Title	微分代数における変分方程式
Sub Title	
Author	西岡, 啓二(Nishioka, Keiji)
Publisher	慶應義塾大学湘南藤沢学会
Publication year	2012
Jtitle	リサーチメモ
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	
Genre	Technical Report
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=0302-0000-0651

ISBN 978-4-87762-252-7
SFC-RM 2011-005

微分代数における変分方程式

西岡啓二

慶應義塾大学 環境情報学部

微分代数における変分方程式

西　岡　啓　二
慶應義塾大学　環境情報学部

微分代数における変分方程式

西岡啓二
慶應義塾大学　環境情報学部

1 Introduction

$f(t,y)$ を $t=t_0, y=y_0$ において解析的な関数とすると、初期値問題

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y) \quad y(t_0)=y_0$$

の解 $y(t,t_0,y_0)$ は t_0,y_0 に関して解析的である。初期値を δy_0 だけ変動させれば、解の変分 δy に関する微分方程式

$$\frac{d\delta y}{dt}=\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\delta y$$

を得る。これは δy の線形微分方程式であり、変分方程式とよばれている。

変分方程式を微分体の言葉に翻訳しよう。K は以下、常微分 D をもつ標数 0 の微分体とする。微分不定元 Y の K 上微分多項式全体からなる K-微分代数を

$$K\{Y\}=K[Y,Y_1,\ldots], \quad Y_i=D^iY$$

で表す。K 上代数的に既約な n 階代数的微分多項式 $F\in K\{Y\}$ が与えられたとする。方程式 $F(y)=0$ の K 上一般解 y とは、ある微分拡大 R/K に属す $F(y)=0$ をみたす要素で、trans.deg $K\langle y\rangle=n$ なるものである。ただし $K\langle y\rangle$ は y によって生成された K 上微分拡大である。y の変分方程式とは $K\langle y\rangle$ 上定義された z に関する線形斉次方程式

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n}(y)D^nz+\frac{\partial F}{\partial Y_{n-1}}(y)D^{n-1}z+\cdots+\frac{\partial F}{\partial Y}(y)z=0$$

をいう。ϵ を $D\epsilon=0$ みたす不定元とすれば、変分方程式は $F(y+\epsilon z)-F(y)$ の ϵ に関する展開における ϵ 項の係数である。

R/K の derivation とは、R からそれ自身への K 上線形変換 X であって、Leibniz's rule

$$X(ab)=X(a)b+aXb \quad (a,b\in R)$$

をみたすものである。derivations 全体からなる R-加群を Der (R/K) とかく。これには n 次元 Lie 環の構造がはいる。もし R/K を超越次数 n の微分拡大ならば、これは n 次元 Lie 環となる。すなわち Lie 環の積は

$$[X,Y](a)=X\circ Y(a)-Y\circ X(a) \quad (a\in L)$$

によって定義される。Der (R/K) の双対加群を $\Omega(R/K)$ と表す。外微分 $d: R \to \Omega(R/K)$ が

$$da(X) = X(a) \quad (a \in L, X \in \mathrm{Der}\ (R/K))$$

によって定義される。$\Omega(R/K)$ は dR によって生成される。d は外微分代数 $\mathcal{A}(R/K) = \oplus_{0 \leq i \leq n} \wedge^i \Omega(R/K)$ に拡張される。すなわち、d は加群準同型で、$\omega \in \wedge^i\Omega(R/K)$, $\theta \in \wedge^j\Omega(R/K)$ とするとき

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^i \omega \wedge d\theta, \quad d \circ d(\omega) = 0$$

をみたす。

R/K を有限の超越次数をもつ微分拡大とする。D をその微分とすると各 $X \in \mathrm{Der}(R/K)$ に対して $[D, X] = D \circ X - X \circ D$ は $\mathrm{Der}(R/K)$ の元となる。このことから、D から $\mathrm{Der}(R/K)$ の Lie 環準同型 $\mathcal{L}_D$ が $\mathcal{L}_D X = [D, X]$ $(X \in \mathrm{Der}(R/K))$ によって定義される。$a \in R$ に対して $\mathcal{L}_D a = Da$ とする。$\Omega(R/K)$ においては $\mathcal{L}_D(\omega)(X) = D \circ \omega(X) - \omega\mathcal{L}_D X$ とする。一般に p-form ω に対して

$$\mathcal{L}_D\omega(X_1, \ldots, X_p) = D \circ \omega(X_1, \ldots, X_p) + \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, \mathcal{L}_D X_i, X_{i+1}, \ldots, X_p)$$

とする。forms ω, θ に対して

$$\mathcal{L}_D(d\omega) = d\mathcal{L}_D\omega, \quad \mathcal{L}_D(\omega \wedge \theta) = \mathcal{L}_D(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathcal{L}_D(\theta)$$

が成立する。$\mathcal{L}_D$ は autonomous system の場合通常の Lie 微分になる。Lie 微分と同様の関係式が成立する。(cf. [3])

いま y を K 上代数的微分方程式 $F(y) = 0$ の一般解としよう。この式に $d: K\langle y\rangle \to \Omega(K\langle y\rangle/K)$ を作用させれば

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n}(y)dD^n y + \frac{\partial F}{\partial Y_{n-1}}(y)dD^{n-1}y + \cdots + \frac{\partial F}{\partial Y}(y)dy = 0$$

したがって dy に関する方程式

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n}(y)(\mathcal{L}_D)^n dy + \frac{\partial F}{\partial Y_{n-1}}(y)(\mathcal{L}_D)^{n-1}dy + \cdots + \frac{\partial F}{\partial Y}(y)dy = 0$$

を得る。$K\langle y\rangle$ 上の線形微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial Y_n}(y)D^n z + \frac{\partial F}{\partial Y_{n-1}}(y)D^{n-1}dy + \cdots + \frac{\partial F}{\partial Y}(y)dy = 0$$

