

Title	確率論の基礎概念 I
Sub Title	Fundamental concepts of probability theory I
Author	大出, 晃(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1971
Jtitle	哲學 No.58 (1971. 12) ,p.67- 86
JaLC DOI	
Abstract	This article, with the second part to issue in the same review, forms an introductory part of a forthcoming paper concerning the analysis of structure of statistical inference. The fundamental concepts of measure-theoretical probability theory such as measure on σ -field of sets, extension theorems on measure and Lebesgue-Stieltjes integral are discussed in the parts I and II. The final object of the author in this series of papers is to make the fact clear that probability space is a mathematical model to be tested both from various points of view and by various procedures of test, and to point out the deductive character of statistical inference which is sometimes misconceived as if it were inductive.
Notes	名誉教授宮崎友愛先生記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000058-0075

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

確率論の基礎概念 I

大 出 晃

ま え が き

現代科学において統計的推論⁽¹⁾の果す重要性については、いまさら事新しくはのべるまでもないであろう。また、統計的推論において数学的確率論の演ずる重要な役割についても多言を要しないと思われる。ところが、従来、科学哲学者による確率概念の吟味は統計的推論の問題から離れたところで行われていた観が強い。科学哲学者の関心は「確率とは何か」という点に専ら向けられており、しかもライヘンバッハやカルナップ等の確率に関する議論が1933年に刊行されたコルモゴロフの公理的方法による測度論的確率論の成果よりも、フォン・ミーゼスやケインズ等の思想に影響されていたためか、現在では確率論の主流と考えられている測度論的な基礎づけに対して十分な考慮が払われずに、議論が展開されることが多いように思われる。私は科学的方法論の重要な部分である統計的推論の分析を試みたいと考えているが、以上のような傾向から、まず測度論的確率概念の基本的性格をこの小論において取り扱いたいと思う。もちろん、現在ではさまざまな成書によって精粗の違いはあるにしても、確率論の骨子はのべられている。それに対して、小論の意図するところはあくまでも統計的推論の構造分析の準備として、測度論的確率論の基礎概念を明確にすることであり、したがって、数学的技術の細部については適当な文献に譲らざるをえない。だが、確率論の数学的概念とわれわれの有する素朴で直観的な確率概念との間のギャップは、多くの書物が埋めるのに苦心しているところであって、小論の目的の一半もできるだけそのようなギャップを埋めることにある。⁽²⁾

それとともに、この論文が全体として後に来るべき統計的推論の分析への導入部ともいうべき性格のものであることを予めお断わりしておきたい。そして、ここではとくに数学的確率空間の設定が一つの数学的モデルの構成という性格をもつものであることを明らかにしたいと思う⁽⁸⁾。

序 論

まず、ありふれた例として一つのサイコロを振ったときにある目が出る確率を考えることにしよう。通常の議論は大体次のようなものであろう。サイコロの目を一つの便法として 1, 2, 3, 4, 5, 6 という数字によって示す。

いま、ひとつのサイコロを振るという試行を行なったときに生ずる結果として考えられているのは「1 の目が出る」、………、「6 の目が出る」という事象 (event) であるが、これらの事象をその試行の単純事象 (simple event) または根元事象とよぶ。また、これら単純事象の総体、すなわち「 $1 \leq i \leq 6$ なるある i に対して、 i の目が出る」という事象を全事象、さらに、どの単純事象も起きないという事象、つまり「 $1 \leq i \leq 6$ なるどの i に対しても i の目が出ない」という事象をも考えて、これを空事象とよぶ。通常、全事象に対しては Ω 、空事象に対しては $\emptyset$ なる記号が用いられる。

一般に多小なりとも数学的な手法を用いるときには、まず一定の試行の結果に対してある指標を考え、その指標に合致するような単純事象とその総体としての全事象を集合およびその元の形でとらえるのが普通である。たとえば、サイコロ投げの試行の結果に対していま考えられている指標は出る「目」であって、サイコロの止まった位置その他ではない。この指標に応じて、目の数 1, 2, 3, 4, 5, 6 が「1 の目が出る」等々の単純事象の端的な表現として意味をもちうる。そして、この場合の全事象 Ω として $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ なる 6 コの数から成る集合が与えられ、かつ Ω の元である 1 から 6 までの数は単純事象に対応するものとみなされるのであ

る。そして、一般に事象 (event) とは単純事象のある集まり、すなわち、
集合の意に用いられる。⁽⁴⁾

ところで、事象のうちで確率の付与されている事象は確率事象とよばれる。たとえば、通常「3 の目の出る」確率、「偶数の目の出る」確率、「5 か 6 の目の出る」確率などが問題とされる。この事実からうかがわれるように、「3 の目の出る」事象、「偶数の目の出る」事象、「5 か 6 の目の出る」事象はいずれも確率事象である。これらの事象の数学的取扱いは、それらをいずれも全事象の部分集合と考えることであって、 $\{3\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{5, 6\}$ といった集合をこれら事象の数学的表現とみなす。それゆえ確率とはこれらの部分集合に対して $0 \leq x \leq 1$ なる実数値 x を与えるところの関数であると考えられる。いまの例に則していえば、確率 P は $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{5, 6\}) = \frac{1}{3}$ なる値をとる関数である。この関数は数学的には全事象という一定の集合の部分集合に対して定義されているところの集合関数 (set function) である。確率がこのように全事象 Ω の部分集合に対して定義されている集合関数と考えられるとすれば、確率の定義域とは Ω の部分集合から成る一定の集合族 $\mathcal{S}$ ということになる。サイコロ投げの例でいえば、この集合族 $\mathcal{S}$ は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のすべての部分集合を元とする集合族、いわゆる Ω のべき集合族 $\mathcal{P}(\Omega)$ である。というのは、われわれは通常この場合にはどのような目の出方に対しても、したがって Ω のどの部分集合に対しても確率が定義されていると考えているからである。かくして、確率事象とは、数学的表現でいえば一定の集合族 $\mathcal{S}$ に属する Ω の部分集合の意味に他ならない。したがって、確率を論ずる場合の基本的条件は全事象 Ω , その部分集合の族 $\mathcal{S}$ と確率なる集合関数とを明らかにすることであり、この三者を一まとめにして $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ と表わし、これを確率空間 (probability space) とよび、 Ω 自体しばしば (確率) 空間、 Ω の元である単純事象は空間 Ω の点とよばれる。

