Title	Fuchs Extensions
Sub Title	
Author	西岡, 啓二(Nishioka, Keiji)
Publisher	慶應義塾大学湘南藤沢学会
Publication year	2013
Jtitle	リサーチメモ
Abstract	
Notes	
Genre	Technical Report
URL	http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=0302-0000-0667

ISBN 978-4-87762-262-6
SFC-RM 2012-003

Fuchs Extensions

西岡啓二

慶應義塾大学 環境情報学部

Fuchs Extensions　(訂正版)

西岡啓二

慶応義塾大学　環境情報学部

1 Introduction

Fuchs の 1 階代数的微分方程式の一般解に関する古典的理論は松田道彦によって微分代数の理論として蘇った. すなわち Fuchs は分岐点の近傍における位数によって一般解が動く分岐点をもたないという性質を表現した (たとえば Ince の text を参照). それが代数的性格をもつことに着目し, 松田は微分に関して閉じた付値環を導入することによって, 議論をより代数的に扱いやすくした. 著者はこの考えを多次元化し, Fuchs 型微分拡大という概念を得た. この research memo では、概念の定義とその簡単な性質, 例を提示する. また, Hille の研究をこの観点から眺めてみる.

この research note の参考書として

西岡久美子「微分体の理論」共立, 2010

をあげる. そこには, 基本的な道具である線形代数群や 1 変数代数関数論に関してもコンパクトな説明がある.

まず, 代数的微分方程式とはなにか, 線形常微分方程式の解の基本的性質, すなわち解がいくつかの定数に関して線形的に依存するという性質について説明し, その一般化である, 代数的微分方程式の解が定数に関して有理的に依存するという性質を考える. RIMS 研究集会 2010「可積分系数理の多様性- Diversity of the Theory of Integrable Systems -」(2010 年 8 月京都大学数理解析研究所) における講演の内容を再録することによって概観することにしよう.

A 微分方程式

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

は, F が $y, y', \ldots, y^{(n)}$ に関して多項式で, 係数がある領域における x の正則関数であるとき, 代数的微分方程式といわれる (Ritt による設定). 一般に解は $x = x_0$ において初期値 $y = c_1, y' = c_2, \ldots, y^{(n-1)} = c_n$ によって決定される.

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

したがって, 一般的な解は $n+1$ 変数 $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ の関数とみることができる. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ による解の表示を明示的に得ることが求積法のひとつの目的である.

例 もっとも簡単な例は

$$y' = 0$$

この解を定数という. 一般的な解は任意定数とよばれる.

$$y' = a$$

この解を a の不定積分という. y_1 をもうひとつの解とすると c を積分定数として $y = y_1 + c$ と書ける.

$$y' = ay$$

この解を a の指数積分という. y_1 をもうひとつの解とすると c を積分定数として $y = cy_1$ と書ける.

J. Liouville は有理関数から出発して, 不定積分, 指数積分をとる操作と代数的操作を有限回ほどこすことによって得られる関数を初等関数論の類似として議論した. 楕円積分がそのパラメータに関してこの意味の関数ではないことを Liouville は証明した. 同様の手法で Airy 関数が Liouville の関数でないことが示される (Kaplansky).

例 (Clairaut 方程式)

$$F(y', y - xy') = 0$$

F は $\mathbb{C}$ 上既約多項式. 微分して

$$y'' F_1(y', y - xy') + (-xy'')F_2(y', y - xy') = 0$$

F_i は第 i 変数に関する偏微分. これより一般的な解は $y'' = 0$ をみたす. よって

$$y = cx + d$$

ここで c, d は定数で $F(c, d) = 0$ をみたす. 一般的解は直線叢である. この包絡線から一般的解に属さない解, 特異解が得られる. 特異解の研究は Darboux に始まる. Ritt は任意定数の概念によらない方法で解空間を研究した.

例 (Riccati 方程式)

$$y' = ay^2 + by + c$$

3 個のことなる解 y_1, y_2, y_3 を用いれば

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} \cdot \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_2} = c \text{ (定数)}$$

を得る. したがって y は c の一次分数関数で表される.

例 (線形斉次微分方程式)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

の解は, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を定数体上線形独立な特殊解とするとき,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

と表される. c_i は定数である. この簡単な性質から, 楕円関数やパンルヴェ関数が線形方程式の解で代数的に表示できないことが証明される.

B **A** で述べたことは関数の収束性などを考慮しない, 形式的な議論であることが分かる. そこで Ritt にしたがって, 微分体の概念を導入する.

体 K は微分作用素 D とともに考えるとき, 微分体とよばれる. D はつぎをみたす内部演算である.

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = D(a)b + aDb \quad (a, b \in K)$$

以下微分体の標数は 0 とする. 微分拡大体や微分部分体が期待通りに定義される. R/K とかけば, R が K の微分拡大体であることを示すものと約束する. 微分拡大体 R/K の元 y に対して $K\langle y\rangle$ は y を含む K の微分拡大体で最小のものを表す. このとき, y を $K\langle y\rangle$ の生成元という.

