

Title	内生的景気循環とサン・ スポット
Sub Title	Endogenous business cycles and sunspots
Author	須田, 伸一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.特別号-I (1990. 3) ,p.234- 253
JaLC DOI	10.14991/001.19900301-0234
Abstract	
Notes	福岡正夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900301-0234

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

内生的景気循環とサン・スポット

須 田 伸 一

1 はじめに

本稿の目的は、گرانモンらによって研究されてきた内生的景気循環理論に基づき、そこでの周期解の存在と効率性、及びサン・スポット均衡の存在について考察することにある。一般に内生的景気循環と呼ばれるものは、経済内部での相互依存関係によって発生する景気循環を指し、経済の与件の変化や貨幣供給量の予期されない変化等のショックによって発生する外生的景気循環と区別されている。

内生的景気循環理論自体は何も新しい主題ではなく、古くは投資関数の非線形性を用いたカルドアのモデルがある。本稿で取り上げるگرانモンのモデルにおいても追々明らかになるように、“非線形性”が重要な役割を果たしているが、彼のモデルはカルドアのモデルと方法論的に大きく異なっている。なぜなら、カルドアが非線形性をモデルの外から与えているのに対し、گرانモンは非線形性を経済主体の最大化行動から導出しているからである。

本稿は以下のように構成されている。まず、第2節で基本となる世代重複モデルを説明し、貨幣的競争均衡を定義する。その均衡が周期解（つまり景気循環）を持つための十分条件を考察し、更にそれらすべての周期解がパレート最適になっていることを確かめるのが第3節である。第4節ではサン・スポット均衡の概念を導入し、それが周期2の均衡と密接な関係にあることを示す。なお、今回の主題に関しては、Azariadis and Guesnerie（1986）及び Grandmont（1985）に負うところが大きい。

2 モデル

考察されるモデルは純粹交換の世代重複モデル（Overlapping-generations model）である⁽¹⁾。経済は第一期から始まり、将来に向かって限りなく続く（ $t=1, 2, \dots$ ）。第一期にその期のみ生きる消費者0がいるほか、各期に新しい消費者が1人ずつ生まれてきて、それぞれ二期間ずつ生きる。それら

注（1） Grandmont（1985）は、このモデルがごく簡単な生産技術を持つ世代重複モデルと結果的に同値になることを示している。

の消費者を生まれた期の添字 t でもって区別し、二期の人生の前半を「若年期」、後半を「老年期」と呼ぼう。すると経済の各期において「老年期」の消費者と「若年期」の消費者の2人が共存していることになる。

経済活動は1種類の財と貨幣の交換、貯蓄及び消費から成る。財は消費者に効用をもたらすが、次期まで持ち込ることのできない非耐久財である。一方、貨幣はそれ自体としては効用を生み出さないが、消費者が「若年期」に貯蓄をすることによって「老年期」の消費量を増すことを可能にする。

さて、第一期の期首に既に人生の半分を終えた消費者0は、財を $e_2 > 0$ と貨幣を1だけ持っている。その合理的行動は、もちろん手持ちの貨幣をすべて財に換えて消費することである。消費者 t ($t=1, 2, \dots$) についてはその行動はそれ程単純ではないので、それを次に考えよう。彼らは人生の前半と後半に財をそれぞれ e_1 と e_2 与えられる。 $e=(e_1, e_2) \gg 0$ としよう。また、各期の財の消費量を c_{t1}, c_{t2} ($c_{t1}, c_{t2} \geq 0$) で表し、⁽²⁾ 効用関数を $u(c_{t1}, c_{t2})$ とする。この定式化から明らかなように、ここでは毎期生まれてくる消費者の選好及び財の初期保有量が同一であることが仮定されている。効用関数 u は次の標準的な仮定を満たす。

仮定 1 $u(c_1, c_2)$ は2回連続微分可能、単調、厳密に凹で、かつ R^2_{++} を通るどの無差別曲線も R^2_{++} の境界と交わらない。

この最後の条件は、主體的均衡が内点解になること、すなわち最大化の一階の条件から需要関数が求まることを保障するものである。更に $u(c_1, c_2)$ に次のことを仮定する。

- 仮定 2** (i) $u_1 u_{12} - u_{11} u_{22} > 0$
(ii) $u_1 u_{21} - u_{22} u_{11} > 0$
(iii) $\bar{R} \equiv u_1(e)/u_2(e) < 1$

ここで

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial c_i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial c_i \partial c_j}$$

(i), (ii) はそれぞれ c_1, c_2 が正常財であるという仮定、また(iii)は利子率が0のときに消費者が正の貯蓄をすることを保障し、あとで定義する貨幣的競争均衡の存在に必要な仮定である。

各期においては財及び貨幣の現物市場のみが開かれる。市場は完全競争を仮定するので各消費者はそこで成立する価格を所与として行動する。その際「若年期」の消費者は将来の価格について何らかの予想をする必要に迫られるが、ここでは完全予見⁽³⁾を仮定する。また、各期の貨幣の価格を1に規準化しよう。すると、消費者 t ($t=1, 2, \dots$) の効用最大化問題は次のように書かれる。

$$\max \quad u(c_{t1}, c_{t2})$$

注(2) c_{ti} の添字 t, i は、前者が消費者の番号(生まれた期)を表し、後者が人生の前半(=1)か後半(=2)かを表している。

(3) したがって、「老年期」には「若年期」に計画した通りの消費を行うことが可能になり、「老年期」の行動を別にして考える必要がなくなる。

$$\begin{aligned} \text{sub. to } & p_t c_{t1} + p_t s_t = p_t e_1 \\ & p_{t+1} c_{t2} = p_{t+1} e_2 + p_t s_t \\ & c_{t1}, c_{t2}, s_t \geq 0 \end{aligned}$$

ここで s_t は実質貨幣需要（実質貯蓄）である。また、この問題は、実質貯蓄 s_t を選ぶ次の問題と同値である。

$$\begin{aligned} \max \quad & u(e_1 - s_t, e_2 + R s_t) \\ \text{sub. to } & 0 \leq s_t \leq e_1 \\ & R = p_t / p_{t+1} \end{aligned}$$