を $F=0$ の変分方程式と理解する。

R/K が一般 Liouville 拡大であるとは、つぎのような条件をみたす拡大列が存在するときにいう。

$$K \subset R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n = R$$

(1) $[R_0 : K] < \infty$ である。各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して、R_{i-1} は R_i の中で代数的に閉じている。

(2) 各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して、R_{i-1} 上超越的な $0 \neq t_i \in R_i$ が存在し $Dt_i \in R_{i-1}$ または $t_i^{-1}Dt_i \in R_{i-1}$ が成立し、$[R_i : R_{i-1}(t_i)] < \infty$ である。

このとき $n = \text{trans.deg}\ R/K$ であることに注意しよう。

この論説では $\mathcal{L}_D$ に関するいくつかの性質の説明と応用を紹介する。最後の節では Painlevé I 型方程式の変分方程式が、一般 Liouville 拡大の中に解をもたないことを証明する。

2 Invariant differentials

Chapter 10 in Whittaker [4] の内容の一部を微分代数のことばで言い換えてみる。ただし、このことによって、考える関数の範囲が縮小されることに注意せねばならない。たとえば、積分は代数的積分を考えることになる。

S/K を微分拡大とする。$\mathcal{A}(S/K)$ によって $\Omega(S/K)$ が生成する外積代数とする。中間微分体 R に対して $\mathcal{A}(R/K)$ は $\mathcal{A}(S/K)$ の部分代数になる。$\mathcal{L}_D$ は両者の内部加群準同型として作用する。

$\omega \in \mathcal{A}(S/K)$ は $\mathcal{L}_D\omega = 0$ のとき invariant、$d\omega$ が invariant であるとき、relative invariant であるという。定数も invariant であると考える。すなわち $f \in S$ で $Df = 0$ ならば $\mathcal{L}_D f = 0$ となる。

$\omega \neq 0, \in R$ で、ある元 $f \neq 0, \in S$ で $f\omega$ を invariant とするとき、f を ω の multiplier という。$g \in S$ が ω のもうひとつの multiplier ならば、f/g は定数である。実際 $f = tg$ とおけば

$$0 = \mathcal{L}_D(f\omega) = \mathcal{L}_D(tg\omega) = D(t)g\omega + t\mathcal{L}_D(g\omega) = D(t)g\omega$$

より、$Dt = 0$ を得る。

invariants の外積は invariant で、外微分も invariant である。実際 $\omega, \theta \in \Omega(S/K)$ を

invariants とすれば

$$\mathcal{L}_D(\omega \wedge \theta) = \mathcal{L}_D(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathcal{L}_D\theta = 0$$

そして

$$\mathcal{L}_D d\omega = d\mathcal{L}_D\omega = 0$$

たとえば Df が K 上代数的な $f \in S$ に対して df は invariant である。逆に、$u \in S$ が relative invariant であるとする。このとき $dDu = \mathcal{L}_D du = 0$ より、Du は K 上代数的である。

命題 1 S/K はつぎのような超越基底 $q_1, \dots, q_n, p_1 \dots, p_n$ をもつとき Hamilton 拡大という。

$$Dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad Dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1 \le i \le n)$$

ここで $H \in S$ である。このとき、

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

は relative invariant である。$d\omega$ したがってその外積 $dp_1 \wedge \cdots dp_n \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_n$ は invariant である。

証明 実際

$$\mathcal{L}_D \circ d\omega = \mathcal{L}_D \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^{n} (dDp_i \wedge dq_i + dp_i \wedge dDq_i)$$

である。右辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (dDq_i \wedge dp_i + dq_i \wedge dDp_i) \\
&= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} dq_j \wedge dp_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} dp_j \wedge dp_i - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} dq_i \wedge dq_j - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} dq_i \wedge dp_j \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。

逆に S/K はつぎのような超越基底 $q_1, \dots, q_n, p_1 \dots, p_n$ をもつと仮定しよう。

$$\mathcal{L}_D \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = 0$$

$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in S$ を

$$\mathcal{L}_D dp_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} dp_j + b_{ij} dq_j), \qquad \mathcal{L}_D dq_i = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} dp_j + d_{ij} dq_j)$$

なるものとする。このとき

$$\sum_{i,j}((a_{ij}+d_{ji})dp_j \wedge dq_i + b_{ij}dq_j \wedge dq_i + c_{ij}dp_i \wedge dp_j) = 0$$

より

$$a_{ij} = -d_{ji},\ b_{ij} = b_{ji},\ c_{ij} = c_{ji}$$

を得る。この関係式が S の元 H によって実現できるかどうかはわからない。実現可能性は偏微分方程式の代数的解の存在に依存している。

Jacobi の結果を次のように解釈する。

命題 2 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ を $\Omega(R/K)$ の R 上基底とする。$\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ を $\Omega(S/K)$ の invariants で

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = a\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-1} \wedge \omega_n \neq 0 \quad (a \in S)$$

なるものとする。$f \in S$ を $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ に対する multiplier とする。すなわち

$$\mathcal{L}_D(f\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = 0$$

である。このとき、$af\omega_n \equiv 0 \bmod (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ である。

証明 実際

$$\mathcal{L}_D(af\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-1} \wedge \omega_n) = \mathcal{L}_D(f\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = 0$$

よって

$$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{n-1} \wedge \mathcal{L}_D(af\omega_n) = 0$$

を得る。

$X_1, \ldots, X_n \in \mathrm{Der}(R/K)$ を $[D, X_i] = 0$ をみたす基底、$X_1, \ldots, X_n$ の双対基底を $\omega_1, \ldots, \omega_n$ とする。このとき

$$\mathcal{L}_D(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = 0$$

が成り立つ。$\mathcal{L}_D(\omega_i)(X_j) = D \circ \omega_i(X_j) - \omega_i[D, X_j] = 0$ であるから、$\mathcal{L}_D\omega_i = 0$ を得る。