微分体 K の定数体 C_K は K に属す定数全体からなる (微分) 部分体である.

$$C_K = \{c \in K \mid Dc = 0\}$$

変数 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ に関する K 上多項式

$$F = \sum_I a_I Y^I, \quad I = (i_j)_{0\le j\le n}, \ Y^I = \prod Y_j^{i_j} \quad (a_j \in K)$$

は $K[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$ と書かれ、K 上代数になる. $Y = Y_0$、$Y_j = D^j Y$ と約束し

$$K\{Y\} = K[Y_0, Y_1, \ldots] = \bigcup_{n=0}^{\infty} K[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$$

とすれば, $K\{Y\}$ は K 上代数であり, 微分作用素 D を内部演算とする. $K\{Y\}$ は K 上微分多項式環とよばれ, そこに属す多項式は K 上微分多項式とよばれる.

$$F \in K[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] \setminus K[Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}] \quad (n \ge 1)$$

であるとき, F の階数は n であるといわれ, $n = \mathrm{ord}_Y F$ と書く. 0 でない K の元の階数は 0 と約束する.

$F = \sum_I a_I Y^I \in K\{Y\}$ とする. ある微分拡大体 R/K で, ある $y \in R$ が

$$F(y) = \sum_I a_I y^I = 0$$

をみたすとき, y を（代数的微分）方程式 $F = 0$ の解という. F は多項式として既約であるとする. もし, y が $\mathrm{ord}_Y F$ より低い階数のどの方程式もみたさないならば, y を $F = 0$ の一般解 (の生成解) という.

一般解はいつでも存在する. 簡単のため 1 階微分方程式 $F = 0$ の場合を考えよう. $F(y, z) = 0$ によって K 上 1 変数代数関数体 $K(y, z)$ をつくる. 微分作用素 $D : K(y) \to K(y, z)$ を $Dy = z$ によって定義する.

$K(y,z)$ は $K(y)$ 上代数的であるから D は $K(y,z)$ にまで一意的に延長することができる. これによって $K(y,z)/K$ が微分拡大体となる. y は $F=0$ の一般解である.

C R/K 普通の意味の拡大体とする. つぎの条件をみたす $\nu : R \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を R/K の rank 1 の離散付値という.

1) $\nu(ab)=\nu(a)+\nu(b)$ $(a,b \in R)$

2) $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a),\nu(b)\}$ $(a,b \in R)$

3) $\nu(a)=0$ $(a \in K)$, $\quad \infty$ $(a=0)$

$\nu(a)=1$ なる元が R に存在するとき、ν は正規化されているという.

$O=\{a \in R \mid \nu(a) \geq 0\}$ を R/K の付値環という. $O \supset K$ である. $P=\{a \in R \mid \nu(a)>0\}$ は O の唯一の極大イデアルである.

R/K を微分拡大体とする. R/K の付値環は一般に微分に関して閉じていない. R/K を 1 変数代数関数体とする. もし, すべての付値環 O が微分に関して閉じている $DO \subset O$ ならば, R/K は動く特異点 (分岐点) をもたないといわれる (Matsuda による定義).

K が代数閉体で R/K は動く特異点をもたないと仮定する. このときつぎが成立する. R/K の種数を g によって表す.

1) $g=0$ のとき $R=K\langle y\rangle$ と表される. y は K 上 Riccati 方程式の解である.

2) $g=1$ のとき $R=C_R$ または $K\langle y\rangle$ と表される. y は K 上方程式

$$(y')^2=\lambda^2(4y^3-g_2y-g_3) \quad (\lambda \in K^\times,\ g_2,g_3 \in C_K,\ g_2^3-27g_3^2 \neq 0)$$

をみたす.

3) $g>1$ のとき $R=KC_R$ と表される.

3) は R が代数的に「解ける」ことを示している.

3) の逆が成り立つ. $R=KC_R$ と表されるとき, R/K の付値環はすべて微分に関して閉じている. 実際 $R=K(u,v)$ $(u,v \in C_R)$ とすれば、R はベキ級数体 $K((t))$ に埋め込まれる. t は

$$u=a+t^e \ (a \in K) \quad \text{または} \quad t^{-e}$$

をみたす. e は分岐指数である. u,v は C_K 上代数的に従属しているから, e が 2 以上になるのは $a \in C_K$ の場合だけである. 関係式を微分すれば, $Dt \in K[[t]]$ であることがわかる.

R/K を微分拡大体とする. R/K が任意定数に関して有理的に依存しているとは, K のある微分拡大体 E でつぎのようなものが存在するときにいう.

1) R, E は K 上 free である. すなわち $x_1, \ldots, x_n \in R$ が K 上代数的独立ならば, それらは E 上でも代数的独立である.

2) $ER = EC_{ER}$ すなわち ER は定数によって生成される.

ER は E と R の合成体を示し, 微分体であることに注意. R/K が 1 変数代数関数体であるとき, R/K が動く特異点をもたないということと, R/K が任意定数に有理的に依存しているということとは同値である.

Clairaut 方程式の一般解, Riccati 方程式の一般解, 線形斉次方程式の一般解などで生成される微分拡大体は任意定数に有理的に依存している.

実際 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$, $y^{(k)} = D^k y$ を K 上の線形斉次微分方程式としよう. y_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ を不定元とし、多項式環 $K[y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ に微分構造を $Dy_{ij} = y_{i,j+1}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ および

$$Dy_{i,n+1} = -a_1 y_{in} - \cdots - a_n y_{i1} \ (1 \leq i \leq n)$$

によって導入する. $E = K(y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n)$ とすれば E/K は微分拡大体であり, $R = K\langle y \rangle, E$ は K 上 free である. そして $ER = EC_{ER}$ を得る.

D 任意定数という概念の有用性を示すために, **C** の考え方を使って, つぎの Sperber の定理を証明しよう.