いずれにしても、上記の問題を解くことにより 需要関数 $c_1(R)$, $c_2(R)$ 及び実質貯蓄関数 $s(R)$ が得られる。⁽⁴⁾

この $s(R)$ について有用な命題をまず示しておこう。

命題 1 $R \leq \bar{R}$ ならば $s(R) = 0$

$R > \bar{R}$ ならば $s(R) > 0$

更に、 $R > \bar{R}$ のとき $s(R)$ は連続微分可能である。

証明

命題の前半は、 $R \leq \bar{R}$ のとき $c_1(R) = e_1$, $R > \bar{R}$ のとき $c_1(R) < e_1$ となることより明らか。⁽⁵⁾ 後半は最大化問題の一階の条件に陰関数定理を応用することより得られる。なお、図 1 を参照のこと。

（証明終り）

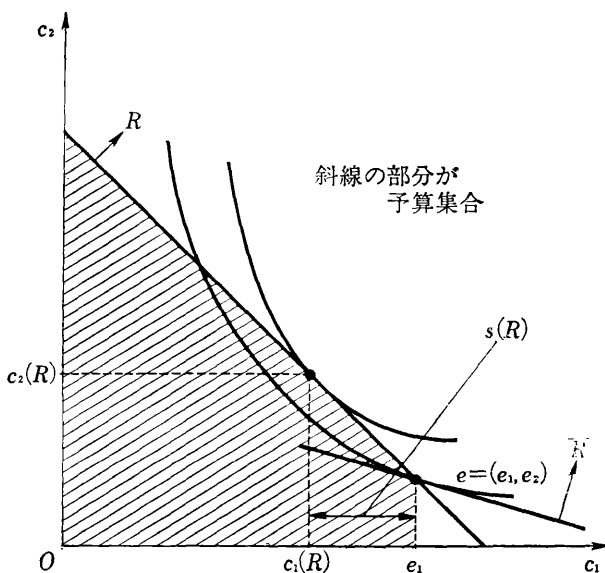


図 1

注 (4) 各消費者は選好及び財の初期保有量が同じなので、これらの関数形は t に依存しない。

(5) $s(R) = e_1 - c_1(R)$

命題 2 $\lim_{R \rightarrow \infty} R s(R) = \infty$

証明

選好の単調性の仮定より, $c_1(R)$, $c_2(R)$ は次の境界条件を満たす。⁽⁶⁾

$$R \rightarrow \infty \text{ ならば } \sqrt{(c_1(R))^2 + (c_2(R))^2} \rightarrow \infty.$$

$c_1(R)$ が有界 ($0 \leq c_1 \leq e_1$) であることに注意すれば, これより $c_2(R)$ が発散することがわかり, 予算制約式, $e_2 + R s(R) = c_2(R)$, より $R s(R) \rightarrow \infty$ を得る。 (証明終り)

実質貯蓄関数の弾力性を次のように定義する。

$$\epsilon(R) = \frac{R s'(R)}{s(R)}, \quad R > \bar{R}$$

命題 3 $\epsilon(R) > -1$, $R > \bar{R}$

証明

c_1 , c_2 が代替財であること, $s(R) > 0$ 及び c_2 が正常財であることより $c_2'(R) > 0$ が得られる。⁽⁷⁾
これから直ちに

$$c_2'(R) = s(R) + R s'(R) > 0$$

すなわち

$$\epsilon(R) > -1$$

を得る。

(証明終り)

これらの命題は次節以下での命題の証明に用いられる。

それではいよいよ貨幣的競争均衡を定義しよう。

定義 正の価格列 $(p_t)_{t=1}^{\infty}$ は次の条件を満たすとき貨幣的競争均衡と呼ばれる。

$$\frac{1}{p_t} = s\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right) \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

(1) 式は貨幣市場の均衡式である。貨幣の総供給量は常に 1 (経済の初めに存在していた貨幣の量) なので, 左辺が実質貨幣供給を, 右辺が実質貨幣需要を表している。またワルラス法則により財市場も各期均衡する。

ここで実質貨幣供給量を

$$m_t = \frac{1}{p_t}$$

で表すと, (1) 式は

注 (6) 境界条件については, 福岡 (1979), pp. 181~182 を参照のこと。

(7) これは, 予算制約式 $c_2(R) = e_2 + R s(R)$ を微分して得られる。

$$m_t = s \left(\frac{m_{t+1}}{m_t} \right) \quad (2)$$

$$m_t > 0 \quad t=1, 2, \dots$$

と書き表される。(1)式を満たす $(p_t)_{t=1}^{\infty}$ と (2)式を満たす $(m_t)_{t=1}^{\infty}$ は 1 対 1 に対応しているので、以下の節では取り扱いのより簡単な (2) 式を中心に見ていくことになる。周期 k の循環的均衡もここで定義しておこう。

定義 貨幣的競争均衡 $(p_t)_{t=1}^{\infty}$ は次の条件を満たすとき周期 k の循環的均衡であるという。

(i) $p_t \neq p_s, \quad t, s=1, 2, \dots, k, \quad t \neq s$

(ii) $p_{k+t} = p_t, \quad t=1, 2, \dots$

これは $(m_t)_{t=1}^{\infty}$ のタームで表しても同じことである。

それでは、以上のモデルの例を挙げて本節を終えることにしよう。

例 1 $u(c_1, c_2) = \log c_1 + \log c_2$

$$e = (4, 2)$$

容易に確かめられるように、 $u(c_1, c_2)$ と e は仮定 1, 2 を満たし、その実質貯蓄関数は

$$s(R) = 2 - \frac{1}{R}$$

となる。したがって均衡価格は

$$p_{t+1} = 2 p_t - 1 \quad (3)$$

$$p_t > 0$$

で与えられ、またこれを m_t で表すと

$$m_{t+1} = \frac{m_t}{2 - m_t} \quad (4)$$

$$m_t > 0$$

を満たす列となる。

$(p_t)_{t=1}^{\infty}$ や $(m_t)_{t=1}^{\infty}$ が均衡であるためには上の(3), (4)を満たしさえすればいいので、これは経済に複数の貨幣的競争均衡が存在することを示している。例えば、 $m_1 = 1$ と置けば

$$(m_t)_{t=1}^{\infty} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$$

という均衡が得られるし、 $m_1 = \frac{1}{2}$ と置けば

$$(m_t)_{t=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^{t-1}+1}, \dots \right)$$

という均衡が得られる。実際、任意の $m_1, 0 < m_1 < 1$ に対して(4)式を用いて $(m_t)_{t=1}^{\infty}$ を構成すればそれぞれ異なった均衡が得られる。

