

Title	日影の科学 (天文教育カリキュラムI)
Sub Title	A curriculum for studies of the astronomy
Author	表, 實(Omote, Minoru) 笠原, 誠(Kasahara, Makoto) 児玉, 光義(Kodama, Mitsuyoshi) 五藤, 信隆(Goto, Nobutaka) 小林, 弘美(Kobayashi, Hiromi) 佐藤, 毅彦(Sato, Takehiko) 坪田, 幸政(Tsubota, Yukimasa) 中村, 康二(Nakamura, Koji) 松本, 直記(Matsumoto, Naoki) 山腰, 哲(Yamakoshi, Tetsu) 山本, 裕樹(Yamamoto, Hiroki) 吉田, 宏(Yoshida, Hiroshi)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2005
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 No.37 (2005.) ,p.95- 116
JaLC DOI	
Abstract	インターネット望遠鏡プロジェクトでは , インターネット望遠鏡を国内外の数箇所に設置しそれらを結ぶネットワークづくりを図るためのハード面の整備と同時に , このネットワークを用いた天文教育のカリキュラムを用意するためのソフト面の整備も目指している。本報告はそのカリキュラムに関する報告第一号となる。
Notes	
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20050000-0095

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

日影の科学（天文教育カリキュラム I）

慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト[†]

インターネット望遠鏡プロジェクトでは、インターネット望遠鏡を国内外の数箇所に設置しそれらを結ぶネットワークづくりを図るためのハード面の整備と同時に、このネットワークを用いた天文教育のカリキュラムを用意するためのソフト面の整備も目指している。本報告はそのカリキュラムに関する報告第一号となる。

第1章 日影の科学 I

1.1 序

太陽の光が建物や木々にさえぎられてできる影（日影）は日常的に馴染み深い現象である。また逆に屋内や洞窟内の奥深くには太陽光線が届かないが、洞窟の入り口近くや家の窓側には太陽の日が差し込んでくることもよく知られている。

建物や木々がつくる影の形と屋内に差し込む日差しはいつも同じではなく、冬と夏ではその形は異なり、また朝方と夕方でもそれは変化する。日影の形とその変化の様子を観測し、そこから得られる太陽と地球の興味深い関係を探ってみよう。これを日影の科学と呼ぶことにする。

1.2 影の向きと長さ

日影と日差しは逆の関係であるから、どちらか片方について調べればよい。ここでは日影に注目することにしよう。太陽の光をさえぎるものが建物の場合と木々の場合では、それらがつくる日影の形もそれぞれ違ってくるが、日影の科学で重要となるのは影の方向と長さである。そこで以下では議論の簡単化のために、1本の棒がつくる影の方向とその長さについて考えてみたい。

[†] 慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクトのメンバーは次の通りである（アイウエオ順）：表實，笠原誠，児玉光義，五藤信隆，小林弘美，佐藤毅彦，坪田幸政，中村康二，松本直記，山腰哲，山本裕樹，吉田宏。連絡先：慶應義塾大学日吉物理学教室（〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1）：Dept of Phys., Keio Univ., 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8521, Japan. [Received, Sep. 30, 2004]

1.2.1 棒がつくる影の方向について

棒から影の先端に向かう方向を影の方向と呼ぶことにする。影の方向は、あらかじめ基準の方向を決めて、その方向から時計針の進む向きを正にとる角度で表すことができる。基準の方向としては北の方向をとることにする。このようにして表された影の方向を a とする。太陽の光線は影の向きとは逆方向から差してくるので、太陽の方向は棒から影と逆向きの方向にあることになる。影の方向が与える角度 a を太陽の方位角と呼ぶ。すなわち、 a は南の方向を基準にして、そこから時計針の進む方向を正とした太陽までの方位角を表す。

一日のうちでも影の方向は時間の経過によって変化することから、太陽の方位角も時間と共に変わることがわかる。一日のうちで太陽の方位角が変化する現象は、太陽の日周運動と呼ばれている¹⁾。太陽の方位角がゼロとなるときを（太陽が真南にあるとき）、太陽の南中時（または正中時）という。太陽が南中したとき、影は真北の方向を指す。

1.2.2 影の長さについて

棒の位置から影の先端までの距離を影の長さという。影の先端と棒の先端を結ぶ直線が地面となす角は、地表からの太陽の高度を表す。これを h で表すことにして、 h を太陽の高度角と呼ぶ。棒と影および影の先端と棒の先端を結ぶ線分は直角三角形をなすことから、棒の長さを ℓ としたとき影の長さ L は、高度角 h の関数として

$$L = \ell \cot h \quad (1.1)$$

で与えられる。

(1.1) からわかるように、太陽の高度角は影の長さ L と棒の長さ ℓ の比から求めることができる。また逆に太陽の高度角がわかっている時、影の長さ L を測定すれば、その影をつくる棒の長さ ℓ は

$$\ell = L \tan h \quad (1.2)$$

で与えられる。高層ビルや鉄塔の高さを直接測定することが不可能な場合でも、その影の長さを測定できる場合には、(1.2)の関係を用いてそれらの高さを求めることができる。この問題は、高層ビルを建築するにあたってその影の影響が近隣に及ぼす影響（日照権の問題）を考慮する際に、敷地の広さ（許される影の長さ L ）から建築可能なビルの高さ ℓ を決めるための基本的な関係を与えている²⁾。

朝夕と正午では自分の影の長さが違うことに気がつくであろう。人を棒にたとえれば、自分

¹⁾ 日周運動は地球の自転によって起きるものであり、太陽が東の方向から西の方向に移動していくことから、地球は西から東の方向に自転していることがわかる。また日周運動が地球自転によってもたらされることから、これは太陽に固有な現象ではなく、全ての天体に共通な運動である。

²⁾ 太陽の高度角は季節によって変化することから、影の長さが最も長くなる季節を選んで、ビルの高さを決めることが必要となる。

の身長 (棒の長さ ℓ) が同じでもその影の長さが変化するのは、太陽の高度が朝夕と正午では異なるからである。また同じ木の影の長さが季節によって変わることもよく知られた現象である³⁾。これらのことから、同じ日でもその時刻によって、太陽の高度 (高度角 h) が変化することがわかる。また季節の移り変わりによっても、太陽の高度 (高度角 h) は変化する。

1.2.3 方位角と高度角 (地平座標)

影の方向から太陽の方位角 a が、また影の長さと棒の長さの比から太陽の高度角 h が求められた。方位角 a と高度角 h がわかれば、太陽を観測するために必要な太陽の位置に関する情報が与えられる。すなわち、地上のある場所で望遠鏡を用いて太陽を見るためには、望遠鏡をどの方向に向け (方位角)、地上からどれだけ上向き (高度角) に設置すれば良いかがわかることになる。この意味で、2つの角度 (a, h) は、観測するにあたって必要な太陽の位置に関する情報を与えるものであり、これを太陽の地平座標と呼ぶ⁴⁾。

日本が昼の時でも地球の反対側では夜であることから、同じときでも観測地の経度の違いにより太陽の高度と方位が異なることがわかる。また、地球の北極に近いところでは夏季には一日中太陽が沈まないことがある。これは観測地の緯度が異なれば、同じ日の同じ時刻においても、各観測地での太陽高度が違うことを示している。これらのことから、天体が同じでも観測地が異なれば、その天体の方位角と高度角は違ってくことになる。このことから、決められた時刻における各天体の地平座標は、観測地ごとに異なる値を持つことがわかる。