われわれが確率事象とよぶものはそれなりの構造を有している．たとえば、「5 の目が出る」というのと「6 の目が出る」というのがともに確率事象であれば、「5 か 6 の目が出る」というのも確率事象であるとか、「偶数の目が出る」と「5 か 6 の目が出る」が確率事象であれば、「5 か 6 であってしかも偶数である目が出る」というのも確率事象であるとか、また、「3 の目が出ない」というのも確率事象であるとか、といった類いのことを前提にしている．いいかえれば、確率事象の和事象・積事象・余事象もまた確率事象であることを前提にしている．これはとりも直さず Ω の部分集合の族 $\mathcal{S}$ がそれに対応する構造をもたなくてはならないことを意味している．たとえば、 $\{5\}$ と $\{6\}$ が $\mathcal{S}$ の元であれば、 $\{5, 6\} = \{5\} \cup \{6\}$ も $\mathcal{S}$ の元であり、 $\{2, 4, 6\}$ と $\{5, 6\}$ が $\mathcal{S}$ の元であれば $\{6\} = \{2, 4, 6\} \cap \{5, 6\}$ も $\mathcal{S}$ の元であり、さらに、 $\{3\}$ が $\mathcal{S}$ の元であれば $\{1, 2, 4, 5, 6\} = \Omega - \{3\}$ も $\mathcal{S}$ の元であるといった構造を $\mathcal{S}$ もまたもたなければならない．それゆえ、確率空間 $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ の設定において、 $\mathcal{S}$ は全く任意ではなく、われわれが普通要求しているような確率事象の構造に対応する構造をそれらはもたなくてはならない．単純事象が無限個ある場合まで考えると、一般にこの $\mathcal{S}$ は以下に明かにされるような意味での σ -環という集合代数的構造をもつことが要求されるのである．とくに確率論の場合には全事象 Ω もまた $P(\Omega) = 1$ なる確率をもつ確率事象と考えられているから、 Ω もまた $\mathcal{S}$ の元である．そのとき、 σ -環は σ -集合体とよばれる．

一般に確率論が展開されるとき的基本的概念として上記のものに次いで重要なのは、確率変数 (random variable) の概念である．確率変数は上記のサイコロ投げの例の場合には、トリヴィアルであるが、次のように定義される． Ω を動く変数 ω の関数 $X(\omega)$ が $X(\omega) = \omega$ なる実数値をとる関数⁽⁵⁾であるとき $X(\omega)$ を確率変数という．この $X(\omega)$ の値は明らかに $X(1) = 1, \dots, X(6) = 6$ であり、さらに

$$P(\{\omega: X(\omega)=1\})=P(\{1\})=\frac{1}{6}, \dots, P(\{\omega: X(\omega)=6\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}^{(6)}$$

なる条件をみたしている。確率変数の厳密な定義は後に与えるにしても、要するにそれは空間 Ω の元に対してある実数値を与えるところの関数であって、しかもそれは確率との関係で一定の条件をみたしている。したがって、確率変数は確率空間 Ω の点から実数すなわち実数空間中の点への関数の一種であって、確率が $\mathcal{S}$ 上の集合関数であったのに対して、確率変数は Ω 上の点関数 (point function) である。そこに両者の基本的相違点がある。そして、確率変数は測度論的にいえば可測関数 (measurable function) の一種であって、その正確な定義は関数の可測性の概念に依存している。

確率変数とともに重要な確率論的概念は期待値 (または平均値, 数学的期望値) であろう。たとえば, サイコロ投げの場合, 期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 n \cdot P(\{\omega: X(\omega)=n\}) &= 1 \cdot P(\{\omega: X(\omega)=1\}) + \dots + 6 \cdot P(\{\omega: X(\omega)=6\}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

で定義される。この例のように確率変数の値が離散的な場合だけでなく連続的な場合も含めて、期待値は一般に積分の形で与えられる。確率変数が可測関数であるとすれば、期待値の問題は当然可測関数の積分の問題に帰着する、いいかえれば、それは通常のリーマン積分より広いルベーグ積分の理論に帰着するのである。

以上のことを要約すれば、確率論の数学的展開には、

- (1) 空間 Ω の部分集合の族 $\mathcal{S}$ の構造
- (2) 確率という $\mathcal{S}$ 上の集合関数の特性
- (3) 確率変数という Ω 上の点関数の特性
- (4) 期待値に関係する確率変数の積分可能性

が基本的に問題とならざるをえない。そして、これらはそれぞれ次のよう

な確率に限られぬより一般的な概念に関係してくるのである.

- (5) $\mathcal{S}$ の構造を特徴づける σ -環あるいは σ -集合体
- (6) 確率はその一種である $\mathcal{S}$ 上の集合関数としての測度
- (7) 確率変数の一般概念としての可測関数
- (8) 期待値の一般概念としての可測関数の積分

さらに, 関数の可測性と関連して基本的には重要なのはボレル集合およびすべてのボレル集合を元とするボレル集合族である. 以下, これらの概念の基本的性格を明らかにしてゆきたい. (叙述を簡単にするため, 以下すべて一次元のケースについて論ずる.)