3 景気循環の存在と最適性

本節では、このモデルで景気循環が発生するための十分条件について考察する。ここで景気循環と呼んでいるものは、貨幣的競争均衡の循環的変動であり、それは差分方程式(2)の周期解に対応する。毎期々の経済与件は固定されており予期されないショックもないので、ここでの循環は内生的景気循環である。

まずは、(2)式

$$m_t = s\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right) \quad (2)$$

を満たす (m_t, m_{t+1}) の組を $m_t - m_{t+1}$ 平面上に表し、それを用いて循環の存在を説明することから始めよう。図2が典型的なグラフの形である。ここで $m_t = s(1) > 0$, $t=1, 2, \dots$ が(2)式の一意的な定常均衡であることから、グラフが45°線を1回だけ横切っている。また、原点におけるグラフの傾きが $\bar{R}$ となっているが、これは(2)式を陰関数微分して次のように得られる。

$$\frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \frac{m_t + s'\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right) \frac{m_{t+1}}{m_t}}{s'\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right)}$$

$$\therefore \lim_{m_t \rightarrow 0} \frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \lim_{S(\bar{R}) \rightarrow 0} R = \bar{R}$$

仮定より $\bar{R} < 1$ ⁽⁸⁾ なので、グラフは45°線を下から上へと切ることになる。

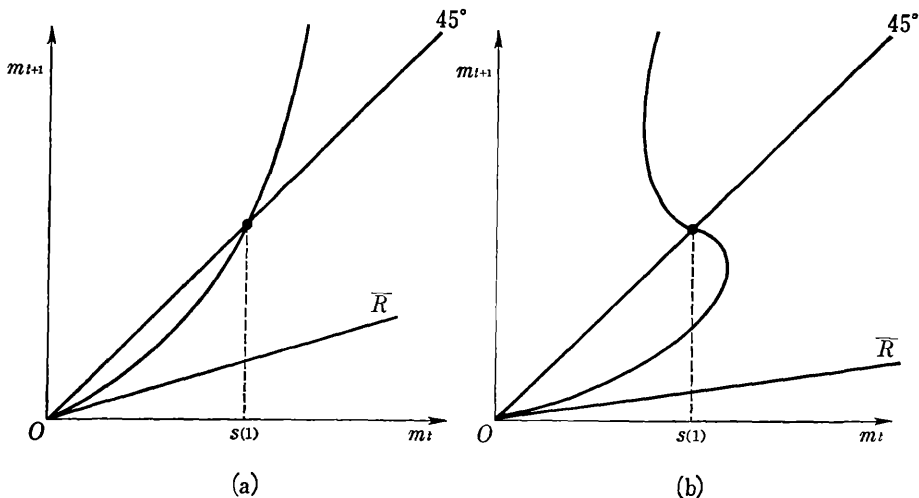


図 2

注(8) 第2節, 仮定2, Ⅲ.

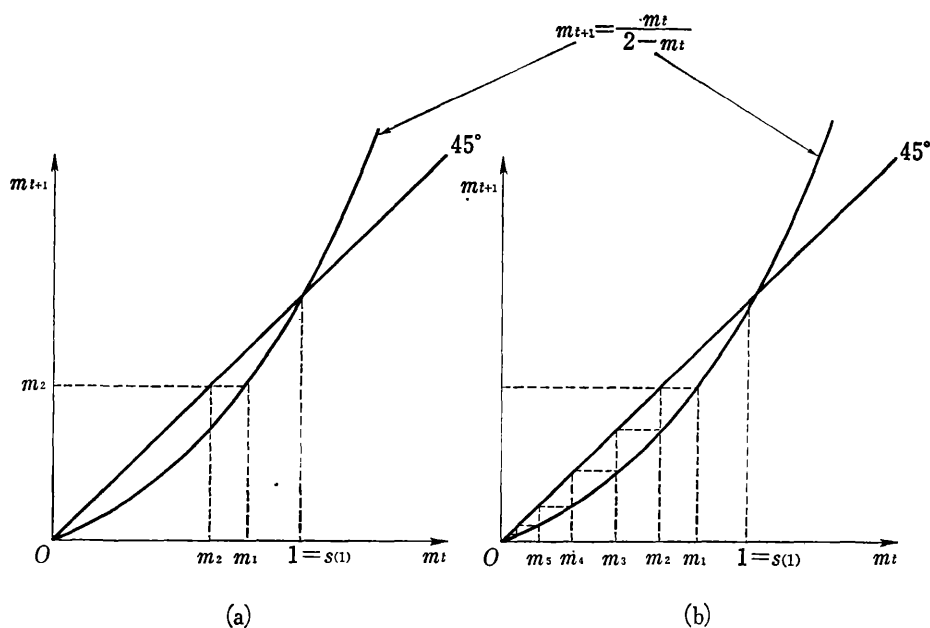


図 3

さて、このグラフを用いて⁽⁹⁾均衡の列 $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ を実際に構成してみよう。ここでのグラフは例 1 の数値例から計算されたものである。まず m_1 を $0 < m_1 < 1$ を満たすようにとる。 m_1 から垂線を伸ばし、グラフとの交点の高さを m_2 とする。すると点 (m_1, m_2) はこのグラフ上の点なので

$$m_1 = s\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

を満たす。ここで 45° 線の性質を利用して m_2 を m_t 軸に移そう (図 3(a))。この m_2 から前と同様に m_3 を求めれば、再びこの (m_2, m_3) の組は

$$m_2 = s\left(\frac{m_3}{m_2}\right)$$

を満たす。したがってこれを限りなく繰り返すことにより (2) 式を満たす列 $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ を得る (図 3(b))。 $1 < m_1 < 2$ であっても同様にして m_2 を構成できるが、これを繰り返すとしまいに対応する m_{i+1} がなくなってしまう。これは m_i に $m_i = s\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right) \leq 2$ という上限があり、 $m_i > 2$ だと $m_i = s\left(\frac{m_{i+1}}{m_i}\right)$ を満たす m_{i+1} が存在しなくなるからである。したがって無限の m_i の列を保障するには、 $0 < m_1 \leq 1$ でなければならない。また、以上の分析から直ちにわかることは、均衡には $m_1 = 1$ からスタートするものと $0 < m_1 < 1$ からスタートするものの 2 種類しかなく、前者の場合は定常均衡、後者の場合は m_i が 0 に単調に収束する ($p_i \rightarrow \infty$) ということである。循環的な均衡はこの場合には存在しない。