《$y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n > 1)$ はそれぞれ K 上線形斉次微分方程式の非自明解で, $y_1 = y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$ なる関係式を満足するとする. ここで m_i は正整数である. y_1 が満足する K 上線形斉次微分方程式の階数 N は $\min\{m_2, \ldots, m_n\}$ 以下とする. このとき Dy_i/y_i はすべて K 上代数的である. 》

ある $z_j = Dy_j/y_j$ $(2 \leq j \leq n)$ が K 上代数的でないとして矛盾をだす. y_i たちが生成する K の微分拡大体 $R = K\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ は任意定数に有理的に依存する. E/K を R, E が K 上 free, そして $ER = EC_{ER}$ が満たされるようにとる. C_{ER} は C_E 上代数的独立な元 $c_1, \ldots, c_r$ によって $C_E(c_1, \ldots, c_r)$ 上代数的となる.

$$C_{ER} = C_E(c_1, \ldots, c_r, d)$$

とする. z_j は E 上代数的でないから, c_i を必要なら並べ替えて z_j は $L = E(c_1, \ldots, c_{r-1})$ 上代数的でないとしてよい. 定数 d によって $z_j \in L(c_r, d)$ であるから, $L(c_r, d)/L$ のある付値 ν で $\nu(z_j) < 0$ なるものが存在する. ν に付随する付値環は微分に関して閉じている. $\nu(t) = 1$ なる $t \in R$ をとる. もし $\nu(Dt) > 0$ ならば $\nu(z_j) \geq 0$ となる. なぜなら $y_j = t^k u$ $(\nu(u) = 0)$ とすれば $\nu(z_j) \geq \min\{\nu(Dt/t), \nu(Du/u)\} \geq 0$ であるから. しかし, 結果は仮定に反する. よって $\nu(Dt) = 0$ を得る. この場合 $\nu(Du) = \nu(u) - 1$ $(u \in R, \nu(u) \neq 0)$ である. すると $\nu(y_i) < 0$ ならば y_i は線形斉次微分方程式をみたしえない. 故に $\nu(y_i) \geq 0$ を得る. とくに $\nu(z_j) < 0$ より $\nu(y_j) > 0$ となる. また $N \leq \nu(y_1)$ とすると $\nu(D^k y_1) = \nu(y_1) - k$

であるから y_1 は K 上 N 階線形斉次微分方程式を満足することはない．よって $N > \nu(y_1)$ を得る．ところで $y_1 = y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$ であるから

$$N > \nu(y_1) = m_2\nu(y_2) + \cdots + m_n\nu(y_n) \geq m_j\nu(y_j) \geq m_j$$

かくして $N > \min\{m_2, \ldots, m_n\}$ を得, 矛盾となる．

2 Fuchs 拡大

この節では, 動く特異点をもたない 1 階代数的微分方程式あるいはその同値な概念である, 任意定数に有理的に依存する微分拡大の概念を一般化し, Fuchs 拡大の定義を与える．

微分拡大 R/K とその素因子からなる集合 Π の組 $(R/K, \Pi)$ はつぎをみたすとき，Fuchs 拡大 (形容詞は Fuchsian) といわれる．ここで，素因子は K 上自明な， rank 1 の離散付値の同値類である．すなわち，
1) 各 $P \in \Pi$ に対してその付値環 O_P は $K \subset O_P$, $DO_P \subset O_P$ をみたす．
2) もし $u \in R$ が K 上超越的ならば，ある $P \in \Pi$ で u は極をもつ．

R/K は，もし任意定数に有理的に依存するならば，ある微分拡大 E/K で，R, E は K 上代数的に無関連で，$ER = EC_{ER}$ が成立する．C_{ER}/C_E の超越基底を $c_1, \ldots, c_n$ とする．L を $E(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ の代数閉体とすれば，LR/L は 1 変数微分代数関数体で，ある定数 d によって $LR = L(c, d)$, $c = c_i$ と表示される．LR/L の付値環 O が微分に関して閉じていることを示そう．O に対応する付値を ν とする．もし $e = \nu(c) \neq 0$ ならば，素元 t を $c = t^e$ ととれる．このとき $t' = 0$ となり，主張が成り立つ．$\nu(c) = 0$ の場合，ある $a \in L$ で $c = a + t^e$ となるものがある．e は自然数である．すると $et^{e-1}t' = -a'$ を得，O が微分に関して閉じていることが分かる．$R \cap O$ は R の付値環になる．このようにして得られた素因子全体 Π によって R/K は Fuchsian となる．実際，$y \in R$ を K 上超越的元としよう．ある i で上述の L は y を含まない．よって，$\nu_P(y) < 0$ なる LR/L の素因子 P が存在する．P の R への制限は Π の要素である．

たとえば，K 上いくつかの線形常微分方程式をみたす解によって生成される K の微分拡大は任意定数に有理的に依存するから，それは Fuchs 拡大となる．

つぎの命題はこの論説における基本的な手段を提供する．

補題 $(R/K, \Pi)$ は Fuchsian とする．もし，$S \subset R$ が K 上 1 変数代数関数体ならば，S/K の素因子 P は R/K の素因子に延長される．

証明　実際，$u \in S$ で P のみを極とするものが存在する（たとえば，Rieman-Roch の定理を用いる）．Π の元で u の極が存在するが，その S への制限は P と一致しなければならない．