各観測地における天体の地平座標は、その場所で目的の天体を観測する場合に向けるべき望遠鏡の向きと高さを直接示しているという意味で便利な座標であるが、一方ではそれらの座標値が天体に固有なものではなく、同じ天体でも方位角と高度角は観測地ごとに異なるという意味で、使用にあたっての不便さがあるといえる⁵⁾。

1.2.4 日影曲線

すでに述べたように、一日のうちでも朝方と真昼では棒の影の方向とその長さは異なっている。時間を追ってその変化の様子を見てみることは興味深い。ここでは時間の経過に従って影の先端がどのような動きをするかに注目したい。具体的には日の出から日没までの間に、影の

³⁾ 屋内に差し込む日差しが、夏は窓際だけであったものが冬には室内の奥深くまで到達するのは、夏季と冬季では太陽の高さが異なるためである。

⁴⁾ 同様にして、任意の天体の地平座標を考えることが可能である。すなわち、観測地におけるある天体の方位角と高度角がわかれば、目的の天体を観測するために望遠鏡をどこに向ければよいかわかる。

⁵⁾ 天体の位置 (天球上の位置) を表すものを、その天体の座標と呼ぶ。地平座標はその一つの例であるが、天体の位置の表し方にはそのほかに、赤経・赤緯座標、赤緯・時角座標、黄道座標などがある。赤経・赤緯座標は観測地に関わりなく天体に固有な座標であり、赤緯・時角座標は地平座標と赤経・赤緯座標の橋渡しとなる座標系といえる。これらの座標系に関する詳しい解説は、慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクトホームページ (<http://sylph.fbc.hc.keio.ac.jp/itp/pukiwiki/>) の天体の座標系に関する項を参照のこと。

先端が描く曲線（これを日影曲線と呼ぶことにする）を調べる問題を考えてみよう。

影の方向と長さは季節によっても変化することから、季節が変われば日影曲線の形も異なることが予想される。ここではまず、ある決められた日に影の先端が描く日影曲線を調べ、次に得られた曲線が季節によってどのように変化するかを考察することにしよう。

地上における影の先端の位置を表示するために、棒の位置を原点として真北に向かう直線を x 軸（の正方向）、真西に向かう直線を y 軸（の正方向）とする平面上の直角座標系を設定し、影の先端の位置をこの座標系の (x, y) 座標値で表すことにする。このとき棒（長さ ℓ ）の影が、真北から時計の針の方向に角度 a の方向を向いていたとすると、影の先端の位置は

$$x = \ell \cot h \cos a, \quad (1.3)$$

$$y = \ell \cot h \sin a \quad (1.4)$$

で与えられる。ここで、既に述べたように h は地平座標での太陽の高度角であり、影の方向を与える a は地平座標での太陽の方位角を表す。一日の間でも地球の自転により（太陽の日周運動により）、時間が経過するにつれて太陽の高度角 h と方位角 a は変化する。この結果、先端の位置座標 x と y は時間の経過によって変化することになる。このことから、時間を追って x と y の変化を調べることによって、棒の先端が描く日影曲線が得られることがわかる。

(1.3) と (1.4) の右辺から日周運動による時間依存性を消去すると、 x と y が次の関係

$$\left(x + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2} \ell\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1) \quad (1.5)$$

を満たすことがわかる⁶⁾。上式で ϕ は観測地の緯度を表し、 e は緯度 ϕ と太陽の赤緯 δ を用いて⁷⁾

$$e \equiv \frac{\cos \phi}{\sin \delta} \quad (1.6)$$

で定義され、その絶対値 $|e|$ は (1.5) で表される 2 次曲線の離心率を与える。また (1.5) は

$$(1 - e^2)x^2 + 2\ell e^2 \tan \phi x + y^2 + \ell^2(1 - e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (1.7)$$

と書き直すこともできる。

(1.5) または (1.7) で与えられる日影曲線の形は、離心率 $|e|$ の値によって次のように分類できる：

⁶⁾ この式の導き方は付録 1 で与えられている。

⁷⁾ 赤緯は赤道座標系で表した天体（今の場合太陽）の座標を意味する。詳細はホームページの天体の座標系に関する項を参照。

日影曲線の分類 1

1)	$e = 0$,	円,	$x^2 + y^2 = \ell^2$
2)	$0 < e < 1$,	楕円,	$\left(x + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2} \ell\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1)$
3)	$ e = 1$,	放物線,	$2 \ell \tan \phi x + y^2 + \ell^2 (1 - \tan^2 \phi) = 0$
4)	$1 < e < \infty$,	双曲線,	$\left(x - \frac{e^2 \tan \phi}{e^2 - 1} \ell\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{\ell^2}{(e^2 - 1)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1)$
5)	$ e = \infty$,	直線,	$x = \ell \tan \phi$

(1.6) からわかるように、観測地の緯度 ϕ が異なれば離心率 $|e|$ は違った値になる。また緯度 ϕ が同じでも太陽の赤緯 δ が異なる場合には、離心率も違う値となる。太陽の赤緯は季節によって変化するから、同じ観測地でも季節によって離心率 $|e|$ が異なり、その結果日影曲線の形も季節によって変わることがわかる。

観測地の緯度の違い、また観測時の季節の移り変わりによる日影曲線の形の変化の様子は、以下のようにまとめることができる。

北極または南極では ($e=0$ のとき)

夏季期間中の北極 ($\phi = 90^\circ$, $\delta > 0^\circ$), または冬季期間中の南極 ($\phi = -90^\circ$, $\delta < 0^\circ$) では、離心率 $e=0$ は共にゼロであるから、そこで観測される日影曲線は半径 ℓ の円となる。

春分または秋分のとき ($e=\infty$ のとき)

春分または秋分のとき、太陽は赤道上空にあるので、太陽の赤緯はゼロ ($\delta = 0$) となる。このときは観測地に関係なく（極以外の地域では）離心率は無限大 ($|e| = \infty$) となるので、観測される日影曲線は真西から真東に向かう ($x = \ell \tan \phi$) 直線となる。

北緯66度30分から南緯66度30分の範囲では ($-66.5^\circ \leq \phi \leq 66.5^\circ$)

太陽の赤緯は季節によって変化するが、その変化の範囲は $-23.5^\circ \leq \delta \leq +23.5^\circ$ の範囲だから、春分と秋分のときを除けばこの領域での離心率 $|e|$ は常に 1 よりも大きくなる。従って、観測される日影曲線は双曲線となる。この場合の双曲線の形 ($|e|$ の大きさ) は、同じ観測地（同じ緯度 ϕ のところ）でも季節によって (δ が変化すると) 変化し、また同じ季節の同じ日でも観測地の緯度の違いによって異なってくる。

高緯度地域 ($|\phi| > 66.5^\circ$) では

北緯 66.5° 以北または南緯 -66.5° 以南の地域では、季節によらず (δ が $-23.5^\circ \leq \delta \leq +23.5^\circ$ の範囲で変化しても) 離心率の絶対値は 1 以下である。従って、これらの地域で観測される日

影曲線は楕円となる。ただし、年に1度だけ日影曲線は放物線を描く⁸⁾。

1.3 日影曲線解析の実例

実際の観測データを用いて日影に関する考察を行う。図1は、2004年8月12日長野県北佐久郡立科町にある慶應義塾大学立科山荘の敷地で観測した一日の日影の動きに関するデータである⁹⁾。