§ 1. 集合の半環, 環, σ -環, 体および σ -体

すでにのべたように空間 Ω の部分集合を元とする集合族 $\mathcal{S}$ の構造的特徴は $\mathcal{S}$ が σ -環とよばれるものになるということである. この章では σ -環と, さらにその基礎となる諸概念についてのべてゆきたい. それにはまず一定の集合 (空間) Ω を前提にして, その族のうちで, より基本的なものから順にのべることにする.

定義 1-1. 半環 (semi-ring) の定義

Ω の部分集合の空でない集合族 $\mathcal{P}$ は次のとき半環とよばれる:

- (a) もし $E \in \mathcal{P}$ かつ $F \in \mathcal{P}$ ならば, $E \cap F \in \mathcal{P}$.
- (b) もし $E \in \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P}$ で, かつ $E \subseteq F$ ならば, $E = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_n = F$ であってかつ $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathcal{P} (i=1, 2, \dots, n)$ であるような $\mathcal{P}$ の有限個の元 $C_0, C_1, \dots, C_n$ ⁽⁷⁾ が存在する.

$\mathcal{P}$ が半環であれば (b) の条件から空集合 $\emptyset$ はつねに $\mathcal{P}$ の元である.

半環の例としては Ω の空集合およびすべての一点集合 ($\omega \in \Omega$ のときの $\{\omega\}$ という集合) から成る集合族があるが, 以下で重要なのは次のような半環である. Ω を実直線 ($\{x: -\infty < x < +\infty\}$, 以下 $(-\infty, \infty)$ または $\mathbb{R}^1$ で示す) と考えて, すべての有界な右半開区間 $[a, b)$ (すなわち $\{x: -\infty$

$\{a \leq x < b < +\infty\}$ という $(-\infty, \infty)$ の部分集合) を元とする集合族を $\mathcal{P}$ とすると, $\mathcal{P}$ は半環である. 以下この半環を $\mathcal{P}^*$ で表わすことにする. $\mathcal{P}^*$ の元は $[a, b)$ の形にかける区間であって, $[a, b)$ と $[c, d)$ の和は, $b=c$ のとき, すなわち $[a, d)$ がひとつの区間となるときでなければ $\mathcal{P}^*$ の元にはならない. この点が以下の環との相違点である. (ここでは $[a, b)$ なる半开区間をとったが, $[a, b)$ の代りにそれぞれ (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$ なる开区間, 左半开区間, 閉区間をとっても, またそれらのすべてをとってもその集合族は半環となる.)

定義 1-2 環 (ring) および σ -環 (σ -ring) の定義

Ω の部分集合から成る空でない集合族 $\mathcal{R}$ あるいは $\mathcal{S}$ は次のときそれぞれ環あるいは σ -環とよばれる:

- (a) もし $E \in \mathcal{R}$ であつ $F \in \mathcal{R}$ ならば, $E \cup F \in \mathcal{R}$ であつ $E - F \in \mathcal{R}$.
- (b) もし $E \in \mathcal{S}$ であつ $F \in \mathcal{S}$ ならば, $E - F \in \mathcal{S}$.
- (c) もし $E_i \in \mathcal{S}$, $i=1, 2, \dots$ ならば, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

いいかえれば, 環 $\mathcal{R}$ は集合の差および有限個の和に対して閉じている集合族であり, σ -環 $\mathcal{S}$ は集合の差および可算無限個の和に対して閉じている集合族である. $\mathcal{R}$ も $\mathcal{S}$ も (a), (b) の F に E をとることによって空集合 $\emptyset$ を元とすることは明らかである.⁽⁸⁾ また, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \dots = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$ であるから, σ -環は環であり, $E \in \mathcal{R}$, $F \in \mathcal{R}$ で $E \subseteq F$ ならば, $E \subseteq E \cup (F - E) = F$ で $F - E \in \mathcal{R}$ であるから, 環と σ -環は半環である.

確率空間の場合のように, Ω それ自体が $\mathcal{R}$ または $\mathcal{S}$ の元であるときには, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ は, それぞれ, (集合) 体 (algebra, field), σ -(集合) 体 (σ -algebra, σ -field) とよばれる. このとき, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ は $\Omega - E = E^c$ なるいわゆる余 (補) 集合の演算に対して閉じていることとなる.

一般にある Ω が与えられたときその部分集合族のうちで環または σ -環となるものが必ず一つある. Ω のすべての部分集合を元とする集合族

$\mathcal{P}(\Omega)$ がそれである。それゆえ、 Ω の任意の部分集合族 $\mathcal{A}$ が与えられたとき、 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ である以上、 $\mathcal{A}$ を含む環または σ -環が必ず一つはある。そこで、 $\mathcal{A}$ を含む環または σ -環のうちで最小のものをとって、それを $\mathcal{A}$ によって生成される環 (または σ -環) とよび、 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ (または $\mathcal{S}(\mathcal{A})$) で表わす。これは唯一つにきまることが容易に示される。

確率論で σ -環 $\mathcal{S}$ の果す重要性は極限の問題と関係している。 σ -環は環と異なり可算無限個の集合の和と積に対して閉じている。いま、 Ω の可算無限個の部分集合 $E_1, E_2, \dots$ の列 $\{E_n\}$ が $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ または $\dots \subseteq E_2 \subseteq E_1$ なる条件をみたしているとき、それぞれ単調非減少 (列)、または単調非増加 (列) といい、 $n \rightarrow \infty$ のときのその極限 $\lim_n E_n$ は、それぞれ、 $\lim_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ または $\lim_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ と定義される。そこで、もしすべての $E_1, E_2, \dots$ が $\mathcal{S}$ の元であれば、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ と $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ も $\mathcal{S}$ の元であるから $\lim_n E_n$ は $\mathcal{S}$ の元である。環については一般にこれは成り立たない。それゆえ、われわれが無限個の確率事象の極限を考えることを要求される大数の法則などのケースについて、 σ -環の果す役割の重要性は想像に難くないであろう。一般に、元 $E_1, E_2, \dots$ の単調非減少または単調非増加の列の極限 $\lim_n E_n$ もまた元であるような集合族を単調な (monotone) 集合族とよぶ。 σ -環は単調である。⁽⁹⁾

