

Title	公共財の私的供給に関するナッシュ均衡の安定性
Sub Title	Stability of Nash equilibrium in the private provision of public goods
Author	鷺田, 豊明(Washida, Toyoaki)
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	2008
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.100, No.4 (2008. 1) ,p.913(29)- 930(46)
JaLC DOI	10.14991/001.20080101-0029
Abstract	一人一人が環境を良くしようとする行為は公共財の私的供給として表現できる。そして、この集合的行為においては、ゲーム論でいうナッシュ均衡を定義することができる。ある受け入れ可能な想定のもとで、このナッシュ均衡がユニークに存在することは以前から知られていた。しかし、この均衡の安定性については、十分議論されてこなかった。本論文では、一人一人の自発的な公共財供給行為はどのような状況の下でナッシュ均衡を安定にするのかを明らかにするとともに、その条件が社会形成や交渉の妥結可能性に対する理解の一つの力ギになることを示す。 A behavior where everyone contributes to a better environment can be represented as a private provision of public goods. We can define this collective act hereinafter in game theory terms as the Nash equilibrium. From an acceptable assumption, it is previously known that this Nash equilibrium exists uniquely. However, the stability of this equilibrium has not been sufficiently discussed. This study clarifies under which conditions the voluntary public goods provision behavior from individuals leads to Nash equilibrium stability. In addition, it indicates the conditions under which it becomes one of the keys for understanding the possibility of social formation and negotiation conclusions.
Notes	小特集：環境経済学の新展開(下)
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-20080101-0029

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

公共財の私的供給に関するナッシュ均衡の安定性

Stability of Nash Equilibrium in the Private Provision of Public Goods

鷲田 豊明(Toyoaki Washida)

一人一人が環境を良くしようとする行為は公共財の私的供給として表現できる。そして、この集合的行為においては、ゲーム論でいうナッシュ均衡を定義することができる。ある受け入れ可能な想定のもとで、このナッシュ均衡がユニークに存在することは以前から知られていた。しかし、この均衡の安定性については、十分議論されてこなかった。本論文では、一人一人の自発的な公共財供給行為はどのような状況の下でナッシュ均衡を安定にするのかを明らかにするとともに、その条件が社会形成や交渉の妥結可能性に対する理解の一つのカギになることを示す。

Abstract

A behavior where everyone contributes to a better environment can be represented as a private provision of public goods. We can define this collective act hereinafter in game theory terms as the Nash equilibrium. From an acceptable assumption, it is previously known that this Nash equilibrium exists uniquely. However, the stability of this equilibrium has not been sufficiently discussed. This study clarifies under which conditions the voluntary public goods provision behavior from individuals leads to Nash equilibrium stability. In addition, it indicates the conditions under which it becomes one of the keys for understanding the possibility of social formation and negotiation conclusions.

公共財の私的供給に関するナッシュ均衡の安定性*

鷲 田 豊 明

要 旨

一人一人が環境を良くしようとする行為は公共財の私的供給として表現できる。そして、この集合的行為においては、ゲーム論でいうナッシュ均衡を定義することができる。ある受け入れ可能な想定のもとで、このナッシュ均衡がユニークに存在することは以前から知られていた。しかし、この均衡の安定性については、十分議論されてこなかった。本論文では、一人一人の自発的な公共財供給行為はどのような状況の下でナッシュ均衡を安定にするのかを明らかにするとともに、その条件が社会形成や交渉の妥結可能性に対する理解の一つのカギになることを示す。

キーワード

ナッシュ均衡，安定性，公共財

1. はじめに

環境は公共財的性格を強く持ち、一個人や一企業さらには一国家による自発的環境保全行為は公共財の私的供給としてとらえることができる。相互に他者の行為が自己の最適状態に影響を与えるために、全体としての適切な環境提供水準が確定しない。そこで一般に非協力ゲームのナッシュ均衡が一つの均衡概念として用いられる。ナッシュ均衡は、均衡において、どの主体も状態を変更する誘因を持たない。Bergstrom [2, 3] は、この公共財の私的供給に関するナッシュ均衡が、私的財も公共財もともに正常財であるという、ごく弱い仮定の下でユニークであることを証明した。この均衡の安定性については、Cornes [1] が、プレーヤーが二人の場合に、均衡が二つある場合には、一つが安定でもう一つが不安定であること、あるいは均衡が一つの場合は安定であるという、ごく初歩的な言及があるのにとどまっている。

3 人以上の場合には、均衡がたとえ一つであっても、必ずしも安定にならない。この見通しの悪さと問題の複雑性が、このナッシュ均衡の安定性についての議論を不足させている原因と考えられ

* 本論文に対して、慶應義塾大学経済学部の中田衛士氏、大沼あゆみ氏から貴重なコメントをいただいた。ここに記して感謝致します。なお残された誤りは筆者の責任です。

る。しかし、このことがナッシュ均衡の安定性の議論が重要でないことを意味しているわけではない。環境にとどまらず、国家や自治体の強制力抜きに提供される多数の公共財があり、また、国家や自治体という存在自体が公共財を合理的に提供する手段として発生していると考えられるもとは、公共財の私的供給がどのような条件のもとに安定となるかを知ることは、われわれの社会の根本的な成り立ちをとらえる鍵になるのである。