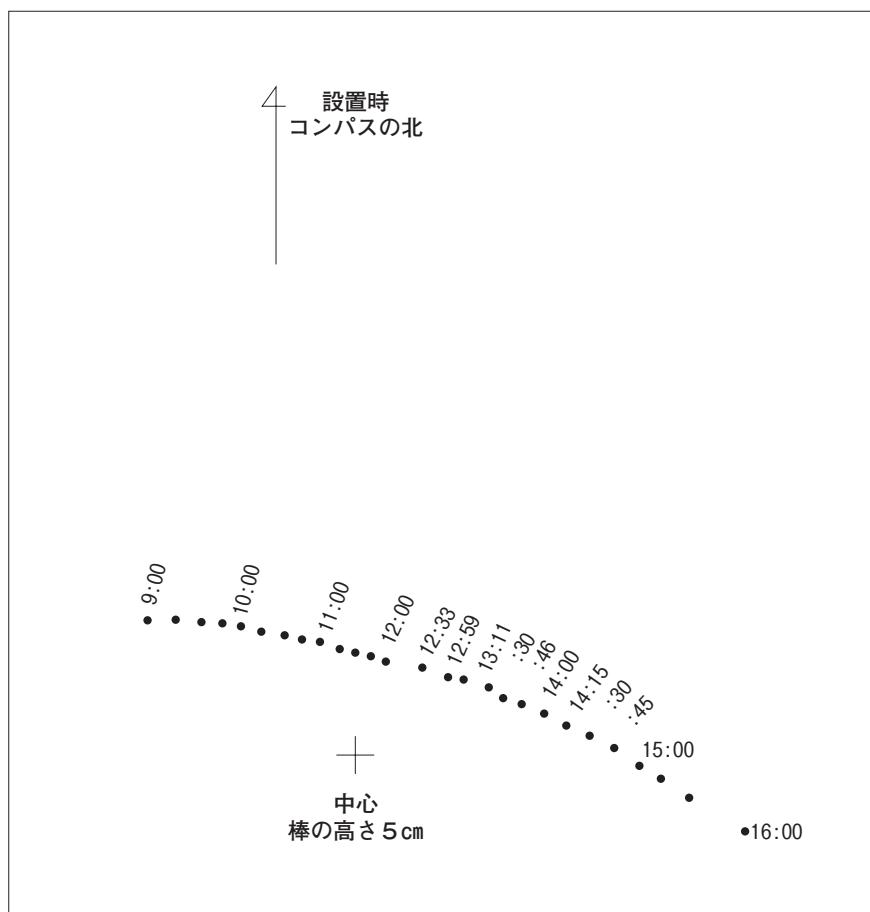


図1 日影曲線 1

⁸⁾ 観測地の緯度 ϕ と太陽の赤緯 δ が $\phi + \delta = 90^\circ$ または 180° の関係を満たすとき、日影曲線は放物線となる ($|e|=1$)。 $|e|=1$ となるのは年に2回(夏季と冬季)実現するが、冬季に $|e|=1$ となるときには北緯 66.5° 以上の高緯度地域では太陽が地平線の下にあり日影はできない。結果として放物線は年に1度だけ観測されることになる。南半球でも状況は同じである。

⁹⁾ 観測者は、田中・早野(9時—10時)、松土・渡辺(10時—11時)、下井・石川(11時—12時)、児玉・小林(12時—13時)、岩田・児玉(13時—14時)、西田・坂巻(14時—16時)である。この観測に用いた装置を装置1と呼ぶことにする。装置1は小林弘美によって製作されたものである。

1.3.1 考察1：太陽高度角を求める

観測時刻が12時丁度のときの影の先端の位置に注目する。影の先端と棒までの距離の実測値は2.0cmであった。棒の長さは5.0cmであるから、このときの太陽の高度角を h_{12} とすると、(1.1)より

$$\cot h_{12} = \frac{L}{\ell} = \frac{2.0}{5.0} = 0.4 \quad (1.8)$$

となり、 $h_{12}=68.2^\circ$ であることがわかる。

1.3.2 考察2：基準方位の決め方

各時刻における太陽の方位角を求めるには、基準となる真北の方向を決定することが必要である。観測データをプロットした図で真北の方向を決めるには、2通りの決め方が考えられる。第一の方法はインディアン・サークル法と呼ばれる方法¹⁰⁾であり、第2の方法は太陽が南中したとき（12時）の影の方向を真北にとる決め方である。

二つの方法で決めた北の方向は必ずしも一致しない。その原因として考えられるものは、インディアン・サークル法では、観測データが15分毎のものであるためその間の影の先端の位置を目分量で決めざるを得ないことからくる誤差が避けられないこと、一方南中時の影の方向から決める場合には観測地の経度が東経135°（日本標準時の経度）に等しくないために、12時が正確な南中時刻とは一致しないことによる誤差が生じることである。ここではこの問題はひとまず抜きにして、12時のときの影の向きを真北の方向ととることにする。

1.3.3 考察3：影の先端の座標値を測定する

1.2.4節で述べたように、北に向かう方向を x 軸の正の方向とし、西に向かう方向を y 軸の正の方向とする2次元の直角座標系をとり、その座標系における影の先端の座標値 (x_i, y_i) を求める。ここで添え字 i は各観測時刻の順を表すものであり、9時を $i=1$ 番目として、16時を $i=27$ 番目とする。求められた各時刻ごとの座標値を次の表（表1）に与える¹¹⁾。

1.3.4 考察4：離心率と太陽赤緯を求める

日影曲線は(1.7)で表されることを考慮して、表1に記された観測データを最も忠実に再現する曲線の形を求めることを考える。(1.7)は各項が長さの次元を持っているので、ここで改めて次元を持たない変数 X と Y を

¹⁰⁾ インディアン・サークル法では、棒の位置を中心とする適当な半径の円を描き、この円が日影曲線と交わる2点を結ぶ直線を引く。この直線は東西の方向を表すことから、棒の位置を通り東西を結ぶ線分に垂直に引いた半直線の向きを真北とする決め方である。

¹¹⁾ 図1から座標値を求める場合は、図中の12時における影の先端と棒の間隔を測り、それを2cmとなるように図の縮尺の割合を決めればよい。その縮尺の割合を用いて、図中の各時刻の座標値から実際の座標値を求めることができる。

表1 座標値 (観測データ) ($\ell = 5$ cm)

i	$x_i(\text{cm})$	$y_i(\text{cm})$	$X_i(=x_i/\ell)$	$Y_i(=y_i/\ell)$
1	1.47	4.71	0.294	0.941
2	1.61	4.18	0.321	0.835
3	1.71	3.65	0.341	0.729
4	1.79	3.26	0.359	0.653
5	1.86	2.91	0.372	0.582
6	1.88	2.53	0.376	0.506
7	1.91	2.06	0.382	0.412
8	1.93	1.71	0.386	0.341
9	2.00	1.35	0.400	0.271
10	1.96	0.91	0.392	0.182
11	2.00	0.59	0.400	0.118
12	2.01	0.29	0.402	0.059
13	2.00	0.00	0.400	0.000
14	2.06	-0.74	0.412	-0.147
15	2.03	-1.31	0.406	-0.262
16	2.06	-1.56	0.412	-0.318
17	2.06	-2.12	0.412	-0.424
18	1.91	-2.44	0.382	-0.488
19	1.94	-2.82	0.388	-0.565
20	1.88	-3.32	0.376	-0.665
21	1.76	-3.82	0.352	-0.765
22	1.71	-4.32	0.341	-0.865
23	1.47	-4.88	0.294	-0.976
24	1.41	-5.47	0.282	-1.094
25	1.29	-5.94	0.259	-1.188
26	1.06	-6.56	0.212	-1.312
27	0.88	-7.44	0.177	-1.488

$$X \equiv \frac{x}{\ell}, \quad Y \equiv \frac{y}{\ell} \quad (1.9)$$

で定義すると、日影曲線の式 (2.2) は無次元の変数 X , Y を用いて

$$(1-e^2)X^2 + 2e^2 \tan \phi X + Y^2 + (1-e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (1.10)$$