R が $\mathbf{C}$ 上いくつかの有理型関数から生成される微分拡大で，定数以外の整関数を持たないとすると，$R/\mathbf{C}$ は自然に Fuchsian となる．考える付値として各点での位数を採用する．この場合 $P \in \Pi$ の付値環 O_P は $O_P = R \cap \mathbf{C}[[t-c]]$, $c \in \mathbf{C}$ をみたす．t は複素変数である．たとえば，$R/\mathbf{C}$ を楕円関数体とすれば，この素因子集合 Π によって Fuchsian になる．なぜなら，極をもたない楕円関数は定数のほかにないからである．

3　Algebraic differential equations

この節では $(R/K, \Pi)$ は Fuchs 拡大とする．R の元がみたす代数的微分方程式は特殊な形式をもつ．つぎは Eremenko [1] の類似である．

定理　$z, w \in R$ を K 上超越的元とし，$w \in K\{z\}$ と仮定する．既約多項式 $F \in K[Z, W]$ で，$F(z, w) = 0$ を満足するならば F の W に関する $n = \deg_W F$ 次の係数 $F_0 \in K[Z]$ は K の元である．

証明　逆に，K 上 1 変数代数関数体 $K(z, w)$ の素因子 P を $\nu_P(F_0(z)) > 0$, $\nu_P(w) < 0$ なるものとする．$P \in \Pi$ と見なすことができるが，R/K は Fuchsian であるから，$\nu_P(z) \geq 0$ に注意して，$\nu_P(w) \geq 0$ となる．これは矛盾．

つぎは Hille [3, p.438] において言明されている．$(r = 2)$ の場合が Wallenberg [13] で考察されている．

定理　$(R/K, \Pi)$ を Fuchsian とする．　K 上超越的な $y \in R$ が既約多項式 $F \in K[Y, Y_r] \in K\{Y\}$ を 0 にするならば F はつぎの形になる．

$$F = Y_r^n + \sum_{i=1}^{n} F_i Y^{n-i},\ F_i \in K[Y],\ \deg F_i \leq i(r+1)$$

証明　$F = \sum_{i=0}^{n} F_i Y_r^{n-i}$, $F_i \in K[Y]$ とする．まず $F_0 \in K$ である．以下 $F_0 = 1$ とする．いま，$y = 1/z$ とすれば，$y^{(k)} = z_k / z^{k+1}$ を得る．ここで

$$z_0 = 1, \quad z_k = z z'_{k-1} - k z_{k-1} z' \in K\{z\}$$

よって

$$z_r^n + z^{r+1} F_1(z^{-1}) z_r^{n-1} + \cdots + z^{n(r+1)} F_r(z^{-1}) = 0$$

もしある i で $\deg F_i > i(r+1)$ ならば，$K(z, z_r)/K$ のある素因子 P で $\nu_P(z) > 0, \nu_P(z_r) < 0$ をみたすものがある．しかし，任意の k に対して $\nu_P(z_k) \geq 0$ である．よって任意の i に対して $\deg F_i \leq i(n+1)$ を得る．

例 Hille の例 [3, p.424] を紹介する．$y' \neq 0$ を $\mathbf{C}$ 上の方程式

$$(y')^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

の解とする．これは $\mathbf{C}$ 上超越的である．よく知られているように $R = \mathbf{C}(y, y')$ は $\mathbf{C}$ 上強正規拡大であり，したがって Fuchsian となる．ただし，素因子の集合 Π は R/K のすべての素因子からなるとする．各 $P \in \Pi$ に対して，$\nu_P(t'_P) = 0$ である．いま，$w \in R \setminus \mathbf{C}$ を任意にとる．w, w' は $\mathbf{C}$ 上代数的に従属するから，上記の命題が適用でき，w は $\mathbf{C}$ 上既約な微分多項式の零点

$$(w')^n + F_1(w)(w')^{n-1} + \cdots + F_n(w) = 0$$

である．ここで，n は主因子 (w) の負因子 $\sum e_i P_i$ の次数 $\sum e_i$ に等しい．さらに，$F_{n-1}(w) = 0$ が成立する．実際，まず, 各 P_i は $\mathbf{C}(w, w')$ 上不分岐である．なぜならば P_i の $\mathbf{C}(w, w')$ への制限を Q_i とし、P_i, Q_i それぞれの付値を ν, μ, 素元を t, u $(u = t^e)$ とすれば

$$\mu(u'/u) = e^{-1}\nu(t'/t) = -e^{-1}$$

を得る．e は分岐指数である．左辺は整数であるから $e = 1$ を得る．w は Q_i において e_i 位の極をもつ．Q の $\mathbf{C}(w)$ 上の分岐指数は e_i に等しく，$[\mathbf{C}(w, w') : \mathbf{C}(w)] = \sum e_i$ となる．また，[9] でもちいた D^1 を $\dfrac{dw}{w'} \in \Omega_{R/\mathbf{C}(w)}$ に作用させれば，0 になるから，$\dfrac{dw}{w'} = c\dfrac{dy}{y'}$ を得，左辺も正則であることがわかる．$N/\mathbf{C}(w)$ を正規拡大で，$N \supset R$ とする．$\dfrac{dw}{w'}$ は $\Omega_{N/\mathbf{C}(w)}$ の正則微分である．各自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}\ (N/\mathbf{C}(w))$ は $\Omega_{N/\mathbf{C}}$ 内の加法同型を引き起こす．それらは正則微分を正則微分に移す．よって，$\sum \sigma \dfrac{dw}{w'}$ $(\sigma \in \mathrm{Aut}\ (N/\mathbf{C}(w)))$ は $\mathbf{C}(w)/\mathbf{C}$ の正則微分である．しかし，これは自明なものでしかない．ところで，$\sum \sigma \dfrac{dw}{w'} = \sum \sigma(1/w')dw = \mathrm{Trace}\ (1/w')dw$ であるから，$\mathrm{Trace}\ (1/w') = 0$，すなわち後半の主張が導かれた．