この公共財の私的供給の安定性は、寡占におけるクールノー均衡の安定性問題と密接に関連している。クールノー均衡については 1960 年代以降精力的に研究が進められた。議論は Theocharis [13] によって開始され、たくさんの論文が発表された。たとえば、Fisher[4]、Hahn[6]、Okuguchi[8, 9]、Zhang[14]、Szidarovszky[11] などがある。

Theocharis [13] は、2 者の場合の安定性と、主体がそれ以上になった場合の不安定性を示した。その後の議論は、各主体が前期の結果に対して即座に最適水準に調整するのではなく、部分調整と連続型モデルへの拡張に向いていった。そして、このような展開の中で、多数主体においても安定性があらわれることが明らかにされた。しかし、前期の結果に対して、各主体が即座に調整するという状況は、最も基礎となる場合と考えられ、この点での議論が保留されていることは、重要な課題を残していることを意味する。

本論文の目的は、公共財の私的供給におけるナッシュ均衡が局所的に安定であるための必要十分条件を一般の多数プレーヤーの場合について明らかにすることである。われわれのモデルにおけるプレーヤーは、彼らの公共財の供給水準を前期の状態に対して、即座に最適水準に変更するモデルであり、この点において多数プレーヤーのクールノー均衡の安定性に関する議論とは異なっている。その意味では、われわれの議論は、もともとの Theocharis [13] の議論を直接発展させたものといえる。

この安定性の必要十分条件を解明することによって、さらに、ナッシュ均衡の部分安定性の概念を与えることができる。すなわち、たとえすべての主体が参加するゲームにおけるナッシュ均衡が不安定であっても、その中には、あるグループがあって、そのグループのメンバー同士での部分的な公共財供給ゲームが安定になり、その内部ではどのようなグループも安定になり、そのグループに新たなメンバーを加えると不安定になってしまうようなグループが存在する。すなわちこれは、ナッシュ均衡の安定性が社会の規模に依存し、社会の規模が大きくなればなるほど不安定要因が強くなることを意味している。

また、本論文では、個々の主体の公共性とナッシュ均衡の関係を解明している。主体の公共性とは、1 単位の所得の増加に対する公共財提供の割合をさす。社会に参加するどの主体に関しても、この意味での公共性が増加すると、社会の安定性のポテンシャルが強まることがわかった。

以上のことは、社会の中で他者の公共財供給量に依存せずに積極的に公共財供給を一貫して供給し続ける主体が多いほど、社会の安定性が高まることを示している。あるいは、環境をめぐる交渉

において、参加している個人、企業、国家が自己利益ばかりを考えて交渉していると交渉の安定性は確保できないが、一貫して積極的な環境保全政策を主張する主体が多くなると、交渉は収束に向かうことを示している。

2. モデルと仮定

公共財を私的に供給する n 人のプレーヤーからなる社会を考える。ある期に、第 i プレーヤーは x_i 単位の私的財を消費し、 g_i 単位の公共財を供給する。価格の変化は本論文では非本質的であるので、両財の 1 単位の価格が 1 になるように財の単位が調整されているとしよう。第 i プレーヤーは一定の所得 w_i をすべての期で得ているとする。したがって予算制約式は次のようになる。

$$w_i = x_i + g_i \quad (1)$$

i 以外のプレーヤーが供給している公共財の量を G_{-i} とする。すなわち、

$$G_{-i} = g_1 + g_2 + \cdots + g_{i-1} + g_{i+1} + \cdots + g_n \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

である。効用関数 $u^i(x_i, g_i + G_{-i})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ は、消費者選択理論における適正な無差別曲線を与えるものであり、必要な回数だけ連続的に微分可能な準凹関数だとしてよう。

次のような基本的な仮定をおく。

仮定 1：私的財と公共財の両方ともに正常財である。

このモデルにおいて、プレーヤー i は式 (1) の制約と与えられた他者の公共財供給量 G_{-i} のもとで効用関数を最大化する。一階の条件は次のようになる。

$$-u_x^i(w_i - g_i, g_i + G_{-i}) + u_g^i(w_i - g_i, g_i + G_{-i}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (2)$$

ここで $u_x^i = \partial u^i / \partial x_i$, $u_g^i = \partial u^i / \partial g_i$ である。第 i 番目の式は与えられた G_{-i} のもとでのプレーヤー i の反応関数である。ナッシュ均衡は、すべての反応関数を満たす点であり、 $(g_1^*, g_2^*, \cdots, g_n^*)$ とあらわすことにしよう。仮定 1 は Bergstrom [2, 3] による、均衡の唯一性を約束している。

仮定 2：ナッシュ均衡の近傍における任意の非負の G_{-i} , $i = 1, 2, \cdots, n$ のもとで、最適な g_i は一意の正值をとる。

この仮定はわれわれの議論は制約するが、局所的安定性を主題とするわれわれの議論では反応関数をもたらない状況あるいは端点解を排除するために必要である。

3. ナッシュ均衡の安定性の必要十分条件

われわれの想定のもとでは、一階の条件式(2)によって、第 i プレーヤーは連続的な反応関数 R_i を持つ。すなわち、

$$g_i = R_i(G_{-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

である。

この反応関数は、各主体は他者の公共財供給量に対して即座に最適な自己の公共財供給量を決定することをあらわしている。この反応関数は連続的に微分可能なので、ヤコビアン R が次のように定義できる。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & \cdots & -s_1 \\ -s_2 & 0 & \cdots & -s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_n & -s_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ヤコビアンの各要素は次のようにあらわされる。

$$s_i = \frac{u_{gg}^i - u_{xg}^i}{u_{xx}^i - u_{gx}^i + u_{gg}^i - u_{xg}^i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