と書き直すことができる。この式には棒の長さ ℓ は顔を出していないことに気がつくであろう。この意味で (1.10) は棒の長さに関係なく、日影曲線の特徴を表すものである。

(1.10) には、観測地の緯度 ϕ および ϕ と太陽の赤緯 δ から決まる離心率 $|e|$ の 2 乗が含まれているが、ここでは観測地 (立科山荘) の緯度は既知のものとして、観測データを再現するに最適な e^2 を最小 2 乗法を用いて求める¹²⁾¹³⁾。

¹²⁾ 最小 2 乗法の説明は付録 2 に与えられているので、そちらを参照のこと。

¹³⁾ この解析は吉田宏による。

各時刻ごとの X_i, Y_i ($i = 1, 2, \dots, 27$) は表 1 に与えられているので、これらのデータから得られる最適曲線は、 e^2 が次式

$$e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{27} \{(X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)(X_i^2 + Y_i^2 + 1)\}}{\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2} = 10.89 \quad (1.11)$$

で与えられる値を持つときである。

従って観測データから求められた離心率 e は

$$e \text{ (測定値)} = 3.30 \quad (1.12)$$

となる¹⁴⁾。この結果、立科山荘における 8 月 12 日の観測データから得られる日影曲線は、離心率 $e = 3.30$ の双曲線であることが明らかになった。これは前節の理論的な予測（この地での日影曲線は双曲線と与えられる）を正当化するものである。

離心率の定義 (1.6) とその測定値 (1.12) および立科山荘の緯度から、2004 年 8 月 12 日の太陽の赤緯 δ (測定値) を求めると

$$\delta \text{ (測定値)} = +14^\circ 09' \quad (1.13)$$

となる。

これを天文年鑑 (2004 年版) に記載されている同じ日の太陽赤緯 δ (天文年鑑)

$$\delta \text{ (天文年鑑)} = +14^\circ 56' \quad (1.14)$$

と比較してみると、かなり近い値が得られたことがわかる。測定値のずれの原因としては、(1) 観測データのバラつきが大きいこと、(2) 真北の方向の決め方に不確定要素が含まれていること等、が考えられる。

1.4 カリキュラム案

1.4 節では日影の科学のためのカリキュラムを用意する。1.3 節で考察した日影の観測データが得られた同じ日の同じ場所 (2004 年 8 月 12 日の慶應義塾大学立科山荘) で、もう一つ別の装置 (これを装置 2 と呼ぶ¹⁵⁾) を用いて前節の観測とは独立に日影の観測がなされた。図 2 はその観測データである。この別の観測データを用いて、日影の科学のためのカリキュラムを用意する。

1.4.1 課題 1：装置 2 の棒の長さを求める

前節と同じ考察をするためには、各時刻における実際の影の長さと言の原因となる棒の長さ

¹⁴⁾ 離心率として正の値を選んだのは観測日時が 8 月 12 日であり、この日が春分と秋分の間にある ($\delta > 0$) ことを考慮した。

¹⁵⁾ 装置 2 は中村康二が製作したものである。

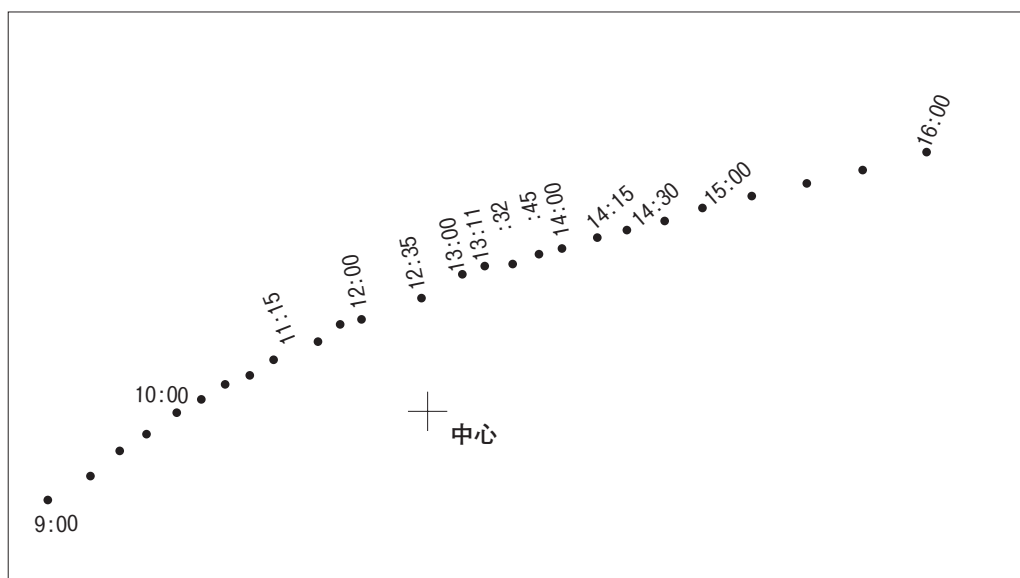


図2 日影曲線2

が測定されることが必要である。しかし装置2では棒の長さを測定し忘れたことが明らかになった。幸いなことに装置1と装置2の観測日時と観測場所は同じであることから、装置1のデータを用いて装置2の棒の高さ l を求めることが可能となる。

装置1のデータから、立科山荘において2004年8月12日12時の太陽の高度角は 68.2° であることが求められた。一方、装置2における同じ日の同じ時刻（8月12日12時）の影の長さを測定すると $L=3.8\text{cm}$ であった。これらのデータから測定装置2の棒の長さを求めよ¹⁶⁾。

1.4.2 課題2：方位を決める

各時刻における太陽の方位を求めたり、また各時刻における影の x 座標と y 座標を測定するには、図2のデータから真北の方向を決めることが必要となる。インディアン・サークル法を用いて北の方向を決めてみよう。この方法で決めた北の方向と、12時の影の方向に違いが生じるか調べてみよう。また、立科山荘（経度 138.3° ）における太陽の南中時刻を求め、そのときの影の方向を真北の方向と定め、インディアン・サークル法によって決めた北の方向との差を調べてみよう。

1.4.3 課題3：各座標値をプロットする

図2上に、課題2で決めた北の方角を x 軸の正の向きとし、西方向を y 軸の正の向きとする

¹⁶⁾ 同じ方法で、影の長さや太陽の高度角から、影の原因となる建物や木の高さを測定することができる。この点に関しては、日影の科学2でさらに考察することになる。

直角座標をとり、各時刻における影の先端の座標値 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 27$, を求めてみよう。次に求めた座標値を棒の高さ ℓ で割った値 (X_i, Y_i) を求め、これらの値をグラフ用紙にプロットして曲線の概形を描いてみよう。