注 (9) 以下では「均衡」を「貨幣的競争均衡」と同義的に用いる。

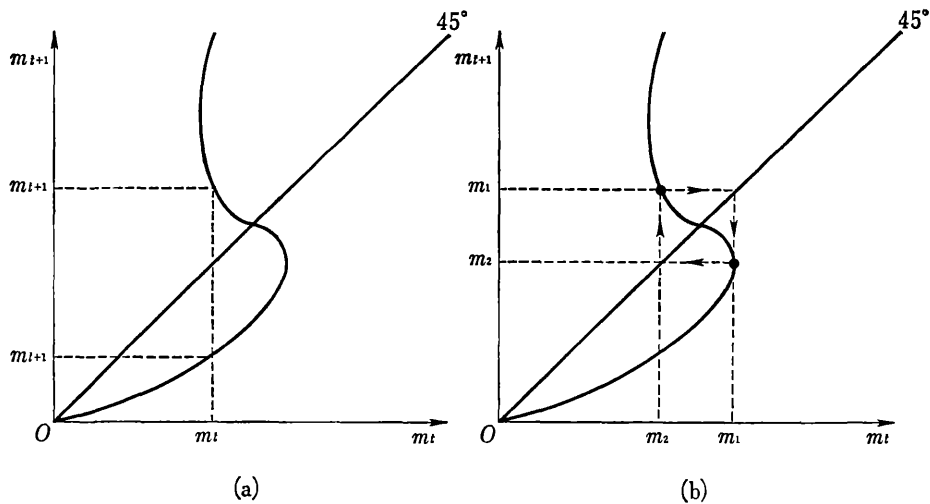


図 4

例 1 は図 2 (a) に相当するグラフであったが、図 2 (b) の場合でも原理は同じである。ただし一つの m_t に対して複数の m_{t+1} が対応する可能性があるので、均衡の系路はより複雑になる (図 4 (a))。特にこの場合には周期解の存在する可能性がある。(図 4 (b) には $(m_1, m_2, m_1, m_2, \dots)$ という周期 2 の循環的均衡が書き込まれている。) 実際、図 3 と図 4 を比べてみればわかるように、周期解を得るには $s(R)$ が図 4 のように反転していなければならない。この点を次に詳しくみてみよう。

周期 2 の循環的均衡は

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t+2} \\ m_t &\neq m_{t+1} \quad t=1, 2, \dots \end{aligned}$$

を満たす。そこでは

$$m_{t+1} = s\left(\frac{m_{t+2}}{m_{t+1}}\right) = s\left(\frac{m_t}{m_{t+1}}\right) \quad (5)$$

が成り立っているので、図に (5) 式を同時に書き入れ、2 つのグラフの交点を見ればよい。((5) 式は (2) 式の m_t と m_{t+1} を入れ換えて得られるので、(5) 式のグラフは (2) 式のグラフを 45° 線を軸に反転したものとなる。) $m_t \neq m_{t+1}$ なので、 45° 線上にない交点が周期 2 の均衡である。

図 5 の (a), (b) は図 3 の (a), (b) にそれぞれ (5) 式を書き入れたものである。前に確かめたように、(a) には周期 2 の均衡はないが、(b) には (m_1, m_2) という周期 2 の均衡が存在する。この図からわかるように、 $m_t = s(1)$ でのグラフの傾きが -1 と 0 の間であることが周期解の存在の十分条件である。

以下では上の主張を数的に示そう。まず準備として次の命題を証明する。

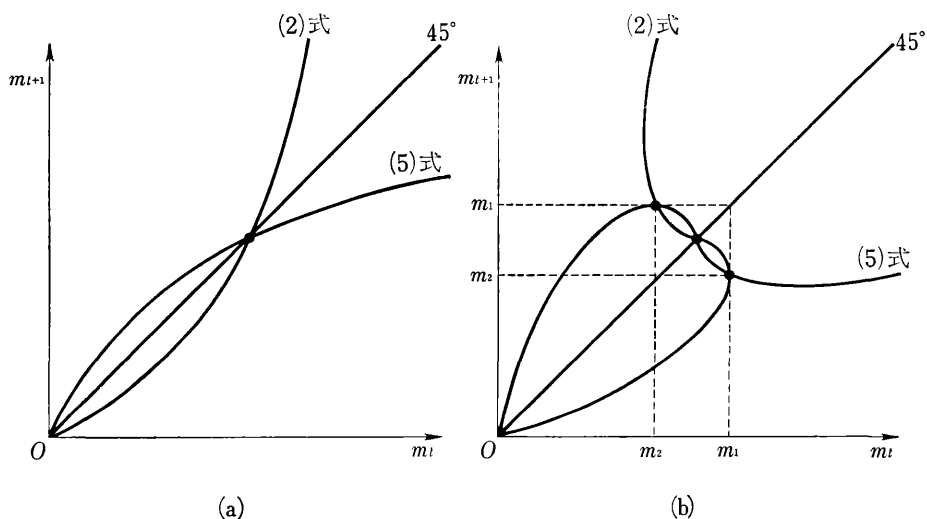


図 5

命題 4 $m_t = s\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right)$ は, 連続微分可能な関数 f を用いて $m_t = f(m_{t+1})$ の形に解ける。

証明

$$F(m_t, m_{t+1}) = m_t - s\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right)$$

とおけば, (2)式は $F(m_t, m_{t+1}) = 0$ となる。ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial m_t} &= 1 + s'\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right) \frac{m_{t+1}}{m_t^2} \\ &= 1 + \frac{s'(R)R}{s(R)} \\ &= 1 + \varepsilon(R) \\ &> 0 \quad (\text{命題 3}) \end{aligned}$$

したがって陰関数定理により連続微分可能な関数 f が存在し, $m_t = f(m_{t+1})$ のように解ける。

(証明終り)

この命題は, m_t から m_{t+1} を解くと図 4 (a) でみたように複数の m_{t+1} を得ることがあるが, m_{t+1} から m_t を解けばそれが一意に決まることを主張したものである。