以下の議論の簡単化のために、ヤコビアンの各要素の符号を反転させた行列 S を定義する。すなわち、

$$S \equiv -R \quad (4)$$

である。

一方、一階の条件(2)を微分することによって次の式を得る。

$$\left(1 + \frac{u_{gg}^i - u_{xg}^i}{u_{xx}^i - u_{gx}^i}\right) \frac{dg_i}{dw_i} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

プレーヤー i の予算制約式と仮定 1 によって、

$$0 < \frac{dg_i}{dw_i} < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

をえる。これらの式から、

$$v_i \equiv \frac{u_{gg}^i - u_{xg}^i}{u_{xx}^i - u_{gx}^i} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

を得る。(3) および(5)式によって、

$$0 < s_i = \frac{v_i}{1 + v_i} < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

となることがわかる。

まず、次の補題を証明する。

補題 1: $|I - S| > 0$ は、行列 $I - S$ がホーキング・サイモンの条件を満たすための必要十分条件である。

証明:

まず、ホーキング・サイモン条件 (たとえば Takayama [12] を参照) そのものを示しておこう。

部分行列 $S_k, k = 1, 2, \dots, n$ を次のように定義する。

$$S_k = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ s_2 & 0 & s_2 & \cdots & s_2 \\ s_3 & s_3 & 0 & \cdots & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_k & s_k & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

H_k を行列 $I - S$ の k 番目の首座小行列式とし、 I_k を k 次元の単位行列としよう。すなわち、

$$H_k = |I_k - S_k| \quad k = 1, 2, \dots, n$$

である。この定式化と、 $S \geq 0$ の事実から、ホーキング・サイモン条件は次のようにあらわされる。

$$H_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

したがって、即座に必要な条件が示せる。すなわち、ホーキング・サイモン条件が満たされるならば、

$$|I - S| = H_n > 0.$$

でなければならない。

次に十分条件を示す。これは、もし $|I - S| > 0$ ならば、ホーキング・サイモン条件が満たされることを示すことである。

$0 < s_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$ であるので、ただちに次のことがわかる。

$$H_1 = 1 > 0, H_2 = 1 - s_1 s_2 > 0.$$

$k \geq 2$ に関して、一般に、 H_k は次のように示せる。

$$H_k = \begin{vmatrix} 1 & -s_1 & -s_1 & \cdots & -s_1 \\ -s_2 & 1 & -s_2 & \cdots & -s_2 \\ -s_3 & -s_3 & 1 & \cdots & -s_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_k & -s_k & -s_k & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

この行列式において k 番目の列の値を, k 番目の列以外からそれぞれ引くことによって次のような変形ができる。

$$H_k = \begin{vmatrix} 1+s_1 & 0 & 0 & \cdots & -s_1 \\ 0 & 1+s_2 & 0 & \cdots & -s_2 \\ 0 & 0 & 1+s_3 & \cdots & -s_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_k-1 & -s_k-1 & -s_k-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

k 番目の列の値から k 以外の各 i 列の値を引くことによって次の行列式を得る。

$$H_k = \begin{vmatrix} 1+s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1+s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -s_k-1 & -s_k-1 & -s_k-1 & \cdots & M_k \end{vmatrix},$$

ただし,

$$M_k = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1+s_i} \right) (1+s_k) \quad k=2,3,\cdots,n. \quad (7)$$

である。

したがって, H_k は次のようになる。

$$H_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1+s_i) M_k \quad k=2,3,\cdots,n \quad (8)$$

また, $k=3,4,\cdots,n$ について次の式が成立する (数学注1 参照)。

$$\begin{aligned} H_{k-1} - H_k &= \prod_{i=1}^{k-2} (1+s_i) M_{k-1} - \prod_{i=1}^{k-1} (1+s_i) M_k \\ &= \{M_{k-1} - (1+s_{k-1})M_k\} \prod_{i=1}^{k-2} (1+s_i) \\ &= s_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1+s_i} \right) \prod_{i=1}^{k-1} (1+s_i). \end{aligned} \quad (9)$$

式の右辺は厳密に正である。さらに $1 = H_1 > H_2$ であるから,

$$H_{k-1} > H_k \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (10)$$

となる。 $|I - S| > 0$ は $H_n > 0$ であるから,

$$H_1 > H_2 > \dots > H_{n-1} > H_n > 0. \quad (11)$$

となり, これはホーキンス・サイモン条件が満たされることを意味する。したがって, $|I - S| > 0$ は行列 $I - S$ がホーキンス・サイモン条件を満たす必要かつ十分な条件である。 (証明終わり)

さらに次の補題を証明する。

補題 2: $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ をヤコビアン R の固有値とする。このとき $I - S$ がホーキンス・サイモン条件を満たす必要十分条件は $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ である。

証明:

行列 S の固有値を $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ とする。 $I - S$ がホーキンス・サイモン条件を満たすとしよう。これはフロベニウス根 ω_f が $0 < \omega_f < 1$ かつ $|\omega_i| \leq \omega_f, i = 1, 2, \dots, n$ であることと同値である。(Theorem 4.D.2 in Takayama [12]) 一方, $S = -R$ は次のことを意味する。

$$\{-\omega_i | i = 1, 2, \dots, n\} = \{\lambda_i | i = 1, 2, \dots, n\}.$$

したがって, R には負の単根 λ_f が存在し,

$$|\lambda_i| \leq |\lambda_f| < 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

が成立することを意味する。これで補題の半分の証明された。

一方, もし $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ ならば, 上記の同値変形にしたがって, $|\omega_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ が満たされる。 S は非負行列であるからフロベニウス根 $\omega_f (> 0)$ が存在し, $|\omega_i| \leq \omega_f < 1, i = 1, 2, \dots, n$ である。これは等価的にホーキンス・サイモン条件を満たすことを意味する。補題の後半も証明された。 (証明終わり)

以上で, 公共財私的供給のナッシュ均衡が安定である必要十分条件を示す準備が整った。

定理 1: (ナッシュ均衡の安定条件)

仮定 1 および仮定 2 のもとで, 公共財の私的供給におけるナッシュ均衡が局所的に安定であるため

の必要十分条件は $|I - S| > 0$ が成立することである。

証明：

補題 1 および補題 2 によって、 $|I - S| > 0$ であることと R の固有値のすべてが、絶対値で 1 よりも小さいものであることがわかった。それは、オストロフスキー定理 (Ortega [10] 参照) によって、ナッシュ均衡が局所的に安定であることを意味する。一方、ナッシュ均衡が局所的に安定であるならば、ヤコビアン固有値の絶対値はすべて 1 以下である (たとえば Li [7] あるいは Szidarovszky [11] 参照)。したがって、補題 1 および補題 2 によってこれは $|I - S| > 0$ と同値である。

(証明終わり)

この定理についていくつか補足しておこう。第 1 に、もし $n = 2$ ならば $|I - S| = 1 - s_1 s_1 > 0$ である。したがって、ナッシュ均衡は安定である。これは、もともと Theocharis [13] によって証明されたものに等しい。もし、 $n \geq 3$ ならば、安定な場合と不安定な場合があらわれる。これについては、付録で数値例を示す。第 2 に、われわれのモデルの調整過程は反応関数に基づいている。したがって、そこにいかなる部分調整メカニズムも導入していない。第 3 に、この安定性定理は、そのままクールノー均衡にも適用できる。また、Gibbons [5] で定式化されているような、いわゆるコモンス利用に関するナッシュ均衡にも、そのまま応用できる。

4. 公共性と部分安定性

この節では、ナッシュ均衡の安定性定理の応用を示す。まず、いくつかの定義を与える。

ナッシュ均衡の安定性定理において、 $s_i, i = 1, 2, \dots, n$ は重要な役割を果たしている。すべてのプレーヤーにおいて $s_i = dx_i/dw_i$ かつ $dx_i/dw_i + dg_i/dw_i = 1$ であるから、 s_i はプレーヤー i の基準化された利己心をあらわしていると考えられる。すなわち、プレーヤー i は、1 単位所得が増加したときに s_i だけ私的消費財を増加させる。一方 $1 - s_i$ はプレーヤー i の公共心をあらわしていると考えられる。すなわちプレーヤー i は 1 願意の所得の増加のうち $1 - s_i$ を公共財の増加に振り向けるのである。次のように明示的に公共心を定義しておこう。

定義 1 : (利己心と公共心)

s_i はプレーヤー i の利己心、 $1 - s_i$ は公共心をあらわす。

次に $|I - S|$ の首座小行列式 $H_k, k = 1, 2, \dots, n$ を考察する。社会が n 人の個人からなり、それぞれ

の個人が番号 $1, 2, 3, \dots, n$ によって区別されているとする。一般性を失うことなく、この社会では k 人のメンバー $\{1, 2, \dots, k\}$ からなるグループが存在すると考えることができる。それらのグループをメンバーの数で識別し、グループ k とする。このとき、グループ k の潜在安定性を次のように定義する。

定義 2 : (潜在安定性)

$H_k = |I_k - S_k|$ をグループ k の潜在安定性という。グループ k は、メンバー $\{1, 2, \dots, k\}$ からなる。ただし、 $1 \leq k \leq n$ であり、 $k = n$ の場合は、グループ k 社会そのものである。

ここで次の定理が証明できる。

定理 2 : (潜在安定性と公共性)

仮定 1 および仮定 2 のもとで、グループ k のいずれかのメンバーの利己心が低下するか、公共心が増大すると、グループ k の潜在安定性は増大する。

証明 :

$j \in \{1, 2, \dots, k\}$ としよう。

$$\frac{\partial H_k}{\partial s_j} = - \prod_{i=1, i \neq j}^k (1 + s_i) \left(\sum_{i=1, i \neq j}^k \frac{s_i}{1 + s_i} \right) < 0, \quad (12)$$

が成立する (数学注 2 参照)。すなわち、 $1 - s_j$ の増加は H_k の増大を引き起こす。 (証明終わり)

定義 3 : (部分安定性)