1.4.4 課題4：最適曲線の離心率を求める

(1.11) と同じ方法を用いて、課題4で求めた (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, 27$, から、装置2による観測データの最適曲線を求め、その離心率 e を測定する。得られた結果を用いて8月12日の太陽の赤緯 δ を求めてみよう。求められた結果を天文年鑑のデータ ($\delta = +14^\circ 56'$) と比較して、その差の原因を考察しよう。

1.4.5 課題5：実際に自分で観測しよう

ある日の影の動きを実際に自分で測定し、その観測データを用いて、その日の日影曲線の離心率と太陽の赤緯を求め、天文年鑑に記載された赤緯の値と比較してみよう。北の方向の決め方の違いによって、求められた日影曲線の離心率と太陽の赤緯にどのような差が生じるかを調べてみよう。

1.4.6 課題6：日影曲線の季節変化を調べる

毎月決められた日に日影曲線を測定し、季節によってその離心率と太陽の赤緯が変化する様子を調べてみよう。

1.4.7 課題7：日影曲線の緯度依存性を調べる

緯度の異なる観測地の人と協力して、決められた日の日影曲線を測定し、緯度の違いによる離心率の変化を調べよう。またこのとき求められた太陽の赤緯は、観測地の緯度の違いによって変化するか否かを確認めよ。

1.5 付録1：日影曲線の求め方

日影曲線の方程式が (1.5) で表されることを示す。まず、太陽の位置の地平座標と赤緯を

方位角： a

高度角： h

赤緯： δ

と表す。また観測地点の緯度を ϕ とする。

このとき垂直に立てられた棒の影（太陽光線による）について考察する。棒の高さを ℓ としたとき、棒の先端の (x, y) 座標は

$$\begin{aligned}x &= \ell \cot z \cos a \\y &= \ell \cot z \sin a\end{aligned}\tag{1.15}$$

で与えられる。ここで x 軸の正方向は北向き、 y 軸の正方向は西向き、とする。地平座標の天頂距離 z と方位角 a は共に時間の関数であるから、上記座標を赤緯・時角座標 (δ, H) に変換することによって、時間に依存する座標変数が H だけになるよう（ δ は一日のうちでは時間に依存しないと考えてよい）に座標を取り直す。地平座標 (h, a) と赤緯・時角座標 (δ, H) の変換は

$$\begin{aligned}\cos h \sin a &= \cos \delta \sin H, \\ \cos h \cos a &= -\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H, \\ \sin h &= \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H\end{aligned}\tag{1.16}$$

で与えられる。

したがって、

$$\begin{aligned}\cot h \sin a &= \frac{\cos \delta \sin H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}, \\ \cot h \cos a &= \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}\end{aligned}\tag{1.17}$$

から、

$$X \equiv \frac{x}{\ell} = \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H},\tag{1.18}$$

$$Y \equiv \frac{y}{\ell} = \frac{\cos \delta \sin H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}\tag{1.19}$$

となる。これは太陽の位置を赤緯・時角座標で表したときの、影（単位長さの棒の）の先端の座標を与える。

すでに述べたように、赤緯・時角座標を用いた X と Y の表式で、一日の間で時間とともに変化するのは時角 H だけだから、これを消去することによって、太陽の日周運動によって描かれる影の先端の軌跡が求められる。上式を変形すると

$$\begin{aligned}(\sin \phi - X \cos \phi) \cos \delta \sin H &= Y \sin \delta \\ (\sin \phi - X \cos \phi) \cos \delta \cos H &= X \sin \delta \sin \phi + \sin \delta \cos \phi\end{aligned}\tag{1.20}$$

となるので、 $\sin H$ と $\cos H$ を消去すると軌跡の方程式

$$X^2 (\sin^2 \delta - \cos^2 \phi) + 2X \sin \phi \cos \phi + Y^2 \sin^2 \delta + \sin^2 \delta \cos^2 \phi - \cos^2 \delta \sin^2 \phi = 0\tag{1.21}$$

が得られる。

以下では、 $\sin^2 \delta \neq \cos^2 \phi$ のときと、 $\sin^2 \delta = \cos^2 \phi$ のときに分けて、軌跡の形を考察する。

1.5.1 $\sin^2 \delta \neq \cos^2 \phi$ のとき

軌跡の式は

$$\left(X + \frac{\sin \phi \cos \phi}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)}\right)^2 + \frac{\sin^2 \delta}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)} Y^2 = \frac{\sin^2 \delta \cos^2 \delta}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)^2} \quad (1.22)$$

となる。

$\sin \delta = 0$ のとき

上式は

$$X = \tan \phi = \text{const.} \quad (1.23)$$

となる。また (1.19) から

$$Y = \frac{\tan H}{\cos \phi} \quad (1.24)$$

となり、 Y は時間が経つにつれて変化する（ X の式は (1.18) から求められる）。したがって、この場合、影の軌跡は（ $X = \tan \phi$ ）直線となる。ところで $\sin \delta = 0$ すなわち $\delta = 0$ は太陽の赤緯がゼロのときであり、太陽が地球の赤道面上の真上にあるとき（春分と秋分のとき）である。黄道座標を用いたとき太陽の黄経を λ とすると（太陽の黄緯はゼロだから）

$$\sin \delta = \sin \lambda \sin \varepsilon \quad (1.25)$$

が成り立つから（ ε は黄道の傾斜角）、 $\sin \delta = 0$ のとき $\sin \lambda = 0$ すなわち $\delta = 0, \pi$ となる。このとき太陽は横道上の春分点または秋分点上にあることがわかる。

$\sin \delta \neq 0$ のとき（太陽が赤道上空にないとき）

軌跡の式は

$$\left(X + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{Y^2}{(1 - e^2)} = \frac{\cot^2 \delta}{(1 - e^2)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1) \quad (1.26)$$

となる。ここで e は

$$e \equiv \frac{\cos \phi}{\sin \delta} \quad (1.27)$$

で定義され、その絶対値 $|e|$ は上で表される 2 次式の離心率を表す。

1.5.2 $\sin^2 \delta = \cos^2 \phi$ のとき

軌跡の式は

$$Y^2 + 2X \tan \phi + (1 - \tan^2 \phi) = 0 \quad (1.28)$$

となり、放物線となることがわかる。

1.6 付録2：最適曲線の求め方（最小2乗法）

影の先端の観測データを再現する最適曲線は以下のようにして求めることができる。日影曲線は (1.10) で与えられるので、各時刻の観測データ (X_i, Y_i) が曲線上にあれば、

$$(1-e^2)X_i^2 + 2e^2X_i \tan \phi + Y_i^2 + (1-e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (1.29)$$

が成り立つ。実際の観測データ (X_i, Y_i) は必ずしも (1.29) を満たすとは限らないので、

$$\begin{aligned} \zeta_i &\equiv (1-e^2)X_i^2 + 2e^2X_i \tan \phi + Y_i^2 + (1-e^2 \tan^2 \phi) \\ &= X_i^2 + Y_i^2 + 1 - e^2(X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi), \quad i=1, 2, \dots, 27 \end{aligned} \quad (1.30)$$