すでにあげた半環 $\mathcal{P}^*$ に関連して以下で重要な環および σ -環の例をあげよう。 Ω を実直線 $\{x: -\infty < x < +\infty\}$ とし、その有界な半開区間 $[a, b)$ のすべてから成る半環が $\mathcal{P}^*$ であった。 $\mathcal{P}^*$ の元のうちで任意の n 個の互いに素な ($[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \emptyset$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ であるような) 半開区間 $[a_1, b_1), \dots, [a_n, b_n)$ をとったとき、 $\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)$ を元とするような集合族を $\mathcal{R}^*$ とすると、 $\mathcal{R}^*$ は $\bigcup_{i=1}^n \{x: -\infty < a_i \leq x < b_i < +\infty\}$ の形のすべての集合を元としている。この $\mathcal{R}^*$ は環であって、しかも $\mathcal{P}^*$ によって生成される環 $\mathcal{R}(\mathcal{P}^*)$ に等しい。 $\mathcal{R}^*$ が環であることはその定義上明らかであろう。さらに、 $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{R}^*$ も明らかである。したがって、 $\mathcal{R}(\mathcal{P}^*) \subseteq \mathcal{R}^*$

であるが、 $\mathcal{R}^*$ の元は $\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i)$ で $[a_i, b_i) \in \mathcal{P}^*$ の形をしているから $\mathcal{R}(\mathcal{P}^*)$ の元であり、 $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{P}^*)$. この $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}(\mathcal{P}^*)$ は $\mathcal{P}^*$ と異なり有限個の跳び跳びの区間 $[a_1, b_1), \dots, [a_n, b_n)$ の和もその元としている.

同様にして、この $\mathcal{R}^*$ からさらにそれによって生成される σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ をつくることことができる. この場合 $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*) = \mathcal{S}(\mathcal{P}^*)$ となることも容易に示される. $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ は、したがって、半開区間 $[a_i, b_i)$ の可算無限個の和および積に対して閉じているところの集合族である. さらに

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right), [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{1}{n} \right), (a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$$

であり、また $\Omega = (-\infty, \infty) = \lim_n (-n, n)$ であるから $\Omega \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$. したがって、 $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ は σ -体である. これが後にいわれるボレル集合の族に他ならないので、ボレル集合体とよばれる.

かくして、確率事象を性格づけるところの確率空間 Ω の部分集合族 $\mathcal{S}$ は σ -体という構造をもつ. 単に体であるばかりでなく σ -体であるという要求は通常の余事象、和事象、積事象の形成という操作に対応するのみでなく、可算無限個の確率事象列の極限の問題に関係している訳である.⁽¹⁰⁾

§ 2. 集合関数と測度

つぎに確率概念に関連する集合関数とその一種であるところの測度について述べよう. 集合関数はその定義域を集合族とするような関数、したがって、ある集合に対して一定の関数値を与えるような関数である. このような集合関数が一定の条件をみたすときに、それはとくに測度とよばれる.

定義 2-1. 測度 (measure) の定義

環 $\mathcal{R}$ の上で定義された、負でない広義の実数値をとる集合関数 μ が次の σ -加法性の条件をみたし、かつ $\mu(\emptyset) = 0$ であるとき、 μ を $\mathcal{R}$ 上の測度とよぶ、

(a) $E_1, E_2, \dots$ が $\mathcal{R}$ の互いに素な集合であって、かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$

であるならば,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

もしも $\mathcal{R}$ の代りに σ -環 $\mathcal{S}$ を考えれば, σ -加法性の条件中 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$ は明らかに不要である. また, 測度なる語を (a) の σ -加法性の代りにはるかに弱い次の有限加法性の条件をみたすときにも用いることがある.

(b) $E_1, E_2, \dots, E_n$ が集合族 $\mathcal{A}$ の集合でかつ $\cup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$ ならば,

$$\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

$\mathcal{A}$ が環 $\mathcal{R}$ のときには $\cup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{R}$ なる条件は明らかにみたされる. たとえば, いわゆるジョルダン (Jordan) 測度はこの意味での測度であるが, ここでは測度はすべて σ -加法的であるとし, それ以外のときは集合関数とよぶことにする.

測度に対してはその定義からただちに次の性質がえられる.

- (1) もし $E \in \mathcal{R}$, $F \in \mathcal{R}$, かつ $E \subseteq F$ ならば, $\mu(E) \leq \mu(F)$. (単調性)
- (2) もし $E \in \mathcal{R}$, $F \in \mathcal{R}$, $E \subseteq F$, かつ $\mu(E) < \infty$ ならば, $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. (減法性)
- (3) もし $E \in \mathcal{R}$ でかつ $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{R}$ であって $E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ ならば, $\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. (σ -劣加法性)
- (4) もし $E_1, E_2, \dots$ が $\mathcal{R}$ の集合の単調非減少列 (単調非増加列で, 少くともひとつの E_i に対して $\mu(E_i) < \infty$) で, かつ $\lim_n E_n \in \mathcal{R}$ ならば, $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$. (連続性)

証明はいずれも容易である. とくに, 確率空間におけるように, $\mathcal{R}$ が σ -体 $\mathcal{S}$ の場合には (4) の $\lim_n E_n \in \mathcal{S}$ は明らかである. また (3) は $E_1, E_2, \dots, E_n$ が有限個であるときにも成立することは明らかである.