もし $x_1, \ldots, x_n$ を R/K の超越基底とし、$a \in R$ を

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

なるものとすれば、それは $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ の multiplier である。

3　変分方程式

R/K を有限超越次数 n をもつ微分拡大とする。$\Omega(R/K)$ は K 上基底 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ をもつとする。このとき

$$\mathcal{L}_D \omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \quad (1 \le i \le n)$$

が成立する。これを簡単にベクトル表記によって $\mathcal{L}_D\omega = A\omega$, $\omega = {}^t(\omega_1, , \ldots, \omega_n)$ と書き、R/K の変分方程式とよぼう。$A = (a_{ij})$ は $n \times n$ 行列である。また、R 上線形微分方程式

$$DZ = AZ, \quad Z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$$

も R/K の変分方程式とよぼう。変分方程式は基底の取り方によって変わる。他の基底 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ に対する変分方程式を $\mathcal{L}_D\theta = B\theta$、そして基底変換を $\omega = T\theta$ とすれば

$$B = T^{-1}AT - T^{-1}DT$$

を得る。実際

$$AT\theta = \mathcal{L}_D\omega = \mathcal{L}_D(T\theta) = D(T)\theta + TB\theta$$

からあきらか。

R/K の変分方程式を

$$\mathcal{L}_D\omega = A\omega$$

とする。Φ を変分方程式

$$D\Phi = A\Phi$$

の基本解とする。このとき、周知のように $D\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A$ であるから

$$\mathcal{L}_D(\Phi^{-1}\omega) = D(\Phi^{-1})\omega + \Phi^{-1}\mathcal{L}_D\omega = 0$$

したがって、$\Phi^{-1}\omega$ の各成分は invariant である。また、

$$\mathcal{L}_D(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = \mathrm{trace}\, A\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

そして $D \det \Phi^{-1} = -\mathrm{trace}\, A \det \Phi^{-1}$ であるから

$$\mathcal{L}_D(\det \Phi^{-1}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = 0$$

が成り立つ。すなわち $\det \Phi^{-1}$ は $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ の last multiplier である。

Poincaré の結果 (cf. section 5 in Yoshida [5]) を微分体のことばで述べよう。

$\eta = \sum_{i=1}^{n} u_i\omega_i \in \Omega(R/K)$ を invariants とする。このとき

$$0 = \mathcal{L}_D\eta = \sum_{i=1}^{n}\left(Du_i + \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}\right)\omega_i$$

より

$$Du_i = -\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}$$

を得る。したがって R の微分拡大の元 $v_1, \ldots, v_n$ を $Dv_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_j$ なるものとすれば $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 0$ は定数である。

つぎに $\Omega(R/K)$ はつぎの基底 $\omega_1, \ldots, \omega_n, \theta_1, \ldots, \theta_n$ をもつと仮定する。

$$\mathcal{L}_D\omega_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\omega_j + b_{ij}\theta_j), \quad \mathcal{L}_D\theta_i = \sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\omega_j + d_{ij}\theta_j) \quad (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in R)$$

$$\mathcal{L}_D\sum_{i=1}^{n}\omega_i \wedge \theta_i = 0$$

このとき

$$\sum_{i,j}((a_{ij} + d_{ji})\omega_j \wedge \theta_i + b_{ij}\theta_j \wedge \theta_i + c_{ij}\omega_i \wedge \omega_j) = 0$$

より

$$a_{ij} = -d_{ji},\ b_{ij} = b_{ji},\ c_{ij} = c_{ji}$$

となる。$\eta = \sum_{i=1}^{n}(u_i\theta_i - v_i\omega_i) \in \Omega(R/K)$ が invariant であるとする。このとき

$$0 = \sum_{i,j}(D(u_i)\theta_i - D(v_i)\omega_i + u_i c_{ij}\omega_j - u_i a_{ji}\theta_j - v_i a_{ij}\omega_j - v_i b_{ij}\theta_j)$$

より

$$Du_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}u_j + b_{ij}v_j), \quad Dv_i = \sum_{j=1}^{n}(c_{ij}u_j + d_{ij}v_j)$$

を得る。すなわち u_i, v_i は変分方程式の解である。

4　Kepler 方程式

Kepler の方程式は

$$z - a\sin z = x, \quad a \in \mathbf{C}^{\times}$$

で与えられ、数理物理ではじめて現れた超越方程式であるといわれている。解はつぎのように Fourier 展開される ([4, p91])。

$$z = x + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ka)\sin kx$$

しかし、「有限的」に表示されることはない。$y = e^{iz}$ とおけば、$\sin z = \dfrac{y - y^{-1}}{2i}$ であるから方程式は

$$y^2 + \frac{2i}{a}(x - z)y - 1 = 0$$

になる。より一般的に Liouville は方程式 $\log y = f(x, y)$ の初等関数解について考察している。ここで f は x, y に関して代数関数で、$\partial f/\partial y \neq 0$ とする。$z = f(x, y)$, $E = \mathbf{C}(x)$ とすれば、y, z はそれぞれ $E(z), E(y)$ 上代数的で、$\dfrac{Dy}{y} = Dz$ を満足するとき、y が E 上初等拡大の要素になるのはどのようなときか、ということが問題とされる。Liouville は y, z が E 上代数的になるという結果を得た。よって、Kepler の方程式は初等関数解をもたない。 これに関しては research memo 「初等超越関数について」(2006) を参照されたい。

実は Kepler 方程式の解はもっと「超越的」である。以下でそれを説明する。まず体に関するつぎの命題を示す。

補題 1　E を標数 0 の体、F/E を体拡大とする。$a_i \in E$ は $\mathbf{Q}$ 上線形独立であるとする。もし u, v_i $(1 \leq i \leq n) \in F$ が

$$du + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dv_i}{v_i} = 0, \quad d = d_{F/E}$$