あるグループ k が存在して、そのグループに属さないメンバーは、ナッシュ均衡のレベルの公共財を一貫して供給し、グループ k のメンバーは、自己の反応関数にもとづいて自由に公共財の供給水準を変えることができるでしょう。もし、このグループ k による公共財供給水準の調整が局所的安定性を持っているならば、このグループは社会の中で部分安定性を有すると定義する。

このとき、次の定理を証明できる。

定理 3 : (最大部分安定グループ)

仮定 1 および仮定 2 のもとで、もし社会全体が公共財の私的供給に関して局所的安定性を持っていないならば、あるグループ $K > 2$ が存在して、 $2 \leq k \leq K$ であるグループ k については部分安定

性があり, $K < k \leq n$ であるグループ k については, 部分安定性がない。

証明:

われわれの仮定のもとでは, 補題 1 の証明で示したように次のような不等式が成立する。

$$1 = H_1 > H_2 > \cdots > H_{n-1} > H_n. \quad (13)$$

そこで, $H_n < 0$ だとすると, $1 < K < n$ である, ある K が存在して,

$$1 = H_1 > H_2 > \cdots > H_K > 0,$$

かつ,

$$0 > H_{K+1} > H_{K+2} > \cdots > H_n.$$

となる。任意の $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ について, もしメンバー $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ が一貫してナッシュ均衡水準の公共財を供給し続けるならば, $H_k > 0$ は, プレーヤー $\{1, 2, \dots, k\}$ からなる公共財供給ゲームの繰り返しは定理 1 によって安定であることを意味する。一方, 任意の $k \in \{K+1, \dots, n\}$ について $H_k < 0$ であることは, プレーヤー $\{1, 2, \dots, k\}$ からなる公共財ゲームの繰り返しは, 定理 1 によって不安定である。したがって K この定理の条件を満たす最大グループである。(証明終わり)

他のメンバーが一貫してナッシュ均衡の水準で公共財を供給することは, 定理の意味を制限している。たとえば, グループ k に属しないメンバーがナッシュ均衡での水準以外の公共財を供給すれば全体のナッシュ均衡自体が変わってしまい, 潜在安定性もことごとく変わってしまう。しかし, たとえば, 各プレーヤーの公共心が, 他者の公共財の供給量に依存しない場合には, ナッシュ均衡は変わっても各グループの潜在安定性は変わらない。このような事態は, 所得の変化分が私的財と公共財の支出割合を変化させない場合に発生する。それは必ずしもまれな状況であるとはいえないだろう。付録の数値例の場合は, このような状況の一つの例となっている。

また, 新しいメンバーが社会に加わった場合にどうなるかという点も一つの問題である。新しいメンバーを $n+1$ であらわそう。明らかに, 社会の潜在安定性については $H_n > H_{n+1}$ が成立する。 $n+1$ が加わる前の, 古い潜在安定性を H'_n としたとき $H'_n > H_{n+1}$ が成立するとは限らない。というのは, $n+1$ が供給する公共財によって $H_k, k = 1, 2, \dots, n$ が変化するためである。しかし, これもまたそれほど悲観的になる必要はない。もし, すべてのプレーヤーが, 他者の供給する公共財によって公共心を変えなければ, 社会への新たな参加者によって, ナッシュ均衡自体は変わっても, 既存のプレーヤーにかかわる潜在安定性の状態は変わらないからである。したがって, 社会の規模の増大はナッシュ均衡の不安定性を高める可能性が高いというべきである。

5. まとめ

公共財の私的供給におけるナッシュ均衡は、必ずしも安定ではない。本論文では、正規化された公共財の消費性向を公共心と定義し、社会を構成するメンバーの公共心の増大は潜在安定性を強め、ナッシュ均衡の安定性を高めることを明らかにした。また、一般的に、社会の規模の増大は均衡の不安定化傾向を増加させ、安定化させるためにはプレーヤの一部が自由な選択にこだわらず、公共財の一貫した供給態度をとることが求められることも明らかにした。

これらの結論の含意を検討しよう。

第1に、われわれの社会の公共財供給のあり方との関連である。われわれの社会では、公共財を供給するのは国家であり地方自治体である。すなわち、社会を構成する個人や企業などの個別主体が自発的に供給するのにな変わって、国家が税という形で個別主体から税金を徴収し、公的な権力の行使として公共財を供給するのである。主権者としての個人が登場する前は、封建領主による一種の私的行為として公共財は供給されていた。しかし、人民主権と民主主義の登場とともに、国民国家があらわれ、同時に個人の自由が尊重されるようになった。個人の自由と国家の存在をどのように考えるのかは、ホブズやロック、さらにはルソーらによって重要なテーマとして議論されるようになった。自然状態が考察され万人の闘争が国家の必要性を生むという議論もあらわれる。このような問題を本稿で明らかにしたナッシュ均衡の安定性と関連づけることができる。すなわち、市場経済の普遍的な発展による自由な個人の登場（マルクスの本源的蓄積論とも関連している）は、公共財を供給する主体としての主権者の登場をも意味していた。しかし、実際の社会の規模は自発的な供給による安定性を確保できるほどに小さなものではなかった。そのために、徴税主体、あるいは公共財の供給主体としての国家が必要になったと考えられるのである。