例 Hille の例 [3, p.435] を紹介する．y は上の例と同様とする．$w \in \mathbf{C}(y, y')$ の位数を m とすると, w は

$$F(w, w^{(r)}) = (w^{(r)})^n + F_1(w)(w^{(r)})^{n-1} + \cdots + F_n(w) = 0$$

をみたす．ここで $n \leq m$ であり, $F \in \mathbf{C}[Y, Y_r]$ は既約とする．実際 $m = [\mathbf{C}(y, y') : \mathbf{C}(w)]$ に注意すれば $n = [\mathbf{C}(w, w^{(r)}) : \mathbf{C}(w)] \leq m$ となる．

4 Hille set

A を1を含む微分環とする．重さ $w : A\{Y\} \to \mathbf{Z}$ を $w(Y_i) = i+1$ によって定義する．$I = (i_0, i_1, \ldots, i_k)$ を多重指標とし，単項式を $a_I Y^I, a_I \in A$ であらわす．ここで，$Y^I = Y^{i_0} Y_1^{i_1} \cdots Y_k^{i_k}$ である．$F \in A\{Y\}$ はつぎをみたすとき，A 上 Hille 多項式という．$F = \sum_I F_I$ を単項式分解とするとき，ある J で，F_J の係数は1で，他の $I \neq J$ に対して

$$\deg F_J \geq \deg F_I, \quad w(F_J) > w(F_I)$$

をみたすものが存在する．$F_J = Y^J$ を F の head といおう．たとえば，通常の monic 多項式，線形微分多項式は Hille 多項式である．

以下 $(R/K, \Pi)$ を Fuchs 拡大とする．$\Pi_0 = \{P \in |pi \mid \nu_P(t'_P) = 0\}$, $\Pi_+ = \{P \in |pi \mid \nu_P(t'_P) > 0\}$ とする．$\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_+$, $\Pi_0 \cap \Pi_+ = \phi$ である．つぎで定義される $\mathcal{H}$ を R の Hille set という．

$$\mathcal{H} = \bigcap_{P \in \Pi_0} O_P = \{y \in R \mid \forall P \in \Pi_0 : \nu_P(y) \geq 0\}$$

$y \in \mathcal{H}$ であるとは, もし $P \in \Pi$ が $\nu_P(y) < 0$ をみたすならば $P \in \Pi_+$ であることを意味する．

定理 $\mathcal{H}$ は K を含む微分環で，R の中で整閉である．R の元で $\mathcal{H}$ 上 Hille 多項式をゼロにするものは $\mathcal{H}$ に属する．

証明 前半は定義から直ちに得られる．$y \in R$ を $\mathcal{H}$ 上 Hille 多項式 $F \in \mathcal{H}\{Y\}$ の零点とする．$P \in \Pi_0$ で $\nu_P(y) < 0$ なるものがあったとしよう．このとき，$F = \sum_I F_I$ を単項式分解とすると，

$$\nu_P(F_I(y)) = \nu_P(\mathrm{coef}\ F_I) + (\nu_P(y) + 1)\deg F_I - w(F_I)$$

が成り立つ．coef F_I は F_I の係数である．F_J を F の head としよう．任意の $I \neq J$ に対して $\nu_P(\mathrm{coef}\ F_I) \geq 0$ であると仮定する．すると，

$$\nu_P(F_J(y)) = (\nu_P(y) + 1)\deg F_J - w(F_J) < (\nu_P(y) + 1)\deg F_I - w(F_I) = \nu_P(F_I(y))$$

したがって $F(y) \neq 0$ となり，矛盾を得る．よって，ある I で $\nu_P(\mathrm{coef}\ F_I) < 0$ である．仮定より $\nu_P(t'_P) > 0$ を得る．これも矛盾．よって $y \in \mathcal{H}$ である．

この結果，R の元で K 上線形微分方程式をみたすもの全体は，$\mathcal{H}$ に含まれる．とくに，R の定数体 $C_R \subset \mathcal{H}$ である．以降，$\mathcal{H}$ を R の Hille set ということにする．

Harris-Sibuya [2] はつぎのおもしろい定理を発見した：K 上線形常微分方程式の解 $y \neq 0$ で，その逆数 $1/y$ も K 上線形常微分方程式をみたすならば，対数微分 y'/y は K 上代数的である．この定理は Singer [12] にあるように Picard-Vessiot 理論をもちいても証明される．また, 既述した Sperber の定理から直接得ることも出来る. 定理は Fuchs 拡大のことばによってつぎのように解釈される.

命題　$y \in R$ および $P \in \Pi$ が $\nu_P(y'/y) < 0$ をみたすとする. このとき

$$\nu_P(y'/y) = -1,\ \nu_P(t'_P) = 0,\ \nu_P(y/y - nt'_P/t_P) \geq 0\ (n = \nu_P(y))$$

が成り立つ.