$\mathcal{R}$ の集合 E が $\mu(E) < \infty$ のとき E は有限の測度をもつという. さらに, $\mathcal{R}$ の集合の列 $E_1, E_2, \dots$ があって $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ であり, $\mu(E_n) < \infty$ ($n=1, 2, \dots$) のとき, E は σ -有限の測度をもつという. $\mathcal{R}$ のすべての集合が有限 (または σ -有限) の測度をもつとき, 測度 μ は有限 (または

σ -有限) であるといわれる. とくに, 確率空間のように, Ω が $\mathcal{R}$ の元で, かつ $\mu(\Omega)$ が有限のとき, μ は有界とよばれる. 同様に, $\Omega \in \mathcal{R}$ で $\mu(\Omega)$ が σ -有限のとき, μ は σ -有界とよばれる. さらに, 測度 μ が, もし $E \in \mathcal{R}$, $F \subseteq E$ でかつ $\mu(E) = 0$ ならば $\mu(F) = 0$ である, という条件をみたすときには, 完備 (complete) であるとよばれる.

すでにのべたように, 確率は, いわゆる確率の加法性を考慮に入れるとき, 空間 Ω の部分集合を元とする σ -集合体 $\mathcal{S}$ の上の測度であることは明らかであろう. とくに, 確率という測度は $\mathcal{S}$ の集合 E に対してつねに $P(E) \leq 1$ であるから有限, しかも $P(\Omega) = 1 < \infty$ であるから有界である. したがって, 上の連続性 (4) の条件の括弧中の $\mu(E) < \infty$ は自動的にみたされる. このように, 確率が σ -加法性をみたす測度であるという条件を明確にしたことは, 測度論的確率論の重要な巧績である.

確率と並んで, 測度の重要な例として区間の長さをあげておく必要がある. 測度は元来長さとか面積とかという概念の拡張もしくは抽象化である. その意味でも区間の長さはとくに重要であるが, それはまたボレル集合およびルベーグ測度との関連において重要なのである.

いま, すでにのべた半環 $\mathcal{P}^*$ の元である半開区間 $[a, b)$ に対して集合関数 $\mu([a, b)) = b - a$ を定義する. これが負でない実数値をとることは明らかであり, かつ $\mu(\emptyset) = \mu([a, a)) = a - a = 0$ である. ところで, この μ は $\mathcal{R}^*(= \mathcal{R}(\mathcal{P}^*))$ なる環の上の測度といえるであろうか. たとえば, まず, $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R}^*$ で E_i が互いに素であるとき, $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$ であること, すなわち μ が有限加法的であるといえるかどうかを考えてみる. 答えは否定的である. 問題は μ が有限加法的でないという点ではなくて, むしろ $\bigcup_{i=1}^n E_i$ が一つの半開区間 $[a, b)$ の形ではなくて, いくつかの切れ切れの半開区間 $[a_1, b_1), \dots, [a_n, b_n)$ の和のときには μ が定義されていないという点にある. まして, μ が σ -加法性をみたすか否かということは問題にならない. そこで, 通常次のような手続きによって, この μ

を環 $\mathcal{R}^*$ 上の測度へと拡張する.

まず, μ が $\mathcal{P}^*$ 上では σ -加法的であることは察しがつく. たとえば, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ で E_n は $\mathcal{P}^*$ の互いに素な集合とする. E が $\mathcal{P}^*$ の集合ならば, $E = [a, b)$ の形をしているはずであるから, $E = [a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ であるというのは, E が丁度互いに重ならない区間 $[a_n, b_n)$ をつなげたもの, すなわち, たとえば $b_i = a_{i+1} (1 \leq i)$ となっていることであろう. それゆえ, $\mu(E) = \mu([a, b)) = b - a = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. 事実これは厳密に証明される⁽¹²⁾.

そこで, 残る問題は $\mathcal{P}^*$ の上で σ -加法的な集合関数 μ の「区間の長さ」という性質を保存しながらこれを環 $\mathcal{R}^*$ の上への測度へと拡張してやることである. それは容易であって, 新しく次のような集合関数 $\bar{\mu}$ を定義してやればよい. すなわち, $\mathcal{R}^*$ の任意の集合 E に対して, $\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$, ただしここで $E_1, \dots, E_n$ は $\mathcal{P}^*$ の互いに素な集合で $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ とする. すでにのべたように, $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}(\mathcal{P}^*)$ で $\mathcal{R}^*$ の集合 E はすべて $\mathcal{P}^*$ の互いに素な集合 $E_1, \dots, E_n$ を用いて $\bigcup_{i=1}^n E_i$ の形で表わせるから, $\bar{\mu}$ は $\mathcal{R}^*$ の上の集合関数であるし, E が $\mathcal{P}^*$ の集合のときには明らかに $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ である. μ , したがって $\bar{\mu}$ は $\mathcal{P}^*$ で σ -加法的であること, および $\mathcal{R}^*$ の集合 E が $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i (E_i \in \mathcal{R}^*)$ の形のときには $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} E_{ij} (E_{ij} \in \mathcal{P}^*)$ であることを用いれば, $\bar{\mu}$ が $\mathcal{R}^*$ で σ -加法的なことも容易に示される. しかもこの $\bar{\mu}$ はその定義上ただ一つにきまってくる. この結果, $\mathcal{R}^*$ の測度として, 区間の長さ, あるいはその有限個の長さの和というものを考えてよいことになる.