と置いたとき、 ζ_i は求めるべき日影曲線上の対応する点と観測データとのずれを表している。

(1.30) 中の緯度 ϕ は既知とすると、 ζ_i は e^2 の関数となる。この場合、最小2乗法は各時刻のずれの2乗の和 $S(e^2)$

$$S(e^2) \equiv \sum_{i=1}^{27} \zeta_i^2 \quad (1.31)$$

を e^2 の関数とみて、それが最小となるように変数 e^2 を選ぶ方法である。上式に (1.30) で定義した ζ_i を代入すると、

$$\begin{aligned} S(e^2) &= \left[\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2 \right] (e^2)^2 \\ &\quad - 2 \left[\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi) (X_i^2 + Y_i^2 + 1) \right] e^2 + \sum_{i=1}^{27} (X_i^2 + Y_i^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

となり、これは e^2 に関する2次式である。このとき $(e^2)^2$ の係数は正であるから、 e^2 として

$$e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{27} \{(X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi) (X_i^2 + Y_i^2 + 1)\}}{\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2} \quad (1.33)$$

と選べば $S(e^2)$ は最小となる。よって、求める最適曲線の離心率 (の2乗) e^2 は (1.33) で与えられることが示された。

第2章 日影の科学Ⅱ

2.1 序

「日影の科学Ⅰ」は、太陽からの光がつくる地上の影について考察した。「日影の科学Ⅱ」では、地球を離れて月面に目を向けることにしたい。月面を眺めると様々な模様が観測されることはよく知られている。特に満月のときに見た月の表面には、薄暗い模様が見えるが、これを日本では昔から「ウサギが餅をついている姿」に見立ててきた。一方、中国ではこの模様は、不老不死の薬を盗んで月に逃げたジョウ蛾（じょうが）が変身した「ガマガエルの姿」であるとされてきた。また、ヨーロッパでは、「女の人の顔」とか「カニ」の形になぞらえている。

うさぎが餅をついているように見える薄暗いところは「海」と呼ばれ、それに比べて明るい

ところは「陸」と呼ばれている。望遠鏡でこの「陸」の部分を見ると、デコボコした様々な地形が観測されるが¹⁷⁾、この地形の一つにクレーターがある。以下ではこのクレーターにできる影について考察することにしよう。

2.2 クレーターの高さ

長いあいだ月の山脈やクレーターは、切り立つ山のように非常に高いものと考えられてきた。月面にできる影を観測することによって、月の地形が本当にそのように険しいものか否かを調べてみよう。

2.2.1 月面の影の長さ

「日影の科学Ⅰ」で、影の長さから建物や木の高さを測ることができることを示した。その関係をもう一度復習してみよう。影の原因となる建物や木の高さを ℓ 、それらによってつくられた影の長さを L 、そのときの太陽の高度角を h としたとき、これらの間には次の関係

$$L = \ell \cot h \quad (2.1)$$

が成り立つ。従って、太陽の高度角 h が分かっているとき、建物などの高さ ℓ はその影の長さ L から

$$\ell = \frac{L}{\cot h} = L \tan h \quad (2.2)$$

で与えられた。

関係式 (2.1) または (2.2) は、月面上の影についても同じように成り立つ。この場合、 ℓ は月面上の山やクレーターの壁の高さ $\ell_{\odot}$ に、 L はそれらによってできた月面上の影の長さ $L_{\odot}$ に、また h は影ができている月面の位置でのそのときの太陽の高度角 $h_{\odot}$ に置き換えて考える。従って、月面上の影の長さとその地点におけるそのときの太陽高度がわかれば、影をつくる月面の山の高さやクレーターの壁の高さを求めることができることになる。

地上での観測の場合、「日影の科学Ⅰ」で示したように、観測地点での観測時の太陽の高度角 h は、高さ ℓ が知られている棒の影の長さ L から求めることができた ($\cot h = L/\ell$)。また建物等の影の長さも直接測ることができる。従って、直接測定した影の長さ L と太陽の高度角 h から、建物等の高さ ℓ を計算することができた。一方、地上に居たままで月面の影の長さを直接測ることは不可能である。同じような理由で、影の出来た月面でのそのときの太陽高度を直接測定することも不可能である。それでは、月面の山やクレータの高さを測定するために必要となる、月面の影の長さや太陽高度はどのようにして求めることができるのだろうか。以下ではこれらの量の測定法を考えてみよう。

まず影の長さの測定を考える。望遠鏡で月面の画像をとると、その画像上にはいろいろな地

¹⁷⁾ 月面の様々な地形に関しては別に記述する。

形とそれらの影が写っているのが確かめられるであろう。画像上のこれらの影の長さから、月面にできている影の実際の長さを求めることを考える。画面上の影の長さから月面上でのその影の実際の長さを求めるには、画面の縮尺を知ることが必要となる。画面上には影のほかに様々な地形が写っているが、その地形のうちのどれか一つの月面上における実際のサイズがわかっているならば、画面上のその地形のサイズと比較して画面の縮尺を知ることが可能となる。

ここでは、「日影の科学2」のために用意した月面図¹⁸⁾を用いて、画像の縮尺を調べることにしよう。この月面図には縮尺が与えてあるので、その図面上の地形のサイズから、それらの実際の大きさが求められる。そこで調べたい画像上の一つの地形（例えばクレーター）に注目して、その地形がデータベース記載の月面図のどの地形に対応するかを特定する。特定された地形の実際の大きさは、上に述べた手続きで既に求められているから、その大きさと問題の画像上の同じ地形のサイズの比から、その画像の縮尺を求めることが可能となる。このようにして求められた画像の縮尺を使って、同じ画像に写っているいろいろな影の長さの月面上における実際の長さが計算できることになる。

2.2.2 月面で見える太陽の高度角

地球上での太陽高度角 h は、「日影の科学 I」の (1.16) の第 3 式で与えたように

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H \quad (2.3)$$

から求められた。ここで ϕ は観測地点の緯度を表し、 δ は観測した日の太陽の赤緯である。また、 H は太陽の時角であり、観測地点の経度と太陽の赤経から決まる量である。太陽の赤経・赤緯は、地上で南中時の太陽が真上にくる点の経度と緯度であるから、この点に注目することによって月面上の太陽高度を表す式を与えることができる。

月面の山やクレーターの壁の高さを、その影の長さから測定するには、影ができた月面上の位置における観測時の太陽高度を求めることが必要となる。求めるべき月面上の太陽高度角を $h_{\odot}$ とする。月面上で影ができる点（観測地点にあたる）の月面における経度と緯度をそれぞれ $(\eta_{\odot}, \theta_{\odot})$ とし、そのとき太陽が真上にある点（月面上）の月面経・緯度をそれぞれ $(l_{\odot}, b_{\odot})$ としたとき、地上の関係式 (2.3) に対応する月面上の式は

$$\sin h_{\odot} = \sin b_{\odot} \sin \theta_{\odot} + \cos b_{\odot} \cos \theta_{\odot} \cos (l_{\odot} - \eta_{\odot}) \quad (2.4)$$

となる。 $l_{\odot}$ のかわりに $c_{\odot} \equiv 90^{\circ} - l_{\odot}$ を導入すると、(2.4) は

$$\sin h_{\odot} = \sin b_{\odot} \sin \theta_{\odot} + \cos b_{\odot} \cos \theta_{\odot} \cos (c_{\odot} + \eta_{\odot}) \quad (2.5)$$