この f を用いると, 周期 2 の循環は,

$$\begin{cases} m = f \circ f(m) \\ m \neq f(m) \end{cases} \quad (6)$$

を満たす m として得られる。このとき

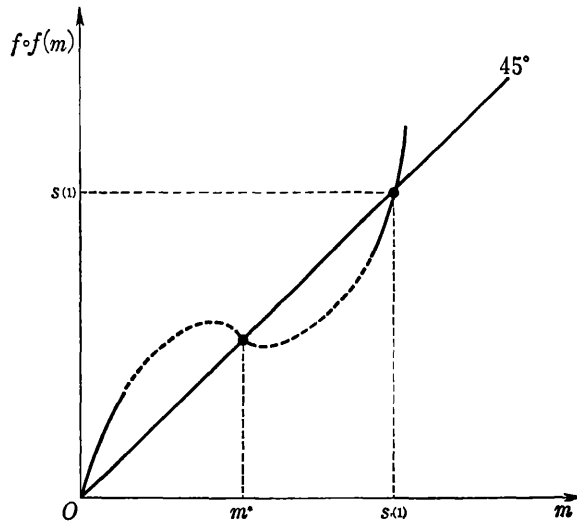


図 6

$$f'(m) = \frac{s'(R)}{s(R) + s'(R)R} \quad (10) \quad (7)$$

より $\lim_{m \rightarrow 0} f'(m) = \frac{1}{R}$ 。ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{d}{dm} (f \circ f)(m) &= \lim_{m \rightarrow 0} f'(f(m)) f'(m) \\ &= \left(\frac{1}{R} \right)^2 > 1 \end{aligned}$$

また、 $f \circ f(s(1)) = s(1)$ 。したがって、

$$\frac{d}{dm} (f \circ f)(s(1)) = [f'(s(1))]^2 > 1$$

であれば f の連続性と中間値の定理によって (6) 式を満たす m^* , $0 < m^* < s(1)$, の存在が示される (図 6 参照)。

(7) 式より

$$f'(s(1)) = \frac{s'(1)}{s(1) + s'(1)} = \frac{\epsilon(1)}{1 + \epsilon(1)}$$

であり、命題 3 より $f'(s(1)) < 1$ となるので、結局 $f'(s(1)) < -1$, つまり、

$$-1 < \epsilon(1) < -\frac{1}{2}$$

が周期 2 の循環的均衡の存在のため十分条件となる。よって以下の命題が証明された。

注 (10) $f'(m) = -\frac{\partial F}{\partial m_{t+1}} / \frac{\partial F}{\partial m_t}$

命題 5 $-1 < \varepsilon(1) < -\frac{1}{2}$ であれば周期 2 の循環的均衡が存在する。

この条件は $R=1$ のときに所得効果が代替効果よりも十分に大きいということである。つまり、周期 2 の循環は所得効果が代替効果を凌駕し $s(R)$ が途中から反転するという“非線形性”が生じるときに起こる。もちろん、この結果は本節の前半のグラフを用いたアプローチの結果と一致する。なぜならば、(2) 式のグラフの $m_i = s(1)$ における傾きが $1/f'(s(1))$ で表されるので、 $f'(s(1)) < -1$ はグラフの傾きが -1 と 0 の間であることを示しているのに他ならないからである。例を少し見てみよう。

例 2 $u(c_1, c_2) = \log c_1 + \frac{c_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$

$$e = \left(2, -\frac{1}{2}\right).$$

以下では、 α が十分大きければ命題 5 の条件が満たされ、この経済に周期 2 の循環的均衡が存在することを示す。

消費者の効用最大化問題

$$\max_{0 \leq s \leq 2} \log(2-s) + \frac{\left(\frac{1}{2} + Rs\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

の一階の条件は

$$R(2-s)\left(\frac{1}{2} + Rs\right)^{\alpha} \quad (8)$$

である。これから

$$\varepsilon_{\alpha}(R) = \frac{2}{\alpha \left(\frac{1}{2} + R s_{\alpha}(R)\right)^{\alpha-1} s_{\alpha}(R) + s_{\alpha}(R)} - 1$$

と計算できる。 $(\varepsilon_{\alpha}(R))$ 及び $s_{\alpha}(R)$ の添字 α は、これらの関数形が α に依存することを示している。) したがって、 $-1 < \varepsilon_{\alpha}(1) < -\frac{1}{2}$ の条件は結局

$$4 < \alpha \left(\frac{1}{2} + s_{\alpha}(1)\right)^{\alpha-1} s_{\alpha}(1) + s_{\alpha}(1) \quad (9)$$

となる。(8) 式より $s_{\alpha}(1) > -\frac{1}{2} \forall \alpha > 1$ がわかるので、直接計算することにより α が 7 より大きければ (9) が満たされ周期 2 の均衡の存在することがわかる。

例 3 $u(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$

注 (11) この例は Azariadis による。

$$e = (4, 1)$$

効用最大化は $c_1 = c_2$ を意味するので、予算制約式

$$c_1 + \frac{c_2}{R} = e_1 + \frac{e_2}{R} = 4 + \frac{1}{R}$$

より

$$c_1(R) = c_2(R) = \frac{4R+1}{1+R}$$

$$\therefore s(R) = e_1 - c_1(R) = \frac{3}{1+R}.$$

よって均衡においては

$$m_i + m_{i+1} = \frac{3 m_i}{m_i + m_{i+1}}$$

$$\therefore m_i + m_{i+1} = 3.$$

したがって、例えば

$$(m_i)_{i=1}^{\infty} = (1, 2, 1, 2, \dots)$$

という周期 2 の均衡が存在する。

それでは次に、周期 3 の循環を見てみよう。これは前と同じように考えて、

$$m = f \circ f \circ f(m)$$

$$m \neq f(m)$$

を満たす m として得られる。しかしこれを保障する十分条件は前のようにはうまく求まらない。直観的には、 $s(R)$ の反転がさらに急になりグラフの非線形性が強まると周期 3 の循環が得られるのであるが、これを経済的に意味のある形で表現するのは難しい。したがって、ここでは Grandmont (1985) によって証明された、効用関数を特定化した場合の命題を引用する。

⁽¹²⁾
命題 6 効用関数を

$$u(c_1, c_2) = v_1(c_1) + v_2(c_2)$$

$$v_i(c_i) = \frac{c_i^{(1-\alpha_i)}}{1-\alpha_i}, \quad i=1, 2$$

のように特定化する。このとき (e_1, e_2) が

$$0 < e_2 < 1$$

$$e_1 + e_2 > \frac{1}{e_2}$$

を満たせば、任意の $\alpha_1 > 0$ に対し α_2 を十分大きく選ぶことによって、周期 3 の循環的均衡が存在するようにできる。

注 (12) Grandmont (1985), 系 (p.1023)。彼はこの命題のもととなる命題 4.4 を証明しているが、そこでの十分条件は経済的な意味がはっきりしない。須田 (1988), p.64 も参照のこと。