測度論において, したがって確率論においても理論的にきわめて重要な役割を演ずるのは, 上の手法に似ている拡張の手法であって, それは通例「拡張定理」とよばれる. それは, 一般にある環 $\mathcal{R}$ の上の測度を σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の上への測度へと拡張する手法を与える. これはとくに確率の積空間の構成において, またボレル集合族とルベーグ測度の構成において本質

的な役割を演ずる．そこで，以下に，この定理とその証明のラフ・スケッチを与えておこう．

定理 2-1. 測度の拡張定理

μ を環 $\mathcal{R}$ の上の測度であるとすれば， $\mathcal{R}$ の集合 E に対して $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ となるような σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の上の測度 $\tilde{\mu}$ が存在してただひとつにきまる．

証明のスケッチ

I. 外測度の構成 任意の高々可算個の $\mathcal{R}$ の集合 $E_1, E_2, \dots$ に対して $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ となるような Ω の部分集合 E のすべてから成る集合族を $\mathcal{H}$ とする．

$\mathcal{H}$ の元 E に対して $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ であるようなすべての $\mathcal{R}$ の集合の列 $\{E_i\}$ に対して $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ を考え，その下限をとって， E の集合関数 μ^* を定義する，すなわち

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad (\inf \text{ はすべての } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \text{ に対してとる}).$$

μ^* は次の条件をみたす．

- (a) μ^* は負でない広義の実数値をとる．
- (b) μ^* は単調である．
- (c) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ．
- (d) $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ ． (σ -劣加法性)

一般に上の (a)～(d) をみたす集合関数は外測度 (outer measure) とよばれるが，それは (d) のゆえにあくまでも集合関数にすぎない．

(a)～(c) は μ^* の定義と下限 $\inf$ の性質から明らかである．(d) は次の考察から明らかであろう． μ^* の定義から任意の正数 ε に対して

$$E_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{ik}, \quad E_{ik} \in \mathcal{R} \quad \text{で} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{ik}) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

なる集合列 $\{E_{ik}\}$ が存在する．というのは，もしもすべての $\{E_{ik}\}$ に対して $\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} < \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{ik})$ ならば，下限の性質から $\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\leq \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{ik}) = \mu^*(E_i)$ となる。それゆえ、

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{ik},$$

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{ik}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

ε は任意の数であるから

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

しかも、もし $E \in \mathcal{R}$ ならば、 $E \subseteq E$ であるから $E, \emptyset, \emptyset, \dots$ なる集合列をとれば、 $\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \mu(E) + \mu(0) + \dots = \mu(E)$ 。また $\mu(E) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ から $\mu(E) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu^*(E)$ 、よって、 $\mu^*(E) = \mu(E)$ となる。

したがって、外測度 μ^* は μ の拡張となっている。また、 μ^* の定義域は Ω の部分集合の族 $\mathcal{H}$ であるが、 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{R}$ の高々可算個の集合で被われている集合から成る族であって、次の性質（相続性）をもつ：もし Ω の部分集合 F が $\mathcal{H}$ の元 E に対して $F \subseteq E$ ならば、 $F \in \mathcal{H}$ である。実際この集合族は $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ からうかがわれるように σ -環であって、しかも $\mathcal{R}$ を含む最小の相続的な σ -環である。以下この $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ とかくと $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$ 。ゆえに μ^* の定義域は $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ を含む⁽¹³⁾。

II. μ^* -可測集合

μ^* の定義域 $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ の集合 E が $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ のすべての集合 A に対して

(a) $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ ($A \cap E^c \subseteq A$ で $A \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ であるから $A \cap E^c \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$) なるとき、 E は μ^* -可測 (μ^* -measurable) とよばれる。いますべての μ^* -可測な集合から成る集合族を $\mathcal{S}$ とすると、定義上 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{R})$ であって、

(b) $\mathcal{S}$ は σ -環である、そして、もし $\mu^*(E) = 0$ ならば、 E は $\mathcal{S}$ の元である

(c) $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の集合はすべて μ^* -可測である

ということが示される。

(b) は、 $E, F \in \mathcal{S}$, $E_i \in \mathcal{S}$ なるときの $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E - F)) + \mu^*(A \cap$

$(E-F)^c$) と $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)^c)$ の証明に帰着する. ところが, $\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c)$, $\mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c)$ であり, さらに $\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$ がすべての n についているから $\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$ である, という二つのことから適当な変形と代入によってえられる. またもし $\mu^*(E) = 0$ ならば, $\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ であるから, $E \in \mathcal{S}$ が示される.

(c) の証明も容易である. もし $E \in \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ とすれば, 任意の正数 ε に対して, μ^* の定義から, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ であつ

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \varepsilon &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(E_i \cap E) + \mu(E_i \cap E^c)) \geq \mu^*(A \cap E) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

なる $\mathcal{R}$ の集合列 $\{E_i\}$ がある. ところが ε は任意であるから, E は μ^* -可測である. それゆえ, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. そこで $\mathcal{S}$ は σ -環で $\mathcal{R}$ を含むことになるから最小の σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ はこの $\mathcal{S}$ に含まれる. よって $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の集合はすべて μ^* -可測である.

かくして, μ^* -可測な集合の族 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ を含むから, もし μ^* が $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の上で測度となれば, μ^* を求める $\tilde{\mu}$ と考えることができる.

III. $\tilde{\mu}$ の定義

そこで, $\mathcal{S}$ の任意の集合に対して

$$\tilde{\mu}(E) = \mu^*(E)$$

と定義すると, $\tilde{\mu}$ は $\mathcal{S}$ の上の測度であることがいえる. いま, μ^* の σ -加法性を示そう. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ で E_i は互いに素な $\mathcal{S}$ の集合とする. すでにあげたように $\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$ がすべての n に対していえることから, $\mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$. いま $E \in \mathcal{S}$ であるから, $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$. そこでこの A に E をとれば $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu^*(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. それゆえ, 定義によって $\tilde{\mu}$ もまた σ -加法的であり, $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{S}$ であるから, $\tilde{\mu}$ は $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ の上の測度となる.