を $\Omega_{F/E}$ においてみたすならば、$u, v_1, \ldots, v_n$ は E 上代数的である。

証明　$B = E(u, v_1, \ldots, v_n)$ とし、A を E と B の中間体で、trans.deg $B/A = 1$ が存在するとする。上述の d は $d_{B/A}$ と考えてよい。B/A は 1 変数代数関数体である。ある v_r が A 上超越的であるとしよう。B/A の素点 P を v_r の極とする。対数微分 dv_i/v_i の P における留数は整数であり、仮定から dv_r/v_r のそれは負の整数である。ところで補題の仮定から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{Res}_P \frac{dv_i}{v_i} = 0$$

これは $a_1,\ldots,a_n$ が $\mathbf{Q}$ 上線形独立であることに反する。よって、v_i はすべて A 上代数的、したがって u もそうである。だが、これは A の仮定に反する。結果、A の非存在が示された。すなわち $u,v_1,\ldots,v_n$ は E 上代数的である。

以下 K は標数 0 の微分体、R/K は微分拡大とする。

補題 2　R/K は 1 変数代数関数体で、ν を K 上 rank 1 の離散的加法付値とする。その素元を t とし、$\nu(Dt)\geq 0$ を仮定する。$0\neq y\in F$ が $\nu(Dy/y)<0$ をみたすならば $\nu(Dy/y)=-1$、$\nu(Dt)=0$ である。

証明　仮定により $y=ut^n$ $(n=\nu(y)\neq 0,\nu(u)=0)$ と書くことができる。よって

$$\nu(Dy/y)=\nu(Du/u+nDt/t)$$

において $\nu(Du/u)=\nu(Du)\geq 0$ および

$$\nu(Dt/t)\begin{cases}=-1 & \nu(Dt)=0\\ \geq 0 & \nu(Dt)>0\end{cases}$$

に注意すれば、主張が得られる。

微分拡大 R/K が任意定数に代数的に依存するとは、ある微分拡大 E/K で E,R は K 上自由、かつ $[ER:EC_{ER}]<\infty$ なるときにいう。$ER=EC_{ER}$ なるとき R/K は任意定数に有理的に依存するという。ここで、微分体 S にたいして C_S は S の定数体を示す。

命題 3　R/K は任意定数に代数的に依存する拡大であるとする。$a_i\in C_K$ は $\mathbf{Q}$ 上線形独立であるとする。もし、$u,v_i\neq 0$ $(1\leq i\leq n)\in R$ が

$$Du+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{Dv_i}{v_i}\in\overline{K}$$

をみたすならば、$Du, Dv_i/v_i$ は K 上代数的である。

証明　微分拡大 E/K で R,E は K 上自由、$m=[ER:EC_{ER}]<\infty$ なるものが存在する。E は代数閉体としてよい。

$$\omega=du+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{dv_i}{v_i}\in\Omega_{ER/E}$$

とおく。いま $\omega\neq 0$ としよう。このとき、C_{ER}/C_E の超越基底 w_i $(1\leq i\leq n)$ をとれば、これは ER/E の超越基底で、$\omega=\sum_{i=1}^{n}c_idw_i$, $(c_i\in ER)$ と表すことができる。すると

$$\mathcal{L}_D\omega=d\left(Du+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{Dv_i}{v_i}\right)=0,\quad \mathcal{L}_D\omega=\sum_{i=1}^{n}D(c_i)dw_i$$

であるから $Dc_i = 0$ すなわち $c_i \in C_{ER}$ を得る。これより $\omega \in \Omega_{EC_{ER}/E}$ となる。Trace $_{ER/EC_{ER}}$ をとれば

$$m\omega = dy + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dz_i}{z_i}, \quad y = \mathrm{Trace}_{ER/EC_{ER}}(u),\ z_i = \mathrm{Norm}_{ER/EC_{ER}}(v_i)$$

と書ける。$y, z_i \in EC_{ER}$ である。そして

$$Dy + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{Dz_i}{z_i} = \mathrm{Trace}_{ER/EC_{ER}} \left(Du + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{Dv_i}{v_i} \right) = 0$$

また、

$$d(mu - y) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d(v_i^m/z_i)}{v_i^m/z_i} = 0$$

および補題1より $mu - y, v_i^m/z_i \in E$ を得る。

ある Dz_r/z_r が E に属さないとしよう。$y, z_i \in EC_{ER}$ であった。j を $1, \ldots, n$ から任意にとり、L を $E(w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n)$ の $\dot{E}R$ における代数閉包とする。EC_{ER}/L は1変数代数関数体であり、任意定数に有理的に依存する (西岡 [2] では Fuchs 拡大と称している)。したがって任意の素点 P に対して $\nu_P(Dt_P) \geq 0$ が成立する。ただし ν_P は P に属する付値、t_P は ν_P の素因子である。いま、ある Dz_r/z_r が L に属さないとしよう。ある素点 P で $\nu_P(Dz_r/z_r) < 0$ となる。命題3より、$\nu_P(Dt_P) = 0$ で、$\nu_P(z_r) \neq 0$ となる。したがって、

$$\mathrm{Res}_P \left(\frac{Dz_r}{z_r} dt_P \right) = \nu_P(z_r) \neq 0$$

である。一方

$$0 = \mathrm{Res}_P \left(Dy + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{Dz_i}{z_i} \right) dt_P = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \nu_P(z_i)$$

が成立するが、これは a_i たちの $\mathbf{Q}$ 上線形独立であることに反する。結局すべての i に対して $Dz_i/z_i \in L$ を得る。したがって $Dz_i/z_i \in E$ となり、さらに $Dy \in E$ を得る。話を u, v_i に戻せば、$Du, Dv_i/v_i \in E$、したがって K 上代数的となり、命題の証明を終える。