第2に、モデルはある種の交渉過程を表現しているとも見ることできる。すなわち、各主体が毎回公共財の提供量を申し出て他者の提供量について自分の提供量が妥当かどうかを判断し、すべての当事者が他者の申し出に対して最適であると判断したときに交渉は妥結すると考えるのである。その妥結点はナッシュ均衡となる。そこで、もしそのナッシュ均衡が安定ならば交渉は最終的に妥結し、不安定ならば交渉は決裂ということになるのである。このような状況は、国際的な交渉の場であられる。たとえば、地球温暖化防止条約などの場合、全体としての削減量に対するそれぞれの国の評価・判断は異なっている。他者の削減量の申し出に対して、自己の削減量を提示するのであるが、均衡が安定であれば合意し不安定であれば合意できないということになる。この場合、たとえすべての国が参加する形で、他者の申し出に対して自由に削減量を変更するようなシステムで、均衡が不安定であっても、いくつかのリーダーシップをとる国があらわれて、自己の積極的削減量

の提示に一貫してこだわるならば、部分均衡の安定性があらわれて、削減が合意に導かれる可能性がある。このような状況は、国際交渉の場で頻繁に発生していると考えられるのである。

本論文に残されている課題は少なくない。第 1 に、そもそも、 k 人のメンバーが加わった首座小行列式 $H_k = |I_k - S_k|$ 、すなわちグループ k の潜在安定性の意味が十分明確になっていない。行列式が正の値をとることによってなぜナッシュ均衡が安定になるか、その経済的意味を明確にする必要がある。第 2 に、部分安定である場合、グループ外のメンバーが提示している公共財の提供量が、部分安定性に与える影響を精査する必要がある。これは同時に、新しいメンバーが加わることの影響を調べることにもなる。すでに、メンバーの公共心が他者の公共財提供量によって影響を受けない場合に、部分安定性が変化しないので議論は単純になることは本文で示している。しかし、公共心が変化し部分安定性が変化する場合の分析が必要になる。第 3 に、パレート最適性との関係の分析が求められる。よく知られているように、ナッシュ均衡は通常パレート最適性を有していない。公共財の提供量はパレート最適水準を下回る。パレート最適点に誘導するような政策がとられる場合についての検討が必要である。

付録：数値例

本文での分析についての数値例を示そう。今社会が 4 人のメンバーから成り立っているとする。それらをサフィックスの $\{1, 2, 3, 4\}$ で区別する。効用関数はコブ・ダグラス型で次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} u_1 &= (w_1 - g_1)^\alpha (g_1 + G_{-1})^{1-\alpha} \\ u_2 &= (w_2 - g_2)^\beta (g_2 + G_{-2})^{1-\beta} \\ u_3 &= (w_3 - g_3)^\gamma (g_3 + G_{-3})^{1-\gamma} \\ u_4 &= (w_4 - g_4)^\delta (g_4 + G_{-4})^{1-\delta} \end{aligned}$$

ただし、 $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ である。この効用関数のもとで次のような反応関数が導出される。

$$\begin{pmatrix} g_1^{t+1} \\ g_2^{t+1} \\ g_3^{t+1} \\ g_4^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\beta & 0 & -\beta & -\beta \\ -\gamma & -\gamma & 0 & -\gamma \\ -\delta & -\delta & -\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^t \\ g_2^t \\ g_3^t \\ g_4^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\alpha)w_1 \\ (1-\beta)w_2 \\ (1-\gamma)w_3 \\ (1-\delta)w_4 \end{pmatrix}$$

ヤコビアンが定数行列であるために、均衡が局所的に安定であれば同時に大域的にも安定になることがわかる。

すべてのグループの潜在安定性を列挙すると次のようになる。

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 & -\beta \\ -\gamma & -\gamma & 1 \end{vmatrix}, H_4 = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\beta & 1 & -\beta & -\beta \\ -\gamma & -\gamma & 1 & -\gamma \\ -\delta & -\delta & -\delta & 1 \end{vmatrix}$$

係数と所得の数値例を次のように与える。

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.34, \quad w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 10.$$

これによって各グループの潜在安定性が求められ次のようになる。

$$H_2 = 0.8844, \quad H_3 = 0.574592, \quad H_4 = -0.048122$$

したがって、グループ 2、および 3 については安定であるが、 $H_4 < 0$ であるからグループ 4、すなわち社会全体については不安定であることがわかる。この推論を実際に確かめてみよう。このモデルのナッシュ均衡は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} g_1^* = 0.32673 \\ g_2^* = 0.32673 \\ g_3^* = 0.32673 \\ g_4^* = 0.32673 \end{pmatrix}$$

初期状態を仮に次のように与えたとして。

$$\begin{pmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \\ g_3^0 \\ g_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 0.32673 \end{pmatrix}$$

この値は、第 0 期に各主体が自発的に、また任意に与えた公共財の供給水準である。その後各メンバーは、自己の反応関数によって公共財を供給する。この経路は図 1 にあらわされる。この図は第 8 期までの状況をあらわしている。この期間に、各主体の動きが同期化することだけははっきり読みとられるが、安定か否かは必ずしも明確になっていない。もう少し後までの経路を見ると、社会全体としてのナッシュ均衡の不安定性が理解できる。図 2 は第 74 期までの状況をあらわしている。

次に、この社会の部分安定性を示そう。いま、第 4 メンバーがナッシュ均衡のレベルで公共財の提供量を固定させたとする。このときの部分安定性は、図 3 に示されている。われわれのモデルは、パラメータの数値設定から明らかなように、初期状態をのぞけば全く同質のメンバーから成り立つ