証明　$n = \nu_P(y)$ とおく. すると $y = t_P^n u, \nu_P(u) = 0$ をみたす $u \in R$ が存在する．対数微分をとれば

$$y'/y = nt'_P/t_P + u'/u$$

$\nu_P(u'/u) = \nu_P(u') \geq 0$ であるから，$\nu_P(t'_P) = 0$ である. そして $\nu_P(y'/y) = -1$ である.

命題　$y, y^{-1} \in \mathcal{H}$ ならば y'/y は K 上代数的である.

証明　$\nu_P(y'/y) < 0$ となる $P \in \Pi$ が存在すると仮定する．よって $\nu_P(y) \neq 0$ かつ $\nu_P(t'_P) = 0$ である．これは $y, y^{-1} \in \mathcal{H}$ に反する．よって，任意の $P \in \Pi$ に対して $\nu_P(y'/y) \geq 0$ である．これは y'/y が K 上代数的であることを意味する.

$Y^n + F \in K\{Y\}$ は $\deg F < n$ なるとき K 上 monic であるといわれる.

命題　$y \in \mathcal{H}$ が K 上 monic 微分方程式をみたすならば，それは K 上代数的である.

証明　$P \in \Pi$ で $\nu_P(y) < 0$ なるものが存在するとする．このとき $\nu_P(t'_P) > 0$ で，$\nu_P(y^{(i)}) \geq \nu_P(y)$ である．仮定によりある monic 多項式 $Y^n + F \in K\{Y\}$ は y を零点にもつから

$$n\nu_P(y) = \nu_P(y^n) = \nu_P(F(y)) \geq (n-1)\nu_P(y)$$

を得るが，これは成り立たない．よって $\nu_P(y) < 0$ をみたす $P \in \Pi$ は存在しない．これは y が K 上代数的であることを意味する.

とくに K 上線形微分方程式をみたす元は，さらにもし K 上 monic 微分方程式の零点でもあれば，K 上代数的である．線形微分方程式をみたす元によって生成される微分拡大は Fuchsian であるから，この命題はつぎの命題 (Oleinikov の定理 cf. [6]) からも得られる.

命題　$(R/K, \Pi)$ は Fuchsian であるとする．このとき，任意の K 上超越的な $y \in \mathcal{H}$ に対してある $z \neq 0$ が存在し，任意の $0 \neq F \in K\{Y\}$ に対して，$F(y) = 0$ ならば，$H(z) = 0$ が成立する．ここで H は F の最高次の斉次成分である.

証明　$P \in \Pi$ を $\nu_P(y) < 0$ なるものとする．仮定より $\nu_P(t'_P) > 0$ である．したがって，P の剰余体 k_P は微分体であり，射影 $p : O_P \to k_P$ は微分準同型である．さて $y^{(i)}y^{-1} \in O_P$ $(0 < i)$ であることを示そう．$i = 1$ のとき $y = t_P^{-n}u, n > 0, \nu_P(u) = 0$ とおけば，$y'y^{-1} = -nt'_Pt_P^{-1} + u'u^{-1} \in O_P$ である．$y^{(i)}y^{-1} \in O_P$ を仮定すれば $y^{(i+1)}y^{-1} = (y^{(i)}y^{-1})' + y'y^{(i)}y^{-2} \in O_P$ となる．さて $z_i = p(y^{(i)}y^{-1}) \in k_P$ と置こう．このとき，$z_{i+1} = z'_i + z_1 z_i$ が成立する．$F(y) = 0$ より

$$w = y^{-\deg F}H(y) = y^{-\deg F}(H - F)(y)$$

とおけば，$\nu_P(w) > 0$ である．$Z_i = Y_iY^{-1}$ とおき，$G = Y^{-\deg F}H \in K[Z_1, Z_2, \ldots, Z_r]$，$r = \mathrm{ord}\ F$ とすれば，

$$p(w) = G(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0$$

となる．元 $z \neq 0$ を $z' = z_1 z$ とすれば，$z^{(i)} = zz_i$ を得るから，$H(z) = 0$ となる．

命題　K 上超越的な $y \in \mathcal{H}$ が既約多項式 $F \in K[Y, Y_r]$ を 0 にするならば，F は $F_0Y_r^n$ $(n = \deg F$, $F_0 \in K)$ を head とする K 上 Hille 多項式である．

証明　$F = \sum_{i=0}^{n} F_iY_r^{n-i}$ とし，任意の i に対して $\deg F_i \leq i$ であることを示す．これを否定して，$\exists k : \delta_k = \deg F_k > k$ と仮定する．まず $F_0 \in K$ であることは既に知っている．Newton diagram をみれば y^{-1} に関する Puiseux 級数 z で，$F(y, z) = 0$ をみたし，y^α の項からはじまるものが存在する．ただし α はある j で $n\alpha = (n - j)\alpha + \delta_j$ をみたす．したがって，$\nu_P(y^{(r)}) = \alpha\nu_P(y) < \nu_P(y) < 0$ となる $K(y, y^{(r)})/K$ の素因子 P が存在する．$P \in \Pi$ とみなすことができ，$y \in \mathcal{H}$ であるから $\nu_P(t'_P) > 0$ となる．これから $\nu_P(y^{(r)}) \geq \nu_P(y)$ が出て，矛盾．

例 (Hille [4])　y を $y'/y \in K$ なる K 上超越元とする．Laurent 多項式の元 $z \in K[y, y^{-1}]$ は上記命題の方程式で $r = 1$ としたものを満足する．実際，$R = K(y)$ とすれば，これは K 上 Fuchsian になる．そして $K[y, y^{-1}] \subset \mathcal{H}$ であるから．

5　Specific relations

K は代数閉体, $(R/K, \Pi)$ は Fuchsian であるとする．

命題　$a, b(\neq 0) \in K$ および $c_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$ は有理数体上線形独立であるとする．$u \in R$, $0 \neq v_i \in R$ $(1 \leq i \leq n)$ が

$$a + bu' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{v'_i}{v_i} = 0$$

をみたすならば, $u', v_i'/v_i$ はすべて K 上代数的である.