E から出発して、任意定数に代数的に依存する微分拡大を有限回構成するとき、その最終を E の PU (Painlevé-Umemura) 拡大という。

命題4 R/K を $C_R = C_K$ なる PU 拡大とする。$y_i, z_i \in R$ $(1 \leq i \leq n)$ は

$$Dy_i = \frac{Dz_i}{z_i}, \quad z_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

を満足するとする。各 y_i が $K(z_1,\ldots,z_n)$ 上代数的で、各 z_i が $K(y_1,\ldots,y_n)$ 上代数的であるならば、y_i, z_i $(1 \le i \le n)$ は K 上代数的である。

証明　簡単のため K は代数的閉であるとする。命題3より

$$Dy_i = \frac{Dz_i}{z_i} \in K$$

を得る。$y_1,\ldots,y_m$ は K 上代数的独立、他の y_i はそれらに代数的従属であるとする。z_i は $K(y_1,\ldots,y_m)$ 上代数的であるから $\Omega_{R/K}$ において

$$\frac{dz_i}{z_i} = \sum_{j=1}^{m} c_j\, dy_j, \quad d = d_{R/K} \quad (c_j \in R)$$

が成り立つ。$\mathcal{L}_D$ を作用させれば

$$\sum_{j=1}^{m} D(c_j)\, dy_j = 0$$

そして、$c_j \in C_R = C_K \subset K$ を得る。$u = \sum_{i=1}^{m} c_j y_j$ とおけば

$$\frac{dz_i}{z_i} = du$$

補題1より $z_i \in K$ を得る。したがって各 y_i も K に属する。

さて、Kepler 方程式に制限して述べれば

定理1　$K = \mathbf{C}(x)$ とするとき、方程式

$$z - a\sin z = x, \quad a \in \mathbf{C}^{\times}$$

の解 z は K 上のどのような PU 拡大にも属さない。

証明　$y = e^{iz}$ とおけば、

$$y^2 + \frac{2i}{a}(x-z)y - 1 = 0$$

になるのであった。$Dy/y = D(iz)$ である。y, z が K の PU 拡大に属するならば、命題4により、y, z は K 上代数的となる。さらに、補題1により

$$\frac{Dy}{y} = D(iz) \in \mathbf{C}$$

よって $y, z \in \mathbf{C}$。しかしこれは成り立たない。

Kepler 方程式の解は K 上一階代数的微分方程式をみたす。したがって、それは K 上 decomposable extension の元であるが、PU 拡大に属さない。一般に、K 上 PU 拡大の元 y が K 上一階代数的微分方程式をみたすならば、$K\langle y\rangle$ は K 上任意定数に代数的に依存することがわかる。

5 Nesterenkoの問題

K を標数 0 の常微分体とする。$x \in K,\ Dx = 1$ を仮定し、C_K は代数的閉であるとする。超越数の研究で著名なロシアの数学者 Nesterenko は次の問題を考えた。$f \in K$ の n 回不定積分を f_n とするとき、$f, f_1, \ldots$ はいつ K 上代数的従属になるか？つぎはそのひとつの回答である。

定理 2 R/K を微分拡大、$C_R = C_K$ および $x \in K, Dx = 1$ を仮定する。$a \in K, a \neq 0$ とする。このとき、つぎの 1), 2) は同値である。

1) $D^n y = a$ の解 $y \in R$ で $D^i y\ (0 \leq i < n)$ が K 上代数的に従属するものがある。

2) $u, v \in K$ および自然数 n で $Dv = au,\ D^{n-1}u = (-1)^{n-1}$ をみたすものが存在する。

証明 1) を仮定する。n を最小にとり、$D^i y\ (0 \leq i < n)$ は K 上代数的に従属するが、$D^i y\ (0 < i < n)$ はそうでないとする。$\Omega(R/K)$ において、

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i dD^i y = 0 \quad (a_i \in R,\ a_0 = 1)$$

が $\Omega(R/K)$ において成立する。$\mathcal{L}_D$ を作用して

$$\sum_{i=1}^{n-1} (Da_i + a_{i-1}) dD^i y = 0$$

仮定から $Da_i + a_{i-1} = 0\ (1 \leq i \leq n-1)$ であり、$D^i a_i = (-1)^i$ を得る。$C_R = C_K$ であるから $a_i \in K$ である。そして

$$d\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i dD^i y = 0$$

より $t = \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y \in R$ は K 上代数的である。微分して

$$Dt = \sum_{i=0}^{n-1} (Da_i + a_{i-1}) D^i y + a_{n-1} a = a_{n-1} a$$

を得る。$u = a_{n-1}$ は $D^{n-1}u = (-1)^{n-1}$ をみたす。t がみたす K 上既約方程式を

$$t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m = 0$$

とする。微分して

$$(Db_1 + mau)t^{m-1} + (Db_2 + (m-1)au)t^{m-2} + \cdots + Db_m = 0$$

を得る。よって $v=-b_1/m$ は $Dv=au$ をみたす。

逆に、2) を仮定する。すなわち、$u,v\in K$ で

$$Dv=au,\quad D^{n-1}u=(-1)^{n-1}$$

なるものが存在するとする。$a_{n-1}=u, a_i=-Da_{i+1}$ によって $a_i\in K\ (0\le i<n-1)$ を定義する。このとき

$$v-\sum_{i=0}^{n-1}a_iD^iy\in C_K$$

が成り立つ。したがって $y,\dots,D^{n-1}y$ は K 上代数的に従属する。

たとえば、$K=\mathbf{C}(x)$ とすると、任意の $a\in K$ に対して、方程式系

$$Df_i=f_{i-1},\quad f_0=a\quad (0\le i)$$

の解 $f_1,f_2,\dots$ は K 上代数的に従属する。実際、a の分母を u とおけば $au\in\mathbf{C}[x]$ で、その積分 v が K 内に存在する。