図 1 社会全体についての反応経路

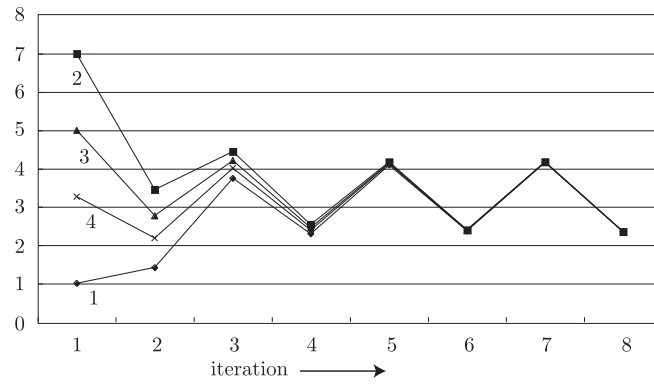


図 2 社会全体としてのナッシュ均衡の不安定性

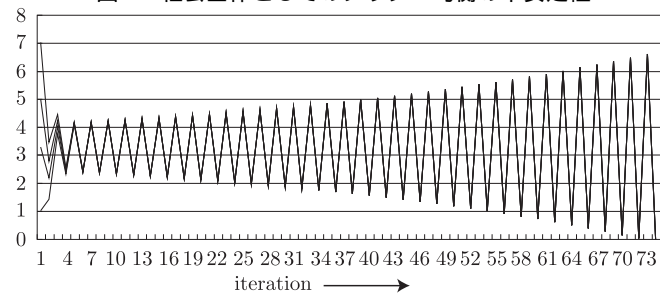


図 3 ナッシュ均衡の部分安定性 ($K = 3$)

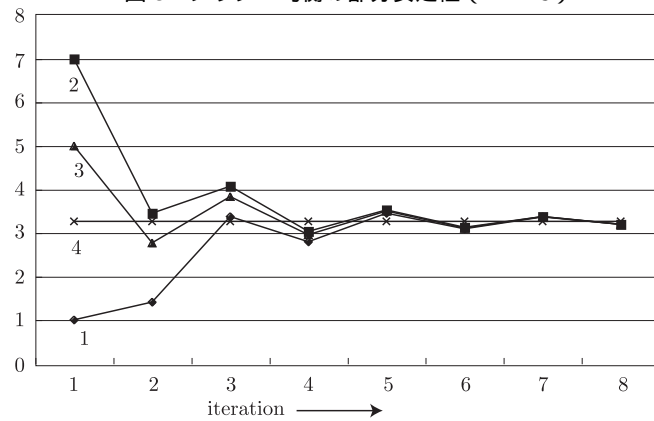
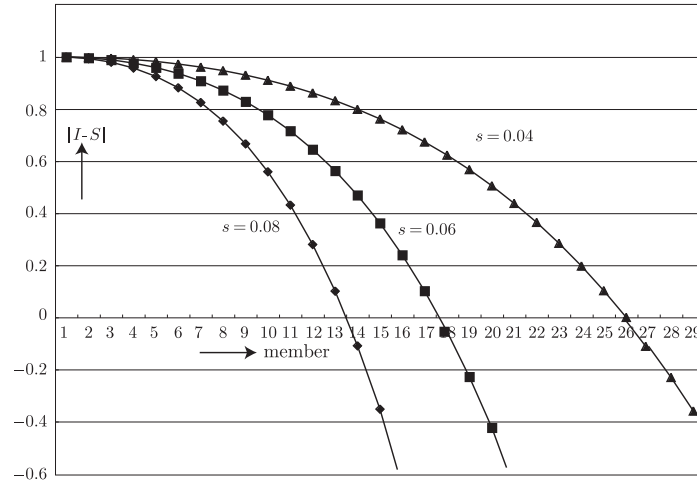


図4 社会の規模と潜在安定性



社会を想定している。このような社会であっても，もともと安定だったナッシュ均衡が，新しいメンバーの参加によって不安定になってしまうのである。

次に，社会の規模と社会の潜在安定性の間の関係を調べてみよう。図4は社会の規模の増大につれて $|I - S|$ がどのように変わるかを示している。この図には三つの場合が示されている。第1に，社会のメンバーのパラメータが等しく $s_i = 0.04$, $i = 1, 2, \dots, n$. である場合である。すなわち，社会全体の潜在安定性は次のようにあらわされる。

$$H_n = \begin{vmatrix} 1 & -0.04 & -0.04 & \cdots & -0.04 \\ -0.04 & 1 & -0.04 & \cdots & -0.04 \\ -0.04 & -0.04 & 1 & \cdots & -0.04 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0.04 & -0.04 & -0.04 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

部分安定性のある最大グループのメンバー数は25，すなわち $K = 25$ である。同様に，個人のパラメータ $s_i = 0.06$ とした場合には $K = 17$ となり， $s_i = 0.08$ とした場合には $K = 13$ となることがわかる。これらの結果は，本論文の定理で示したとおりの結果である。利己心が増大すると，それは人々の公共心が失われていくことを意味しているが，公共財供給に関わる社会の安定性は失われていくことがわかる。