証明　ある j で v_j'/v_j が K 上超越的であると仮定しよう. ある $P \in \Pi$ で $\nu_P(v_j'/v_j) = -1, \nu_P(t_P') = 0$ である. $m_i = \nu_P(v_i)$ とすると, $\nu_P(v_i'/v_i - m_i t_P'/t_P) \geq 0$ であるから

$$\nu_P\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{v_i'}{v_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i c_i \frac{t_P'}{t_P}\right) \geq 0$$

となるから $\nu_P(u') = -1$ を得る. しかしこれは成り立たない. よって v_i'/v_i はすべて, したがって u' は K 上代数的である.

命題　$y \in R \setminus C_K, \lambda \in R$ で

$$(y')^2 = \lambda^2 F(y)$$

が成立するならば, λ は K 上代数的である. ただし, $F \in C_K[Y]$, $\deg_Y F = 3$ は重根をもたない.

証明　λ は K 上超越的とし, $P \in \Pi$ を $\nu_P(\lambda) < 0$ なるものとする. もし $m = \nu_P(y) < 0$ ならば

$$2\nu_P(\lambda) = 2\nu_P(y') - \nu_P(F(y)) \geq 2(m-1) - 3m = -m - 2 \geq -1$$

を得る. これは成り立たない. よって $m \geq 0$ である. $\nu_P(y') \geq 0$ であるから $\nu_P(F(y)) > 0$ でなければならない. F のある零 $\alpha \in C_K$ で $n = \nu_P(y - \alpha) > 0$ となる. すると

$$2\nu_P(\lambda) = 2\nu_P(y') - \nu_P(F(y)) \geq 2(n-1) - n = n - 2 \geq -1$$

これも不成立.

6　Painlevé I

K を標数 0 の微分体, $x \in K, x' = 1$ とする. Painlevé I

$$y'' = 6y^2 + x$$

は K 上代数的解をもたないと仮定する. このとき解 y によって生成される微分拡大 $K(y, y')$ が Fuchsian であることを示そう. この拡大が K 上任意定数に有理的に依存しないということは既知である.

[6] によれば既約多項式 $p \in K[y, y']$ は Dp をわりきることはない. よって p によって定義される $K(y, y')$ の付値環は微分に関して閉じている. また, もし $f \in K(y, y')$ が任意の p による付値環に属すならば $f \in K[y, y']$ である.「無限遠点」に対応する付値は以下で定義される.

さて, y を

$$y = t^{-2},\ t' = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\ (a_0 = 1)$$

のように t に関するべき級数に展開する．

$$y' = -2t^{-3}t'$$

であるから

$$y'' = 6t^{-4}t'^2 - 2t^{-3}t''$$

よって，t に関する微分方程式

$$t'' = 3t^{-1}t'^2 - 3t^{-1} - \frac{1}{2}xt^3$$

を得る．

$$\begin{aligned} t'' &= (a_0' + a_1't + a_2't^2 + a_3't^3 + a_4't^4 + \cdots) \\ &\quad +(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \cdots)(a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \cdots) \\ &= (a_0' + a_0a_1) + (a_1' + 2a_0a_2 + a_1^2)t + (a_2' + 3a_0a_3 + 3a_1a_2)t^2 + (a_3' + 4a_0a_4 + 4a_1a_3 + 2a_2^2)t^3 + \cdots \end{aligned}$$

であるから，係数比較によって，

$$1:\ a_0' + a_0a_1 = 3\cdot 2a_0a_1$$

$$t:\ a_1' + 2a_0a_2 + a_1^2 = 3(2a_0a_2 + a_1^2)$$

$$t^2:\ a_2' + 3a_0a_3 + 3a_1a_2 = 3(2a_0a_3 + 2a_1a_2)$$

$$t^3:\ a_3' + 4a_0a_4 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 = 3(2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2) - \frac{1}{2}x$$

$$t^4:\ a_4' + 5a_0a_5 + 5a_1a_4 + 5a_2a_3 = 3(2a_0a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3)$$

$$t^5:\ a_5' + 6a_0a_6 + 6a_1a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 = 3(2a_0a_6 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2)$$

$$t^6:\ a_6' + 7a_0a_7 + 7a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 = 3(2a_0a_7 + 2a_1a_6 + 7a_2a_5 + 7a_3a_4)$$

よって

$$a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{4}x,\ a_5 = \frac{1}{4}$$

を得る．a_6 は任意である．すなわち微分不定元として扱うことができる．以降 a_i $(i \geq 7)$ は a_6 の微分多項式として表され，その階数は $i-6$ である．以降，$a_6, a_7, \ldots$ は K 上代数的独立な元として扱う．

定理 K 上代数的元はどれも Painlevé I を満足しないとする．y を Painlevé I の任意の解とする．上記で定義したベキ級数体 $K\langle a_6\rangle((t))$ から定義される素因子および $K[y, y']$ の既約多項式から定義される素因子からなる集合を Σ とする．このとき $(K(y, y')/K, \Sigma)$ は Fuchsian である．

証明　$f \in K[y, y']$ は正則である, すなわち ν を t に関する位数として, $\nu(f) \geq 0$ と仮定するとき，$f \in K$ であることを示したい.

