physical Review E*, Vol. 72, p. 046115, 2005.
- 71) A. Nakahara and Y. Matsuo. Transition in the pattern of cracks resulting from memory effects in paste. *Physical Review E*, Vol. 74, No. 4, p. 045102(R), 2006.
- 72) H. Nakayama, Y. Matsuo, O. Takeshi, and A. Nakahara. Position control of desiccation cracks by memory effect and faraday waves. *The European Physical Journal E*, Vol. 36, No. 1, 2013.
- 73) S. Kitsunozaki, Y. Matsuo, and A. Nakahara. Stress development up to crack formation in drying paste. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 50, No. 10, pp. 775–779, 2017.
- 74) S. Kitsunozaki. Crack propagation speed in the drying process of paste. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 78, No. 6, p. 064801, 2009.
- 75) 西本一夫, 永井靖隆, 秋山鐵夫, 御船直人. 劣化したスチレン-ブタジエンゴム (SBR) 加硫物の表面亀裂形態とフラクタル. 日本ゴム協会誌, Vol. 66, No. 8, pp. 545–551, 1993.
- 76) 王鉄成, 西林新蔵. アルカリ骨材反応による膨張ひびわれのフラクタル次元解析. コンクリート工学論文集, Vol. 8, No. 1, pp. 43–50, 1997.
- 77) B. Chiaia, J.G.M. van Mier, and A. Vervuurt. Crack growth mechanisms in four different concretes: Microscopic observations and fractal analysis. *Cement and Concrete Research*, Vol. 28, No. 1, pp. 103–114, 1998.
- 78) M. Borri-Brunetto, A. Carpinteri, and B. Chiaia. Scaling phenomena due to fractal contact in concrete and rock fractures. *International Journal of Fracture*, Vol. 95, pp. 221–238, 1999.
- 79) A. Carpinteri, B. Chiaia, and S. Invernizzi. Three-dimensional fractal analysis of concrete fracture at the meso-level. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 31, , 1999.
- 80) 柏谷公希, 米田哲朗. 岩石の風化過程で生じる亀裂パターン変化とマルチフラクタル解析による評価. 応用地質, Vol. 45, No. 2, pp. 90–100, 2004.
- 81) B. Velde. Structure of surface cracks in soils and muds. *Geoderma*, Vol. 93, pp. 101–124, 1999.

- 82) 広瀬孝三郎, 松原仁, 原久夫. ベントナイトペーストにおける乾燥収縮亀裂のフラクタル次元解析. 土木学会論文集 C (地圏工学) , Vol. 72, No. 1, pp. 27-37, 2016.
- 83) G.S. Campbell. パソコンで学ぶ土の物理学 : 自然環境管理の基礎. 鹿島出版会, 1987. 中野政詩, 東山勇監訳.
- 84) 岸井貫. 円筒及び円板の熱応力計算法: Timoshenko 法と Poritsky 法の比較と等価性の証明. *Journal of the Ceramic Society of Japan*, Vol. 101, No. 1176, pp. 932-935, 1993.

謝辞

本研究は、著者が慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程在学中に、同大学理工学部システムデザイン工学科小國健二教授の指導のもとに行ったものである。

小國健二教授には、本研究を遂行するにあたり、終始ご指導を賜りました。日頃より親身に相談にのって頂くと共に、常に適切なお助言、ご助力を頂いたことで、本研究を着実に進めることができました。先生よりご指導頂いた6年間で、研究活動や学会活動など多くの貴重な経験をさせて頂くだけでなく、研究者としての姿や学問へ向き合う姿勢など、研究以外の面でも非常に多くのことを学ばせて頂きました。心より尊敬する先生のご指導のもと研究生生活を送れたことは、著者の誇りです。この場を借りて、深く感謝申し上げます。

本論文の執筆にあたり、慶應義塾大学理工学部の小檜山雅之教授、高橋正樹准教授、柿沼康弘准教授には多くの貴重なご意見を賜りました。先生方からの適切なお助言、ご助力により、本論文を充実させ完成度を高めることができました。また、先生方と本研究に関し議論する機会を与えて頂いたことは、研究者として大変貴重な経験となりました。ご多忙の中、本論文の完成のために多くの時間を割いて頂いただけでなく、お会いする度に励ましのお言葉を頂きましたこと、改めて厚く御礼申し上げます。

慶應義塾大学秘書 井上晴子氏には、著者の研究室生活において数多くのサポートをして頂きました。厚く御礼申し上げます。

著者の学生生活は、小國健二教授をはじめとし、多くの尊敬する先生方・先輩・後輩・友人に囲まれたことで、刺激的かつ充実したものとなりました。このような素晴らしい出会いに恵まれたことに感謝申し上げます。

最後に、著者の研究生生活・私生活を陰ながら支え、温かく見守り続けてくれた家族に心より感謝し、本論文の謝辞と致します。

2018年1月

廣部 紗也子