数学注

1. 式 (9) の変形

$$\begin{aligned} H_{k-1} - H_k &= \prod_{i=1}^{k-2} (1 + s_i) M_{k-1} - \prod_{i=1}^{k-1} (1 + s_i) M_k \\ &= \{M_{k-1} - (1 + s_{k-1}) M_k\} \prod_{i=1}^{k-2} (1 + s_i) \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} &M_{k-1} - (1 + s_{k-1}) M_k \\ &= 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) - 1 - s_{k-1} + (1 + s_{k-1}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_k) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) + \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) (1 + s_k) \\ &\quad - s_{k-1} + \frac{s_{k-1}}{1 + s_{k-1}} (1 + s_{k-1}) (1 + s_k) \\ &= s_k \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) - s_{k-1} + s_{k-1} (1 + s_k) \\ &= s_k \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) + s_k s_{k-1} \\ &= s_k \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{s_i}{1 + s_i} + \frac{s_{k-1}}{1 + s_{k-1}} \right) (1 + s_{k-1}) \\ &= s_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_{k-1}) \end{aligned}$$

したがって,

$$H_{k-1} - H_k = s_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) \prod_{i=1}^{k-1} (1 + s_i).$$

2. 式 (12) の導出

式 (7) および (8) より, ただちに,

$$\frac{\partial H^k}{\partial s_k} = - \prod_{i=1}^{k-1} (1 + s_i) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) < 0.$$

であることがわかる。

$j \neq k$ としよう。このとき,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H^k}{\partial s_j} \\
&= \prod_{i \neq j}^{k-1} (1 + s_i) M^k - \prod_{i=1}^{k-1} (1 + s_i) \frac{1 + s_k}{(1 + s_j)^2} \\
&= \prod_{i \neq j}^{k-1} (1 + s_i) - \prod_{i \neq j}^{k-1} (1 + s_i) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} \right) (1 + s_k) - \prod_{i=1}^{k-1} (1 + s_i) \frac{1 + s_k}{(1 + s_j)^2} \\
&= \prod_{i \neq j}^{k-1} (1 + s_i) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} (1 + s_k) - \frac{1 + s_k}{1 + s_j} \right\} \\
&= \prod_{i \neq j}^{k-1} (1 + s_i) \left\{ 1 - \sum_{i \neq j}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} (1 + s_k) - \frac{s_j}{1 + s_j} (1 + s_k) - \frac{1 + s_k}{1 + s_j} \right\} \\
&= \prod_{i \neq j}^k (1 + s_i) \left\{ \frac{1}{1 + s_k} - \sum_{i \neq j}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} - \frac{s_j}{1 + s_j} - \frac{1}{1 + s_j} \right\} \\
&= \prod_{i \neq j}^k (1 + s_i) \left\{ - \sum_{i \neq j}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} + \frac{1}{1 + s_k} - 1 \right\} \\
&= \prod_{i \neq j}^k (1 + s_i) \left\{ - \sum_{i \neq j}^{k-1} \frac{s_i}{1 + s_i} - \frac{s_k}{1 + s_k} \right\} \\
&= \prod_{i \neq j}^k (1 + s_i) \left(- \sum_{i \neq j}^k \frac{s_i}{1 + s_i} \right) \\
&= - \prod_{i \neq j}^k (1 + s_i) \left(\sum_{i \neq j}^k \frac{s_i}{1 + s_i} \right).
\end{aligned}$$

である。したがって式 (12) が成立する。

(上智大学大学院地球環境学研究科教授)

参 考 文 献

- [1] Cornes, R. and T. Sandler, 1996, *The theory of externalities, public goods, and club goods*, Cambridge University Press.
- [2] Bergstrom, T., L. Blume and H. Varian, 1986, "On the private public goods," *Journal of Public Economics*, 29:25-49.
- [3] Bergstrom, T., L. Blume and H. Varian, 1992, "Uniqueness of Nash equilibrium in private provision of public goods: An improved proof," *Journal of Public Economics*, 49:391-392.
- [4] Fisher, F. M., 1961, "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustment and Increasing Marginal Costs," *Review of Economic Studies*, 28(2):125-135.
- [5] Gibbons, R., 1992, *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press.

- [6] Hahn, F. H., 1962, "The Stability the Cournot Oligopoly Solution," *Review of Economic Studies*, 29(4):329-331.
- [7] Li, W. and F. Szidarovszky, 1999, "An elementary result in the stability theory of time-invariant nonlinear discrete dynamical systems," *Applied Mathematics and Computation*, 102:35-49.
- [8] Okuguchi, K., 1964, "The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: A Further Generalization," *Review of Economic Studies*, 31(2):143-146.
- [9] Okuguchi, K., 1976, *Expectation and Stability in Oligopoly Models*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 138, Springer-Verlag.
- [10] Ortega, J. M., and W. C. Rheinboldt, 1970, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press.
- [11] Szidarovszky, F. and W. Li, 2000, "A note on the stability of a Cournot-Nash equilibrium: multiproduct case with adaptive expectations," *Journal of Mathematical Economics*, 33:101-107.
- [12] Takayama, A., 1985, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press.
- [13] Theocharis, R. D., 1960, "On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem," *Review of Economic Studies*, 27(2):133-134.
- [14] Zhang, A. and Y. Zhang, 1996, "Stability of a Cournot-Nash equilibrium: The multiproduct case," *Journal of Mathematical Economics*, 26:441-462.