例えば、例2の経済はこの命題の前提を満たしている⁽¹³⁾ので、 α を大きくしていくことにより周期2の循環だけでなく周期3の循環も得られることがわかる。そして、次の Li-Yorke の定理を援用すれば、この結果の含意はさらに広がる。

定理 (Li-Yorke (1975)) f を実数区間 I からそれ自身への連続関数とし、 I 上に次の条件を満たす点 a, b, c, d が存在するとする。

$$d \leq a < b < c, \quad f(a)=b, \quad f(b)=c, \quad f(c)=d$$

このとき、すべての自然数 k について周期 k の周期解が存在する。

周期3の均衡があればこの定理の前提は満たされる。したがって、上で得られた周期3の循環の十分条件は、

「すべての自然数 k について周期 k の循環的均衡が存在する」
 というところまで意味するのである。以上が循環的均衡の存在に関する議論である。
 次は循環的均衡の効率性である。これは次の命題に要約される。

⁽¹⁴⁾
命題 7 すべての循環的均衡はパレート最適である。

したがって、周期3の循環的均衡が存在する経済においては可算無限個の異なった景気循環の可能性が存在し、そのそれぞれがパレート最適になっているのである。また一方、この命題は非循環的な均衡には何も言及していない。実際、非循環的均衡の中にはパレート最適でないものも存在する。

例 4 例1の経済を再び取り上げる。そこでは均衡の例として

$$(m_i)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^{i-1}+1}, \dots \right)$$

を挙げたが、この均衡はパレート最適でない。なぜならば、まず、この $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ における各消費者への配分は

$$c_0 = \frac{5}{2},$$

$$c_t = (c_{t1}, c_{t2}) = \left(\frac{2^{t+1}+3}{2^{t-1}+1}, \frac{2^{t+1}+3}{2^t+1} \right), \quad t = 1, 2, \dots$$

となっている。ここで

注 (13) $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \log c$

(14) 註明に関しては、須田 (1988) pp. 72~77 を参照のこと。

$$c_0' = 3$$

$$c_t' = (3, 3) \quad t=1, 2, \dots$$

という配分を考えてみよう。この配分はこの経済で達成可能であり、かつ

$$3 > \frac{5}{2}$$

$$u(c_{t1}', c_{t2}') = \log 9$$

$$> \log \left(8 + \frac{1}{2^{2t-1} + 2^t + 2^{t-1} + 1} \right)$$

$$= \log \frac{2^{t+1} + 3}{2^{t-1} + 1} + \log \frac{2^{t+1} + 3}{2^t + 1}$$

$$= u(c_{t1}, c_{t2})$$

したがって $(m_t)_{t=1}^\infty$ はパレート最適ではない。

本節を終えるにあたって、ここでのモデルにおける均衡の個数について一言述べておこう。まず例1で見たように、均衡全体を考えた場合、非可算無限個の点を含む可能性がある。また、パレート最適の均衡に限ってみたとしても、命題6の条件を満たす例をみれば可算無限個の均衡の存在が知られる。このように、無限の消費者を含む世代重複モデルにおいては、有限のアロー・ドブリュー経済と比べて均衡の数が飛躍的に増大する⁽¹⁵⁾。次節で扱うサン・スポット均衡は、このモデルにおける均衡の可能性を更に拡大するものである。

4 サン・スポット均衡

本節では、選好、財の初期保有量等の経済与件と全く関係のない出来事が均衡の決定を左右する状況を考える。そのような均衡はまとめて「サン・スポット均衡」と呼ばれているが、これは、市場の動きに関する経済主体の思惑（それも単なる思惑でなく“正しい”予想）それ自体が市場を左右する可能性を示している。そして経済活動の軌跡を辿ってみれば、経済外部の出来事に呼応する形で均衡が変化するのでこれも一種の景気循環といえる。

ここでのモデルは前節までの世代重複モデルに不確実性を導入したものであり、毎期々々2つの事象（ $\sigma=1, 2$ ）のうちのどちらか一方が実現される。 σ が1であっても2であっても効用関数 u や財の初期保有量 e は影響を受けない（そのような不確実性は“非本質的（extrinsic）”な不確実性と呼ばれている）。ただし各消費者は各期の σ の値を正しく観察することが可能で、かつ σ の系列が次の推移行列をもつ定常マルコフ過程に従うことを知っている。

注 (15) アロー・ドブリュー経済においては、ほとんどの場合均衡の数が有限個になることが知られている。例えば Balasko (1988)。

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & 1-\pi_1 \\ 1-\pi_2 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

ここで π_1 は今期 $\sigma=1$ のとき来期も再び $\sigma=1$ となる確率を、 π_2 は今期 $\sigma=2$ のとき来期も再び $\sigma=2$ となる確率をそれぞれ示している。本節の目的は、 $\sigma=1$ の期には $p_t=p_1$ が、 $\sigma=2$ の期には $p_t=p_2$ がそれぞれ均衡価格として実現し、かつ $p_1 \neq p_2$ となるような貨幣的競争均衡（サン・スポット均衡）の存在を示すことにある。

まず不確実性の存在するもとの消費者の（期待）効用最大化問題から考える。

今期の財の価格が p であったとし、来期の価格 p_{t+1} は

確率 π で $p_{t+1}=p$

確率 $1-\pi$ で $p_{t+1}=p'$

のように予想されたとしよう。すると、今期の実質貯蓄関数 z は次の期待効用最大化問題を解いて得られる。

$$z(R, \pi) = \arg \max_{0 \leq z \leq e_1} [\pi u(e_1 - z, e_2 + z) + (1-\pi) u(e_1 - z, e_2 + Rz)]$$

$$R = \frac{p}{p'}$$

例えば、もし $p_t=p_1$ で、 p_{t+1} が

確率 π で p_1

確率 $1-\pi$ で p_2

であると予想されたなら、今期の実質貯蓄は $z\left(\frac{p_1}{p_2}, \pi_1\right)$ と書かれる。

これを用いて均衡は次のように定義される。

定義 価格及び推移確率の組 $(p_1, p_2, \pi_1, \pi_2) \in R_{++}^4$ は次の条件を満たすとき、定常サン・スポット均衡と呼ばれる。

(i) $0 < \pi_1, \pi_2 < 1$

(ii) $p_1 \neq p_2$

(iii) $\frac{1}{p_1} = z\left(\frac{p_1}{p_2}, \pi_1\right), \frac{1}{p_2} = z\left(\frac{p_2}{p_1}, \pi_2\right)$.