関連してつぎを紹介しよう。

Ostrowskiの定理　R/K を $C_R=C_K$ なる微分拡大、K は R の中で代数的に閉じていると仮定する。$f_i\in R\ (1\le i\le n)$ は $Df_i\in K$ をみたし、K 上代数的に従属であるとする。このとき、すべてが0とは限らないある $a_i\in C_K\ (1\le i\le n)$ が存在し、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_if_i\in K$ が成立する。

証明　$\Omega_{R/K}$ において、自明でない関係式

$$\sum_{i=1}^{n}a_idf_i=0\quad (a_i\in R)$$

が成立する。上述と同様にして $a_i\in C_R=C_K\subset K$ であることがわかる。よって

$$d\sum_{i=1}^{n}a_if_i=\sum_{i=1}^{n}a_idf_i=0$$

したがって $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_if_i\in K$ を得る。

6 可解性

$K \subset R \subset S$ を微分拡大列とする。trans.deg $S/K < +\infty$ で、C_R, C_S は代数閉体とする。$\omega_1, \ldots, \omega_m$ を $\Omega(R/K)$ の基底、それに加えて $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を $\Omega(S/K)$ の基底とする。変分方程式は

$$\mathcal{L}_D \omega_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\omega_j,\ \mathcal{L}_D \theta_j = \sum_{h=1}^{m} b_{jh}\omega_h + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\theta_k \quad (a_{ij} \in L,\ b_{jh}, c_{jk} \in M)$$

となる。これらを簡単に

$$\mathcal{L}_D \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix}$$

と記す。$D\Phi = A\Phi$ の基本解 Φ から $D\Psi = \begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} \Psi$ の基本解 Ψ で $\Psi = \begin{pmatrix} \Phi & O \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$ の形で求められる。

変分方程式の基本解によって生成される微分拡大を延長といい、R^1 と書くことにする。$K \subset R \subset S$ を微分拡大列とすれば、R のどの延長も S のある延長に埋め込むことが出来る。ここで微分基底や基本解のとり方によって R^1 が異なることがあることに注意しよう。

もし、ある R^1/R が一般 Liouville 拡大に含まれれば、他の R^1/R についてもそうである。実際 $\Omega_{R/K}$ の 2 つの基底を $\omega_1, \ldots, \omega_n$ および $\eta_1, \ldots, \eta_n$ とし、それらがみたす線型方程式を

$$D\omega = A\omega, \quad D\eta = B\eta$$

とする。ある変換行列 T によって $\eta = T\omega$ とできるから、

$$DT + TA = BT$$

が成り立つ。いま、Φ, Ψ を $D\Phi = A\Phi, D\Psi = B\Psi$ の基本解とすれば、

$$DT\Phi = BT\Phi$$

となる。したがって、ある定数行列 Γ によって $\Psi = T\Phi\Gamma$ と書くことが出来る。故に $R\langle \Phi, \Gamma \rangle = R\langle \Psi, \Gamma \rangle$ となる。Φ が R の一般 Liouville 拡大 L に含まれるならば、Ψ は R の一般 Liouville 拡大 $L\langle \Gamma \rangle$ に含まれる。

命題 5 微分拡大 R/K はつぎの中間微分拡大 $\{R_i\}_{0 \le i \le n}$ をもつと仮定する。

$$K = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_n = R, \quad \text{trans.deg } R_i/R_{i-1} = 1 \ (1 \le i \le n)$$

このとき R^1/R は一般 Liouville 拡大に含まれる。

証明　$n=1$ の場合を示せば十分である。このとき、$\Omega_{R/K}$ の基底 ω は 1 階線形微分方程式をみたす。したがって R^1/R は一般 Liouville 拡大に含まれる。

とくに、つぎが成り立つ。

定理 3　R/K を一般 Liouville 拡大とすると、その延長 R^1/K は一般 Liouville 拡大である。しかも、それは代数方程式を解くことと、積分によって達成される。

証明　$n = \text{trans.deg}\, R/K$ に関する帰納法で証明する。R/K は一般 Liouville 拡大であるからつぎの拡大列が存在する。

$$K \subset R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_n = R$$

(1) $[R_0 : K] < \infty$ である。各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して、R_{i-1} は R_i の中で代数的に閉じている。

(2) 各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して、R_{i-1} 上超越的な $0 \neq t_i \in R_i$ が存在し $Dt_i \in R_{i-1}$ または $t_i^{-1}Dt_i \in R_{i-1}$ が成立し、$[R_i : R_{i-1}(t_i)] < \infty$ である。

$E = R_{n-1}, F = R_n, t = t_n$ とおく。E^1/K が一般 Liouville 拡大であるとき、F^1/K もまたそうであることを示せばよい。まず $Dt = u \in E$ とする。dt は

$$\mathcal{L}_D dt = du \in \Omega(E/K)$$

をみたす。E/K の変分方程式をこれに加えて、F/K の変分方程式が得られる。よって、ある $v \in E^1$ によって $F^1 = E^1F(z),\ Dz = v$ としてよい。よって F^1/K は一般 Liouville 拡大である。

つぎに $Dt = tu,\ u \in E$ の場合を考える。dt は

$$\mathcal{L}_D dt = udt + tdu, \quad du \in \Omega(E/K)$$

をみたす。上記と同様に、ある $v \in E^1$ によって $F^1 = E^1F(z),\ Dz = uz + tv$ を得る。ところで、$Dt = tu$ であったから、$z = tw$ とおけば $Dw = v$ を得、F^1/E^1F は、したがって F^1/K は一般 Liouville 拡大となる。

微分拡大の列

$$K \subset L \subset R$$

において R/K が一般 Liouville 拡大ならば、R/L もそうである。これは定義からあきらか。

したがって、微分拡大 R/K は K 上一般 Liouville 拡大に含まれるならば、R^1 は K 上一般 Liouville 拡大に含まれる。

7 Painlevé I 型方程式

Kepler 方程式の解は $\mathbf{C}(x)$ 上 1 階代数的微分方程式をみたし、$\mathbf{C}(x)$ の PU 拡大に属さないということをわれわれはすでに確かめた。2 階の場合には、Painlevé I 型方程式がある ([2] を参照)。これを検証することがこの節のテーマである。