$y_1 = y'$ として f を多項式環 $K[y, y_1]]$ の要素として扱う. $K[y, y_1]$ の weight function を [6] にしたがって

$$w(y) = 2, \quad w(y_1) = 3, \quad w(a) = 0 \ (a \in K^{\times})$$

によって定義する. たとえば $w(y_1^2 - 4y^3) = 6$ となる. 微分 D は K 上では K のものと同じとし,

$$Dy = y_1, \quad Dy_1 = 6y^2 + x$$

とする. $D(y_1^2 - 4y^3) = 2xy_1$ である. また ν を考えるときは y にベキ級数を代入したものについて考えるものとする. すると $\nu(y_1^2 - 4y^3) = -2$ となる.

まず，$w(f) = 6m$ が 6 の倍数である場合を考察する. すなわち

$$f = \sum_{j=0}^{6m} f_{6m-j}, \quad f_{6m} = \sum_{0 \leq j \leq m} c_j y^{3j} y_1^{n-2j}$$

とする. y, y_1 の t に関する展開は

$$y = t^{-2}, \quad y_1 = (-2)t^{-3}(1 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \cdots)$$

である. また $\nu(y_1^2 - 4y^3) = -2$ である.

$$t^{6m} f_{6m} = \sum_{0 \leq j \leq m} c_j (-2)^{2m-2j} (1 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \cdots)^{2m-2j}$$

(*)　　　$f_{6m} = (y_1^2 - 4y^3)^m$ が成立する. ゆえに $\nu(f_{6m}) = -2m$

実際 $\nu(f) \geq 0$ であるから t^{-6m} の係数は 0 である.

$$\sum_{0 \leq j \leq m} c_j (-2)^{2m-2j} = 0$$

$\xi(u) = \sum_{0 \leq j \leq m} c_j u^{2m-2j}$ とおくと，$\xi(-2) = 0$ である. $m = 1$ なら $\xi(u) = u^2 - 4$ より $f_6 = y_1^2 - 4y^3$ となる. つぎに $m > 1$ とする. f の展開で，$a_6^k a_{6m-6k-1} t^{-1}$ $(0 \leq k \leq m-1)$ が現れるのは f_{6m} においてであり，その係数は 0 でなければならないから,

$$\sum_{0 \leq j \leq m} c_j (-2)^{2m-2j} (2m - 2j) \binom{2m - 2j - 1}{k} = 0$$

したがって

$$\sum_{0 \leq j \leq m} c_j (-2)^{2m-2j} (2m - 2j)(2m - 2j - 1) \cdots (2m - 2j - k) = 0$$

これより

$$\xi^{(k)}(-2) = 0 \quad (0 \leq k \leq m-1)$$

を得，$\xi(u) = (u^2-4)^m$,

$$f_{6m} = \sum_{0\leq j\leq m} \binom{m}{j} (-4)^j y^{3j} y_1^{2m-2j} = (y_1^2 - 4y^3)^m$$

を得る．

以上から $\nu(f) \geq 0$ で，$w(f) = 6m$ ならば $w(Df) \leq 6m$ を得る．

ある整数 m で $w(f) < 6m$ ならば $w(Df) \leq 6m$ である． したがって，$\nu(f) \geq 0$ のとき，任意の $k \geq 0$ に対して $w(D^k f) \leq 6m$ が成り立つ．故に f は K 上線形微分方程式をみたす．これは y に関する [6] の結果に反する．

References

[1] A.E. Eremenko : *Meromorphic solutions of algebraic differential equations*, Uspekhi Mat. Nauk 37(1982), 53-42

[2] W. A. Harris, Jr., and Y. Sibuya : *The reciprocals of solutions of linear ordinarydifferential equations*, Adv. in Math. 58(), 119-132

[3] E. Hille : Ordinary differential equations in the complex domain, John Wiley & Sons, 1976 p.424

[4] _____ : *Remarks on Briot-Bouquet differential equation, I*, Commet. Math. Univ. Carolinae 21(1978), 119-132

[5] K. Nishioka : , *A class of transcendetal functions containing elementary and elliptic ones*, Osaka J. Math. 22(1983), 743-753

[6] _____ : *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. J., 109(1989), 63-67

[7] _____ : *Painlevé-Umemura Extensions*, Funkcialaj Ekvacioj, 37 (1994), 59-64

[8] _____ : *Linear ordinary differential equations and Fermat equations*, Keio SFC Journal, 7(2007), 126-129

[9] M. Rosenlicht : *On the explicit solvability of certain transcendental equations*, Inst. Haute Etudes Sci. Publ. Math., 36 (1969), 15-22

[10] _____ : *The nonminimality of the differential closure*, Pacific J. Math., 52 (1974), 529-537

[11] M. F. Singer : *Algebraic relations among solutions of linear differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society 295 (1986), 753-763

[12] G. Wallenberg : *Ueber eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Journal für reine und angewandte Mathematik, 120 (1900), 113-131

Fuchs Extensions

発　行　日　2013年2月5日
著　　　者　西岡啓二
発　行　所　慶應義塾大学 湘南藤沢学会
印　刷　所　株式会社 ワキプリントピア

ISBN 978-4-87762-262-6
SFC-RM2012-003