この均衡の意味を理解するにあたり、まず次の2つのことを確かめておく。

1. 各消費者は σ の移動に関する推移確率行列を正確に知っており、かつ各期において $\sigma=1$ ならば p_1 が実現し、 $\sigma=2$ ならば p_2 が実現することを信じて行動している。
2. この信念のもと、今期 $\sigma=1$ であれば実際に $p_t=p_1$ の価格で市場の需給が一致し、

$$\frac{1}{p_1} = z\left(\frac{p_1}{p_2}, \pi_1\right),$$

$\sigma=2$ であれば実際に $p_t=p_2$ の価格で市場の需給が一致する、

$$\frac{1}{p_2} = z\left(\frac{p_2}{p_1}, \pi_2\right).$$

したがって、各消費者が当初抱いていた予想が正しかったことが立証される（合理的期待）。

すなわち、不確実性は経済与件とは全く関係のないところに導入されてはいるが、各消費がそれぞれの事象を特定の均衡と結びつけ、それを信じて行動する結果、実際の経済の動きもその事象に影響されてしまうのである。⁽¹⁶⁾そして事前に立てた予想はあとから正しかったことが裏づけられるので、消費者は特にその予想を改定する誘因を持たない。よってこれが定常均衡として続いていく。

以下ではこの定常サン・スポット均衡の存在のための十分条件を示し、それが前節でみた周期2の循環的均衡の条件と同じことを確かめる。その準備として、いくつかの有用な命題を証明しておく。

⁽¹⁷⁾
命題 8

(i) $z(R, \pi)$ は $R > \bar{R}$ のとき、 R に関して連続微分可能な関数である。

(ii) $z(R, 0) = s(R) \quad \forall R$
 $z(R, 1) = z(1, \pi) = s(1) \quad \forall R, \pi$

(iii) $z(R, \pi)$ は $s(R)$ と $s(1)$ の間の値をとる。

証明

(i) 及び (iii) は $z(R, \pi)$ の定義より明らか。

(ii) $s(R)$ は定義より $u(e_1 - z, e_2 + Rz)$ の z に関する最大点、 $s(1)$ は $u(e_1 - z, e_2 + z)$ の最大点である。したがって $\pi u(e_1 - z, e_2 + z) + (1 - \pi) u(e_1 - z, e_2 + Rz)$ の最大点は $s(R)$ と $s(1)$ の間になくてはならない。 (証明終り)

また、 u の厳密な凹性を用いれば、(iii) の証明から、 $z(R, \pi) > 0 \quad \forall R > 0, 0 < \pi < 1$ が言える。

$z(R, \pi)$ の R に関する弾力性を

$$\eta(R, \pi) = \frac{\partial z(R, \pi)}{\partial R} \frac{R}{z(R, \pi)}$$

のように定義する。

⁽¹⁸⁾
命題 9 $\eta(1, \pi) = (1 - \pi) \varepsilon(1) \quad \forall \pi$

証明

$z(R, \pi)$ は一階の条件

注 (16) これは自己実現的 (self-fulfilling) な予想と呼ばれている。

(17) Azariadis-Guesnerie (1986), lemma 1.

(18) Azariadis-Guesnerie (1986), lemma 2.

$$-\pi u_1(e_1 - z, e_2 + z) + \pi u_2(e_1 - z, e_2 + z) - (1 - \pi) u_1(e_1 - z, e_2 + Rz) \\ + (1 - \pi) R u_2(e_1 - z, e_2 + Rz) = 0$$

を解いて得られる。これを陰関数微分して $\frac{\partial z(R, \pi)}{\partial R}$ を得、 $s'(R)$ と比べることにより

$$\eta(1, \pi) = (1 - \pi) \varepsilon(1)$$

を得る。

(証明終り)

$$F(w, \pi_1, \pi_2) = wz(w, \pi_1) - z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right)$$

のように定義する。

⁽¹⁹⁾
命題10 任意の $\pi_1, \pi_2 \in (0, 1)$ に対し

(i) $F(w, \pi_1, \pi_2)$ は $w=1$ のところで連続微分可能

(ii) $F(1, \pi_1, \pi_2) = 0$

(iii) $\lim_{w \rightarrow \infty} F(w, \pi_1, \pi_2) = \infty$

(iv) w が十分に小さい正の値のとき

$$F(w, \pi_1, \pi_2) < 0$$

証明

(i) $z(R, \pi)$ が $R=1 > \bar{R}$ のところで連続微分可能であることより明らか。

(ii) 定義より明らか。

(iii) 命題2より $\lim_{w \rightarrow \infty} ws(w) = \infty$ 。また $s(1) > 0$ (命題1) より $\lim_{w \rightarrow \infty} ws(1) = \infty$ 。よって命題8

(iii)より $\lim_{w \rightarrow \infty} wz(w, \pi_1) = \infty$ 。 $z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right)$ が有界 ($0 \leq z \leq e_1$) なことより

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \left(wz(w, \pi_1) - z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right) \right) = \infty.$$

(iv)(iii)より

$$\lim_{w \rightarrow 0+} \left(z(w, \pi_1) - \left(\frac{1}{w}\right) z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right) \right) = -\infty.$$

よって w を十分小さくすれば

$$F(w, \pi_1, \pi_2) = w \left[z(w, \pi_1) - \left(\frac{1}{w}\right) z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right) \right] < 0$$

とできる。

(証明終り)

以上の準備のもと定常サン・スポット均衡の存在定理を証明しよう。

注 (19) Azariadis-Guesnerie (1986), lemma 3.