論文 K. Nishioka, "Linear differential equation attached to Painlevé first equation", Funkcialaj Ekvacioj, 38(1995), 277-282 の間違った証明を訂正する。

K を標数 0 の微分体とする。$\alpha \in K$ は $D\alpha \neq 0$ なるものとする。方程式

$$D^2y = 6y^2 + \alpha$$

を Painlevé I 型微分方程式という。微分方程式

$$D^2y = ay^2 + by + c \quad (a, b, c \in K,\ a \neq 0)$$

の解の研究は簡単な変換によって $a = 6, b = 0$ の場合に帰着できることに注意しよう。

y, y' を不定元とし、微分代数 $K[y, y']$ を

$$Dy = y', \quad Dy' = 6y^2 + \alpha$$

によって定義する。上記の Painlevé I 型微分方程式の変分方程式

$$D^2z = 12yz$$

から、$\rho = Dz/z$ とすることによって Riccati 方程式

$$D\rho = 12y - \rho$$

を得る。そこで u を新たな不定元として、微分代数 $K[u, y, y']$ を

$$Du = 12y - u$$

によって定義する。以下しばらく命題の証明に必要な道具の説明を行う。

ベキ積 $u^iy^jy'^k \in K[u,y,y']$ の重さを

$$w(u^iy^jy'^k) = i + 2j + 3k$$

によって定義する。K の非零元の重さは 0 とする。非零の微分多項式 $F \in K[u,y,y']$ に対して、その重さを

$$w(F) = \max\{i + 2j + 3k \mid f_{ijk} \neq 0\}, \quad F = \sum_{ijk} f_{ijk}u^iy^jy'^k$$

によって定義する。たとえば

$$\gamma = y'^2 - 4y^3$$

は重さ 6 の微分多項式である。$F_h = 0$ も認めることにして

$$F = \sum_{h=0}^{p} F_h, \quad p = w(F)$$

というように $K[u,y,y']$ の元を同重多項式 F_h に分解することができる。F_h は 0 でなければ重さ h の単項式の和である。

もし $DF \neq 0$ ならば

$$w(DF) = w(F) + 1$$

が成り立つ。これは F がベキ積のときに調べればよろしい。

微分 D は $K[u,y,y']$ において

$$D = X + Y + Z \quad (X, Y, Z \in \mathrm{Der}\ (K[u,y,y']/C_K))$$

と分解される。ここで

$$X = (12y - u^2)\partial/\partial u + y'\partial/\partial y + 6y^2\partial/\partial y', \quad Z = \alpha\partial/\partial y'$$

であり、Y は D による係数微分である。V_h によって重さ h のベキ積が生成する K 上ベクトル空間を表せば

$$XV_{h-1} \subset V_h, \quad YV_h \subset V_h, \quad ZV_{h+3} \subset V_h$$

が成立する。たとえば、上記の γ に対して $X\gamma = Y\gamma = 0, Z\gamma = 2y'$ である。

しばらく X について調べる。$L = K(\gamma)$ とする。このとき $XL = \{0\}$ である。L は D に関する K の微分拡大ではないことに注意。また、$R = K(y,y')$ とする。これは D に関する K の微分拡大である。

補題 3　$f \in R$ が $Xf = a + b/y'^2$ $(a, b \in L)$ をみたすとする。このとき $b = -3a\gamma$ であり、f はつぎのように表される。

$$f = g - 2ay/y' \quad (g \in L)$$

証明　$f = g + h/y',\ g, h \in L(y)$ と表せば

$$Xf = g_y y' + h_y - 6y^2 h/y'^2$$

を得る。仮定より $Xf \in L(y)$ であるから、$y'^2 = 4y^3 + \gamma \in L(y)$ に注意して、$g_y = 0$, $g \in L$ となる。h に関しては

$$y'^2(h_y - a) = 6y^2 h + b$$

h の分母の既約因子の一つを k とし、h における k の指数を $-r$ とすれば、h_y における指数は $-r-1$ となる。よって k は既約多項式 $y'^2 = 4y^3 + \gamma$ の定数倍で、$r = 1$ でなければならない。$h = (4y^3 + \gamma)^{-1} H$ $(H \in L[y])$ とおこう。すると

$$-12y^2(4y^3 + \gamma)^{-1} H + H_y - a(4y^3 + \gamma) = 6y^2(4y^3 + \gamma)^{-1} H + b$$

これは成立しない。よって $h \in L[y]$ である。$n = \deg_y h > 1$ ならば、係数を比較して $4n = 6$、これは成り立たない。$h = cy + d$ $(c, d \in L)$ とすれば、

$$(c - a)(4y^3 + \gamma) = 6y^2(cy + d) + b$$

より、$d = 0, c = -2a, b = -3a\gamma$ を得る。

$t, s \in K[u, y, y']$ をつぎによって定義する。

$$t = uy' - 6y^2, \quad s = y't$$

ただちに

$$Xt = -ut, \quad Yt = 0, \quad Zt = \alpha u, \quad Xs^{-1} = 1/y'^2$$

を得る。

とくに $Xf \in L$ ならば $f \in L$ である。

補題 4　$f \in R(u)$ が $Xf = 0$ をみたすならば $f \in L$ である。

証明　$f \notin L$ を仮定する。補題 3 より、R の定数体は L であるから、f は R 上超越的である。したがって f, s は R 上代数的に従属する。この場合、R 上代数的なある g で