と書き直すことができる。ここで $c_{\odot}$ は太陽の月面余経度と呼ばれる。

月面上の影の位置の月面経・緯度と、その時刻に太陽が真上にくる位置の月面余経度と月面

¹⁸⁾ データベースのページ参照（現在準備中）。

緯度 $(c_{\odot}, b_{\odot})$ がわかれば、(2.5) から影を観測した時刻における月面上のその点での太陽の高度角 $h_{\odot}$ を求められる。その角度と2.2.1節の方法で求めた月面の影の長さ $L_{\odot}$ から、影の原因となる月面の山やクレーターの壁の高さ $\ell_{\odot}$ は

$$\ell_{\odot} = L_{\odot} \tan h_{\odot} \quad (2.6)$$

で与えられる。

ところで、望遠鏡で撮影した画像上の影の月面経・緯度 $(\eta_{\odot}, \theta_{\odot})$ は、画像の地形を月面図の地形と照らし合わせ、画像上の地形が月面図のどの地形に対応するかを特定することによって、特定された地形の経・緯度を資料の月面図から読み取ることによって求めることができる。残された問題は、影が撮影された日時に太陽が真上にくる位置の月面余経度と月面緯度 $(c_{\odot}, b_{\odot})$ を求めることである。

2.2.3 月面余経度 $c_{\odot}$ と月面緯度 $b_{\odot}$ の求め方

影が撮影されたときの月面余経度 $c_{\odot}$ と月面緯度 $b_{\odot}$ は、その日時ににおける太陽の位置と地球の位置および月の位置関係、さらに月の自転軸の傾き等から決められる。太陽を基準にしたときの地球の位置は、第一義的には太陽と地球間の重力作用によって決まるものであるが、そのほかに月を含む他の天体（金星・火星等）と地球間の重力もその位置決定に影響を及ぼす。さらには相対性理論の効果も考慮する必要がある¹⁹⁾。これらの効果を考慮して太陽と地球および月の位置関係を、時間を追って調べることは天体力学の重要な課題であるが、それらの考察は別に記すことにする。ここでは天文年鑑に記載されている各日時ににおける太陽直下点の月面余経度 $c_{\odot}$ と緯度 $b_{\odot}$ に関するデータを用いることにする。このデータは日本標準時における9時の理論値であるから、目的の日時ににおける $c_{\odot}$ と緯度 $b_{\odot}$ を求めるには、該当日のデータに観測時までの時刻のズレ（9時と観測時の時刻の差）を考慮することが必要となる。具体的な求め方は次の節で与える。

上で求めた太陽直下点の月面余経度 $c_{\odot}$ と緯度 $b_{\odot}$ 、および影の位置の月面経緯度 $(\eta_{\odot}, \theta_{\odot})$ を (2.5) に代入すると、求めるべき太陽の高度角 $h_{\odot}$ が計算でき、それと影の長さ $L_{\odot}$ から最終的に月面のクレーター等の高さが得られることになる。ところで、黄道面（地球を中心とした座標系で太陽が動く平面：太陽は常にこの平面上にある）に対する月の自転軸の傾きは小さい (1.8°) ので、日時にに関わりなく $b_{\odot}$ も常に小さい値となる（天文年鑑参照）。この点を考慮すると、(2.5) は

$$\sin h_{\odot} = 3.14 \times \left(\frac{b_{\odot}}{180}\right) \sin \theta + \cos \theta \sin(c_{\odot} + \eta_{\odot}) \quad (2.7)$$

と近似することができる²⁰⁾。ここで $b_{\odot}$ は度単位で表した角度の大きさを意味する。月面上の影の長さからクレーター等の高さを測る問題では、近似式 (2.7) を用いることもできる。

¹⁹⁾ 地球の位置決定に及ぼす他の天体の影響と相対性理論の効果等の扱いに関しては別に記す。

2.3 月の影解析の実例

望遠鏡で撮影した月面画像を用いて、月面上の影の長さからクレーターの壁の高さを求めてみよう。画像1は、東京府中市（五藤光学社屋上）に設置したインターネット望遠鏡を用いて、2004年4月29日20時に撮影した月面（一部）の画像である。

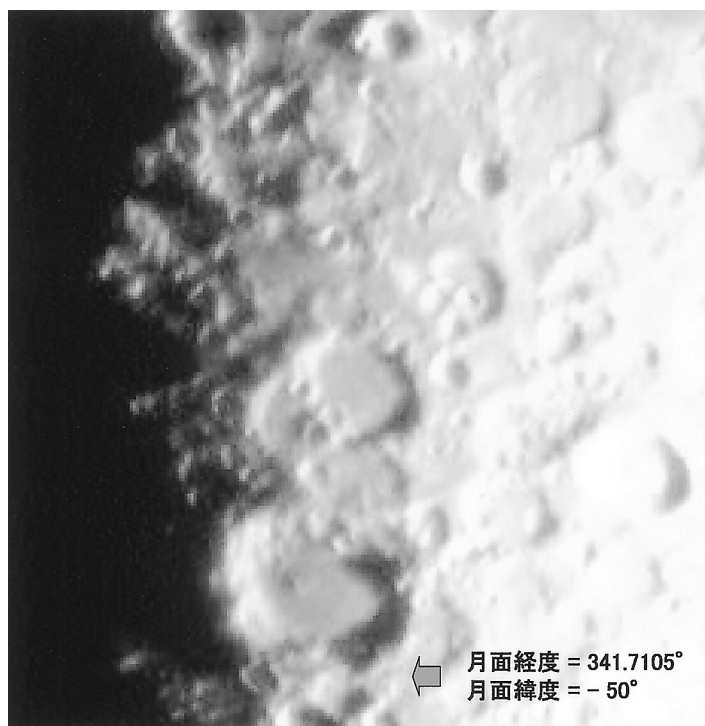
2.3.1 考察1：画像上の地形を特定する

参考資料として用意した月面の地形図と照らし合わせて見ることによって、画像上のクレーターはロンゴモンタヌスと呼ばれるものであることが特定できる。地形図のこのクレーターの大きさとその縮尺から、ロンゴモンタヌスの実際の直径 $d_{\odot}$ は

$$d_{\odot} = 145 \text{ km} \quad (2.8)$$

であること、および地形図の経緯度から、このクレーターの月面上での経度 $\eta_{\odot}$ と緯度 $\theta_{\odot}$ が

$$\eta_{\odot} = 341.7^{\circ}, \quad \theta_{\odot} = -50.0^{\circ} \quad (2.9)$$



画像1 月面写真1

²⁰⁾ 角度 $b_{\odot}$ が小さいとき、すなわち $(\frac{b_{\odot}}{180})$ が1に比べて非常に小さいとき、 $\sin b_{\odot} \sim 3.14 \times (\frac{b_{\odot}}{180})$, $\cos b_{\odot} \sim 1$ と近似できることを使った。

であることがわかる。

2.3.2 考察2：観測日時の太陽直下点の月面余経度 $c_{\odot}$ と月面緯度 $b_{\odot}$ を求める

次に観測日時（2004年4月29日20時）の太陽直下点の月面余経度 $c_{\odot}$ と月面緯度 $b_{\odot}$ を求める。天文年鑑の掲載資料によれば、2004年4月29日9時における太陽直下点の $c_{\odot}$ と月面緯度 $b_{\odot}$ は

$$c_{\odot}=21.58^{\circ}, \quad b_{\odot}=-0.10^{\circ} \quad (2.10)$$

であり、4月30日9時におけるこれらの値は

$$c_{\odot}=33.77^{\circ}, \quad b_{\odot}=-0.07^{\circ} \quad (2.11)$$

である。

4月29日9時から4月30日9時までの24時間における余経度の増加分（ 12.19° ）を時間で均等割して、単位時間当たりの増加分（ 0.508° ）を求め、その11倍（20時－9時）を29日の値に加えることによって、求める余経度（4月29日20時の）は

$$c_{\odot}=27.17^{\circ} \quad (2.12)$$

であることがわかる。同様にして、同じ時刻の $b_{\odot}$ は

$$b_{\odot}=-0.09^{\circ} \quad (2.13)$$

となる。

2.3.3 考察3：太陽高度角 $h_{\odot}$ を求める

(2.9) と (2.12) および (2.13) を、太陽高度角を求める式 (2.5) または (2.7) に代入すると、 $\sin h_{\odot}=0.101$ となり、ロンゴモンタヌスでのこのときの太陽高度角 $h_{\odot}$ と $\tan h_{\odot}$ は

$$h_{\odot}=5.80^{\circ} \quad \rightarrow \quad \tan h_{\odot}=0.102 \quad (2.14)$$