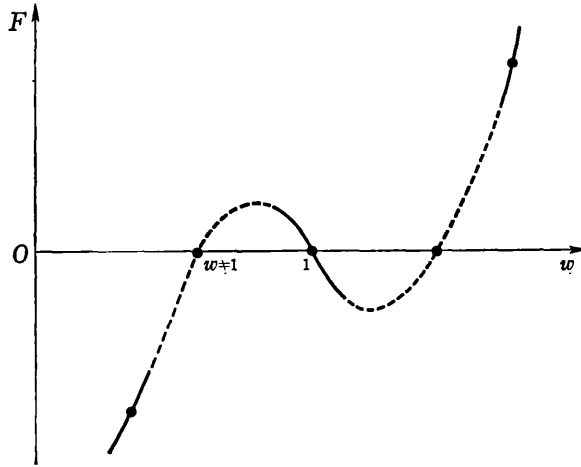


図 7

命題11⁽²⁰⁾ $-1 < \varepsilon(1) < -\frac{1}{2}$ であれば定常サン・スポット均衡が存在する。

証明

定常サン・スポット均衡の存在を示すには、 $F(\hat{w}, \pi_1, \pi_2) = 0$ であるような $0 < \pi_1, \pi_2 < 1$, $\hat{w} = 1$ を見つければ十分である。なぜなら、そのときは

$$p_1 = \frac{1}{z(\hat{w}, \pi_1)}, \quad p_2 = \frac{1}{z\left(\frac{1}{\hat{w}}, \pi_2\right)}$$

と定義することにより、 (p_1, p_2, π_1, π_2) が所望の均衡となるからである。更に、それには命題10より

$$\left. \frac{\partial F(w, \pi_1, \pi_2)}{\partial w} \right|_{w=1} < 0$$

であればよい。(図7)

したがって、この偏導関数を計算していく。

$$\frac{\partial F}{\partial w} = z(w, \pi_1) + w \frac{\partial z(w, \pi_1)}{\partial w} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial z\left(\frac{1}{w}, \pi_2\right)}{\partial w} \quad (10)$$

$w=1$ のとき、命題8, 9を用いれば

$$\begin{aligned} (10) &= s(1)[1 + \eta(1, \pi_1) + \eta(1, \pi_2)] \\ &= s(1)[1 + (1 - \pi_1)\varepsilon(1) + (1 - \pi_2)\varepsilon(1)] \end{aligned}$$

$s(1) > 0$ なので結局次の関係を得る。

$$\left. \frac{\partial}{\partial w} F(w_1, \pi_1, \pi_2) \right|_{w=1} < 0$$

注 (20) Azariadis-Guesnerie (1986), Theorem 2.

$\Longleftrightarrow$

$$1 + (1 - \pi_1) \varepsilon(1) + (1 - \pi_2) \varepsilon(1) < 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2 - \pi_1 - \pi_2) \varepsilon(1) < -1. \quad (11)$$

したがって、 $-1 < \varepsilon(1) < -\frac{1}{2}$ であれば(11)式を満たすように $0 < \pi_1, \pi_2 < 1$ を選ぶことができ、 $F(\hat{w}, \pi_1, \pi_2) = 0$ となる $\hat{w} \neq 1$ の存在がいえる。 (証明終り)

証明の最後の部分より明らかなように、 π_1, π_2 の組合せは無限にある。したがって $-1 < \varepsilon(1) < -\frac{1}{2}$ のときには無限に多くのサン・スポット均衡が存在することになる。また、この十分条件は前節でみた周期2の解の存在の条件と等しい。そして Azariadis-Guesnerie (1986) はこの結論を更に押し進め、

「もし2つの事象から成る定常サン・スポット均衡が存在するならば、そしてそのときに限り、周期2の循環的均衡が存在する。⁽²¹⁾」
 という結論を得ている。

以上が定常サン・スポット均衡の存在に関する議論である。

例5 例3と同じ経済を考える。 $z(R, \pi)$ を直接求めると

$$z(R, \pi) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \pi > \min\left(\frac{1}{2}, \frac{R}{1+R}\right) \\ \left[\frac{3}{1+R}, \frac{3}{2}\right], & R > 1 \text{ かつ } \pi = \frac{1}{2} \\ \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{1+R}\right], & R < 1 \text{ かつ } \pi = \frac{R}{1+R} \\ \frac{3}{1+R}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。(効用関数が微分可能な凹関数でないので z が一価にならない領域が出てくる。)

したがって、例えば、

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad \pi_1 = \pi_2 = 0.1$$

とすれば、

$$\begin{aligned} z\left(\frac{p_1}{p_2}, \pi_1\right) &= z(2, 0.1) = \frac{3}{1+2} = 1 = \frac{1}{p_1} \\ z\left(\frac{p_2}{p_1}, \pi_2\right) &= z\left(\frac{1}{2}, 0.1\right) = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2 = \frac{1}{p_2}. \end{aligned}$$

注 (21) Azariadis-Guesnerie (1986), Theorem 4.

ゆえにこれは定常サン・スポット均衡である。

5 おわりに

以上本稿では、純粋交換の世代重複モデルを用いて、景気循環の存在と効率性、及びサン・スポット均衡の存在についてみてきた。そこで示されたことは、もし所得効果が代替効果に比べて十分大きいならば循環が生じること（命題 5, 6）、どの循環的均衡もパレート最適であること（命題 7）、及び周期 2 の循環の十分条件が満たされればサン・スポット均衡が存在すること（命題 11）である。このように、ここでの議論は所得効果が代替効果に比べて十分大きく、貯蓄が利子率の減少関数になっていることに依っている。

なお、最近の研究ではその点に関して考察が加えられ、資本蓄積を入れた Diamond モデルや消費者が無限期間生きる Ramsey モデルを用い⁽²²⁾れば、特にこの条件を課さなくても循環が生じることが示されている。

引用文献

- Azariadis, C. and R. Guesnerie (1986), "Sunspots and Cycles," *Review of Economic Studies*, Vol. 53, pp. 725-737.
- Balasko, Y. (1988), *Foundations of the Theory of General Equilibrium*, Academic Press.
- 福岡正夫 (1979), 『一般均衡理論』, 創文社。
- Grandmont, J.-M. (1985), "On Endogenous Competitive Business Cycles," *Econometrica*, Vol. 53, pp. 995-1045.
- Li, T. and J. Yorke (1975), "Period Three Implies Chaos," *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 985-992.
- Matsuyama, K. (1989), "Endogenous Price Fluctuations in an Optimizing Model of Monetary Economy," CMS-EMS Discussion Paper No. 825, Northwestern University.
- Reichlin, P. (1986), "Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production," *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 89-102.
- 須田伸一 (1988), 『内生的景気循環理論と金融政策』, 三菱経済研究所。

(経済学部助手)

注 (22) 前者については Reichlin (1986)、後者については Matsuyama (1989) を参照のこと。