さらに, $E \in \mathcal{S}, F \subseteq E$ で $\tilde{\mu}(E)=0$ ならば, $\mu^*(F)=0$, よって (b) から $F \in \mathcal{S}$, それゆえ $\tilde{\mu}$ は $\mathcal{S}$ で完備である. しかも環 $\mathcal{R}$ 上の測度 μ が σ -有限ならば $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ 上の測度 $\tilde{\mu}$ は σ -有限で唯一つにきまることがいえる ($\tilde{\mu}$ は $\mathcal{S}$ 上で完備であるが, $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ に制限すると完備ではない).

以上の拡張定理をすでにえられた半環 $\mathcal{Q}^*$ の拡張 $\mathcal{R}^*(=\mathcal{R}(\mathcal{Q}^*))$ と集合関数 $\mu([a, b))=b-a$ の拡張である $\mathcal{R}^*$ 上の測度 $\tilde{\mu}$ に適用すると σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)(=\mathcal{S}(\mathcal{Q}^*))$ 上の測度がえられる. すなわち, $\mu^*(E)=\inf \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_i)$ なる外測度から $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ 上の測度がえられる. この σ -環 $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ の元である集合をボレル集合 (Borel set), $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ をボレル集合族 (これを $\mathcal{B}$ と表わす), さらに, 環 $\mathcal{R}^*$ の拡張でかつ $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ を含むところの集合族 $\mathcal{S}^*$ をルベーク可測 (略して L -可測, Lebesgue measurable) 集合の族, その元をルベーク可測集合, $\mathcal{S}^*$ の測度 $\tilde{\mu}$ をルベーク測度とよぶ. ルベーク測度 $\tilde{\mu}$ は σ -有界で, ルベーク可測集合の族 $\mathcal{S}^*$ において完備である. $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*) \subset \mathcal{S}^*$ であるから $\tilde{\mu}$ を $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ 上に制限した測度は $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ で完備ではないが, それもまたルベーク測度とよばれる. 簡単にいって, 一次元のユークリッド空間におけるボレル集合とは区間 $[a, b]$ あるいは (a, b) その他から出発してそれらの差, 可算無限個の和および積の操作をくり返すことによってえられる集合のことであって, ボレル集合族は $(-\infty, \infty)$ 上のすべての区間を含む最小の σ -環である.

確率論と関連して重要なのは, このルベーク測度と並んで, ルベーク-スチルチェス測度 (Lebesgue-Stieltjes measure) 略して L-S 測度である. これはルベーク測度 $\tilde{\mu}$ が $\mathcal{Q}^*$ 上の集合関数 $\mu([a, b))=b-a$ から出発したのに対して実数 x の関数 $g(x)$ が有限の実数値をとり, かつ単調非減少で連続であるとき, $\mu_g([a, b))=g(b)-g(a)$ なる集合関数 μ_g を考え, この μ_g を上と全く同様な手法で $\mathcal{R}^*$ 上の測度 $\tilde{\mu}_g$ に, さらにこの $\tilde{\mu}_g$ を $\mathcal{S}^*$ すなわち $\tilde{\mu}_g^*$ -可測集合の族の上の測度 $\tilde{\mu}_g$ へと拡張したとき, この $\tilde{\mu}_g$ を g によって誘導された (induced) ルベーク-スチルチェス測度とよぶ.⁽¹⁴⁾

ボレル集合 B に対しては、 $\tilde{\mu}(B)$ が有限のときには、任意の正数 ε に対して、 $\mathcal{R}^*$ の集合 E が存在して $\tilde{\mu}(B \triangle E) \leq \varepsilon$ なることがいえる。いいかえれば、有限測度のボレル集合 B は $\mathcal{R}^*$ の集合つまり有限個の区間の和で近似できる。ルベーク測度 $\tilde{\mu}$ は $g(x)=x$ なるときのルベーク-スチルチェス測度 $\tilde{\mu}_g$ であり、 $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}_g^*$ であるから、 $\mathcal{S}_g^*$ はすべてのボレル集合を含み、かつ、 $\mathcal{S}_g^*$ の集合 E に対して $\tilde{\mu}_g(E \triangle B) = 0$ となるようなボレル集合 B が存在することが示される。⁽¹⁵⁾

註

- (1) 私のいう統計的推論なる語は検定論・推定論などのいわゆる統計的推測よりはるかに広い。一般に、統計的推測に限らぬ統計的手法を援用する推論の意味に理解して頂きたい。
- (2) たとえば、赤撰也 確率論入門 培風館 1958, 河田竜夫 確率と統計 朝倉書店 1961, 本間鶴千代 確率論 筑摩書房 1971 などがあげられよう。
- (3) 紙数の関係で今回は序論、第1章および第2章のみを掲載して、当初準備されていた、第3章 可測空間、測度空間、可測関数、第4章 ルベーク・スチルチェス積分、第5章 確率空間の構成 の諸章は次回以降に譲らざるをえなくなった。
- (4) 後に見るように、事象は全事象の部分集合である。その意味では単純事象のみが Ω の元であって集合ではないのは、用法として一貫性を欠いている。ここでは慣例に従ったが、本来は Ω の元ではなく Ω の元の単一集合を単純事象とよぶべきであろう。
- (5) 確率変数の値は複素数であってもよいが、多くの場合実数である。以下、実数値をとることを前提する。
- (6) 集合論上の記法を用いて $\{x: A(x)\}$ は A なる条件をみたす x の集合を表わす。
- (7) $\cap, \cup, -, \subseteq$ はそれぞれ集合の積・和・差・包含関係を示す。 $E \subset F$ は $F \subseteq E$ で $E \neq F$ を示すものとする。
- (8) 通常集合論的演算の結果から $E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$, $E \cap F = (E \cup F) - (E \triangle F)$ であるから、 $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ は、それぞれ、集合の対称差 $E \triangle F$ および有限または可算無限個の積 ($\bigcap_{i=1}^n E_i$ または $\bigcap_{i=1}^\infty E_i$) に対して閉じているといっても同様である。それゆえ、結論的には環 (σ -環) は差, 対称差, 有限個 (可算無限個) の和と積に対して閉じている。