となる。

2.3.4 考察4：影の実際の長さを求める

画像上の影の長さを測定すると0.60cmであった。月面におけるこの影の実際の長さを求めるには、画像1の縮尺を知る必要がある。(2.8) よりロンゴモンタヌスの実際の直径は145kmであること、また画像上のこのクレーターの直径を測定すると3.90cmであることから、画像の縮尺の値は 2.69×10^{-7} であることがわかる。従って、画像上で0.60cmの影の月面上での実際の長さ $L_{\odot}$ は

$$L_{\odot}=22.3\text{km} \quad (2.15)$$

となる。

2.3.5 考察5：クレーターの壁の高さを求める

ロンゴモンタヌスの影の長さ (2.15) と、このときの太陽高度 (2.14) から、このクレーターの壁の高さ $l_{\odot}$ を求めると

$$l_{\odot} = L_{\odot} \tan h_{\odot} = 2.28 \text{ km} \quad (2.16)$$

となる。すなわち、望遠鏡で撮影した画像上の影の長さから、クレーター（ロンゴモンタヌス）の壁の高さは約2300mであることが明らかになった。

2.3.6 補注

クレーターの壁の高さを求めるためのこれまでの一連の手続きでは、途中で三角関数の数値計算を行うことになる。この計算には関数電卓または三角関数の数値表が必要になるが、それらを持っていない人のために、必要な観測データを入力することによって上記の計算を全て済ませてくれるプログラムファイルを用意する²¹⁾。このプログラムを使用すれば、太陽と月の位置計算、それを用いて観測日時の太陽直下点の月面余経度と緯度の計算、および観測地点での太陽高度の計算等、必要な計算が全て終了し求める壁の高さが得られる。従って、三角関数の数値計算の準備がない人、またはいろいろなクレーターの高さの測定のために繰り返しこの種の計算を行うことになる人には、この計算プログラムの使用を薦めたい。ただし、このプログラムの背後にある考え方は上記の手計算と同じであることを記憶に留めておきたいものである。

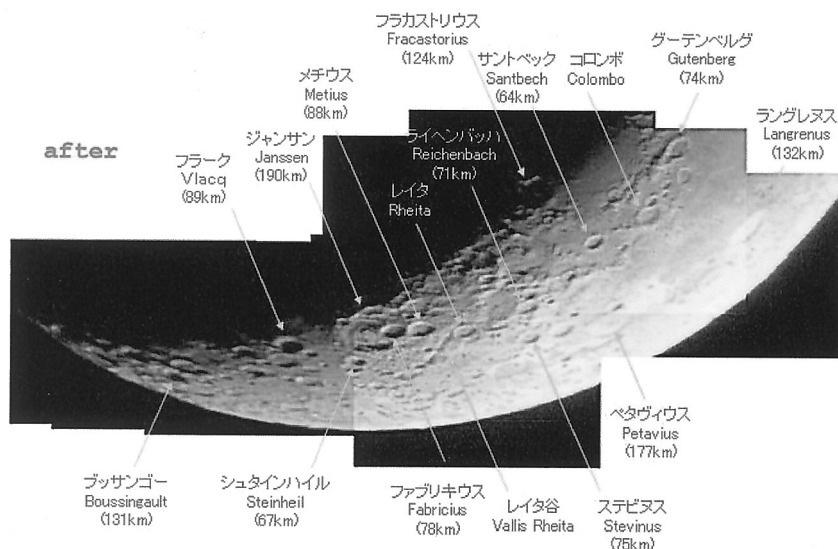
2.4 カリキュラム案

2.3節と同じ方法で月面の地形の高さを求めるカリキュラムを用意する。まずここで用意した画像2上のクレーターの高さを求める課題を考える。次に自分で撮った画像上のクレーターの高さを求めることを試してみよう。

2.4.1 課題1：画像に写っているクレーターの経緯度を求める

画像2は東京府中市（五藤光学社屋上）に設置したインターネット望遠鏡を用いて、2004年6月22日20時に撮影した9枚の画像を合成して得た三日月の半分である。画像2上のクレーターにはそれぞれの名前とその直径が示されている。資料として用意した月面の画像と照らし合わせて、画像上のいろいろなクレーターの月面経緯度 ($\eta_{\odot}$, $\theta_{\odot}$) を求めよ。

²¹⁾ 現在準備中



画像2 月面写真2

2.4.2 課題2：画像撮影日時における太陽直下点の月面余経度と緯度を求める

天文年鑑によれば2004年6月22日9時における太陽直下点の月面余経度と月面緯度は $(321.17^\circ, 1.20^\circ)$ であり、6月23日9時のそれらの値は $(333.41^\circ, 1.22^\circ)$ であった。これらのデータから、6月22日20時における太陽直下点の月面余経度 $c_\odot$ と月面緯度 $b_\odot$ を求めよ。

2.4.3 課題3：クレーターの位置での太陽高度角 $h_\odot$ を求める

上で求めた6月22日20時における太陽直下点の余経度・緯度と各クレーターの月面経緯度から、各クレーターの位置でのこの日時における太陽の高度角 $h_\odot$ と $\tan h_\odot$ を求めよ。

2.4.4 課題4：画像の縮尺を求める

画像2上の一つのクレーターの大きさを測定し、月面上のその実際の大きさと比較することによって画像の縮尺を求めよ。画像2上の他のクレーターを選んで、同様な手続きで画像の縮尺を求め、これらの平均値を求めよ。

2.4.5 課題5：クレーターの影の長さを求める

課題4で求めた縮尺（の平均値）と画像2上のクレーターの影の大きさから、これらのクレーターの影の月面上における実際の長さ $L_\odot$ を求めよ。

2.4.6 課題6：クレーターの壁の高さを求める

課題3で求めた各クレーターの位置での太陽高度 $h_\odot$ と、課題5で求めた影の長さ $L_\odot$ から、それらのクレーターの壁の高さ $l_\odot$ を求めよ。

2.4.7 課題7：自分で撮影した画像上のクレーターを調べよ

自分で月面の各部分の画像を撮影し、撮影した画像上のクレーターについて、課題1から課題6までの手続きを踏んで、そのクレーターの壁の高さを測定しよう。

2.4.8 課題8：日時を変えて測定しよう

同じクレーターの位置でも、日時が違えばそこでの太陽の高度は異なるから、影の長さも違うことになる。日時を変えて同じクレーターの画像を撮影し、その影の長さからクレーターの壁の高さを測定し、以前に求めた高さの測定値と比較してみよう。この種の測定を繰り返すことによって、より正確な高さの測定値が求められることになる。