- (9) 集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の単調な集合族を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ とすると, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ はつねに σ -環で $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$. 一般に $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ の構成は容易でないが $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は極限移行の操作に対して閉じているという性質上, 構成が容易である. しかも $\mathcal{A}$ が環 $\mathcal{R}$ のときは $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{R})$ である.
- (10) この章に関して, 詳しくは, [1] § 1-§ 3, [4] 第 1 章, [5] 後篇 第 1 章, [6] 第 1 章 § 5, [7] 1 を参照.
- (11) ここでいう広義の実数値とは, $+\infty$, $-\infty$ までを実数に含めたもの, したがって, $+\infty$, $-\infty$ をも値としてとりうるものと解する.
- (12) 厳密な証明で面倒なのは $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ の部分における b なる点の処理である. そのため, $\mu(E) - \varepsilon = (b-a) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \delta = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \delta$ を任意の δ と $\varepsilon < b-a$ に対して証明する. それには $[a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i\right)$ から, ハイネ・ボレルの定理によって $[a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i\right)$ を導いてやればよい. そのとき, $a_1 - \frac{\delta}{2} < a < b_1$, $a_n - \frac{\delta}{2^n} < b - \varepsilon < b_n$ とおくことができるから, $(b-a) - \varepsilon = (b-\varepsilon) - a < b_n - \left(a_1 - \frac{\delta}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^n \left(b_i - \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \delta$. ただし $i=1, 2, \dots, n-1$ に対して $a_{i+1} - \frac{\delta}{2^{i+1}} < b_i < b_{i+1}$ とする.
- (13) 確率空間や $\mathcal{R}^1$ における $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ のように集合族 $\mathcal{S}$ や $\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ が σ -体である場合には $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\Omega)$ または $\mathcal{P}(\mathcal{R}^1)$ ととって差し支えない. ここでは, σ -体ではなくて単に σ -環にすぎない場合にも適用できる方法をのべた.
- (14) より厳密に言えば, 関数 $g(x)$ が連続でないときにも, 証明を若干修正することによって, L-S 測度 $\bar{\mu}_g$ を与えることができる. だが, この場合, $\bar{\mu}_g([a, b)) = g(b-0) - g(a-0)$, $\bar{\mu}_g([a, b]) = g(b+0) - g(a-0)$, $\bar{\mu}_g((a, b)) = g(b-0) - g(a+0)$, $\bar{\mu}_g((a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$, さらに $\bar{\mu}_g(\{a\}) = g(a+0) - g(a-0)$ となって, $\bar{\mu}([a, b)) = \bar{\mu}([a, b]) = \bar{\mu}((a, b)) = \bar{\mu}((a, b]) = b-a$, $\bar{\mu}(\{a\}) = 0$ と異なることに注意せねばならない (ここで, $g(a+0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h)$, $g(a-0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(a-h)$ である). g が a, b で連続であるときに限って, $\bar{\mu}_g([a, b)) = \bar{\mu}_g([a, b]) = \bar{\mu}_g((a, b)) = \bar{\mu}_g((a, b]) = g(b) - g(a)$. 確率論との関連からいえば, $g(x)$ が左連続, すなわち $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x-\varepsilon) = g(x)$ であって, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c < \infty$ なるときが重要である. このとき, 左連続の条件から, $\mu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$ が $\mathcal{P}^*$ において σ -加法的であることの証明において, 任意の $\delta > 0$ に対し $g([a_i - \delta_i, a_i)) < \frac{\delta}{2^i}$ なる δ_i の存在がいえるから, 前

の証明と同様に $\mu_g([a, b)) \leq \sum_{i=1}^n \mu_g([a_i - \delta_i, b_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_g([a_i, b_i)) + \delta$ がいえる (§ 2, 註 (12) 参照). このときは, 明らかに, $\bar{\mu}_g([a, b]) = g(b+0) - g(a)$, $\bar{\mu}_g((a, b)) = g(b) - g(a+0)$, $\bar{\mu}_g([a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$, $\bar{\mu}_g(\{a\}) = g(a+0) - g(a)$ である (II の § 4 および註, 参照).

- (15) この章の詳細については, [1] § 4-§ 6, [4] § 7-§ 16, [5] 後篇 § 1-§ 12, [6] 第 5 章 § 1-§ 3, [7] 3, 4 を参照.

文 献

- [1] Cramér, Harald: Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.
- [2] Feller, William: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I, John Wiley, New York, 1950.
- [3] Feller, William: Ibid., Vol. II, 1966.
- [4] Halmos, Paul R.: Measure Theory, van Nostrand, New York, 1950.
- [5] 河田敬義-三村征雄: 現代数学概説 II 岩波 1965.
- [6] コルモゴロフ-フォミーン・山崎三郎訳: 関数解析の基礎 岩波 1971.
- [7] Loève, Michel: Probability Theory, 3rd ed., van Nostrand, Princeton, 1963.

Fundamental Concepts of Probability Theory I

Akira Oide

Résumé

This article, with the second part to issue in the same review, forms an introductory part of a forthcoming paper concerning the analysis of structure of statistical inference. The fundamental concepts of measure-theoretical probability theory such as measure on σ -field of sets, extension theorems on measure and Lebesgue-Stieltjes integral are discussed in the parts I and II. The final object of the author in this series of papers is to make the fact clear that probability space is a mathematical model to be tested both from various points of view and by various procedures of test, and to point out the deductive character of statistical inference which is sometimes misconceived as if it were inductive.