$Xg = 1/y'^2$ をみたすものがある。Trace をとることによって $g \in R$ と考えてよい。しかし、これは補題 3 に矛盾する。

補題 5　$f \in R(u)$ が $Xf \in L$ をみたすならば $f \in L$ である。

証明　$f \notin R$ としよう。このとき、f, s は R 上代数的に従属する。Ostrowski の定理 (§5 参照) によって、ある $b \in L$ が存在して $g = f + bs^{-1} \in R$ が成立する。よって

$$Xg = Xf + b/y'^2$$

補題 3 より $Xf = b = 0$ を得る。

補題 6　$f \in R(u)$ が $Xf = ay + (by + c)/y'^2$ $(a, b, c \in L)$ をみたすならば $b = 3a\gamma$ である。

証明　$f \in R$ の場合、ある $g \in L$ および $h \in L(y)$ を用いて $f = g + h/y'$ と表すことができる。以前と同様

$$(4y^3 + \gamma)(h_y - ay) = 6hy^2 + by + c$$

を得る。h は多項式であることが分かる。h の y に関する次数を考えれば $\deg_y h \leq 2$ を得る。$h = h_0 y^2 + h_1 y + h_2$ $(h_i \in L)$ とおけば

$$4(2h_0 - a) = 6h_0, \quad 4h_1 = 6h_1, \quad h_2 = 0, \quad \gamma(2h_0 - a) = b, \quad \gamma h_1 = c$$

よって $b = 3a\gamma$ を得る。$f \notin R$ の場合。ある $e \in L$ が存在し、$k = f + es^{-1} \in R$ となり

$$Xk = Xf + e/y'^2 = ay + (by + c + e)/y'^2$$

を得る。よって $b = 3a\gamma$ となる。

定理 4　$F \in K[u, y, y'] \setminus K$ が DF を割り切ることはない。

証明　F が DF を割り切ると仮定する。すなわち

$$DF = AF \quad (A \in K[u, y, y'])$$

とする。F の同重多項式への分解を

$$F = \sum_{h=0}^{p} F_h$$

とする。$DF \neq 0$ の場合、$w(DF) \leq w(F) + 1$ であるから、$w(A) \leq 1$ を得る。$DF = 0$ の場合、$A = 0$ と考える。どちらにしても

$$A = -mu + a, \quad m = \deg_u F, \quad a \in K$$

と書くことが出来る。これより

$$(*)\qquad XF_h + YF_{h+1} + ZF_{h+4} = (-mu)F_h + aF_{h+1}$$

を得る。ただし $F_h = 0\ (h < 0 \,\mathrm{or}\, h > p)$ とした。以下で [2] で行われているように F_h を求めていこう。

$h = p$ の場合、

$$XF_p = -muF_p$$

t を用いれば、これは $X(F_p/t^m) = 0$ と書き換えられる。よって $F_p = ct^m\ (c \in L)$ を得る。いまは $c \in K[y, y']$ であるから、$c = c_0\gamma^k\ (c_0 \in K)$ そして $F_p = c_0\gamma^k t^m,\ k \geq 0$ となる。すると $p = 6k + 4m \geq 4$ である。$c_0 = 1$ として議論を進める。

$h = p - 1$ の場合。

$$XF_{p-1} = -muF_{p-1} + aF_p$$

これは

$$X(F_{p-1}/F_p) = a \in K \subset L$$

となるから補題 3 より $a = 0$ そして $F_{p-1} = 0$ を得る。

$h = p - 2, p - 3$ の場合。

$$XF_{p-2} = -muF_{p-2}, \quad XF_{p-3} = -muF_{p-3}$$

より $X(F_{p-2}/F_p) = X(F_{p-3}/F_p) = 0$ を得、$p \geq 4$ より $F_{p-2} = F_{p-3} = 0$ を得る。

$h = p - 4$ の場合。$(*)$ はつぎのようになる。

$$XF_{p-4} + ZF_p = -muF_{p-4}$$

ところで

$$ZF_p/F_p = 2k\alpha y'/\gamma + m\alpha u/t = X(2k\alpha y/\gamma + m\alpha/t)$$

であるから、

$$X(F_{p-4}/F_p) + X(2k\alpha y/\gamma + m\alpha/t) = 0$$

したがって、補題 4 より

$$F_{p-4} = -(2k\alpha y/\gamma + m\alpha/t)F_p + b \quad (b \in L)$$

$p = 4$ とすると $F_0 \in K,\ k = 0, m = 1, b \in K$ そして $F = t - \alpha + b$ となるが、$DF = -uF$ に代入すれば、$D\alpha = 0$ を導き、仮定に反する。よって $p > 4$ である。

最後に $h=p-5$ の場合を考える。この場合 $(*)$ はつぎになる。

$$XF_{p-5}-D(\alpha)(2ky/\gamma+m/t)F_p=-muF_{p-5}$$

書き換えて

$$X(F_{p-5}/F_p)=D(\alpha)(2ky/\gamma+my's^{-1})$$

$f=F_{p-5}/F_p-D(\alpha)mys^{-1}$ とおくと、

$$Xf=D(\alpha)(2ky/\gamma-my/y'^2)$$

補題 6 より $-mD\alpha=6k\gamma^{-1}D\alpha$、故に $D\alpha=0$、これは矛盾。

定理 4 からつぎの結果がでる。

命題 6　y を K 上 Painlevé I 型方程式の解とする。もし、y が K のある PU 拡大に属するならば、y は K 上代数的である。

証明　y が K の任意定数に代数的に依存する拡大体 R に属する場合を考えれば十分である。このときある微分拡大 E/K で、E,R は K 上 free、$[ER:EC_{ER}]<\infty$ となるものが存在する。C_{ER} の C_E 上代数的基底を $u_1,\dots,u_n$ とする。y が $L=E(u_1,\dots,u_{n-1})$ 上代数的であることを示そう。実際もしそうでなければ y は L 上 1 階代数的微分方程式をみたす。それを

$$F(y,Dy)=0 \quad (0\neq F\in L[Y,Y'],\ Y'=DY)$$

とする。ただし $D^2Y=6Y^2+\alpha$ とする。F は Y' に関する次数を最小にとり、既約であるとする。

$$DF=F^D+Y'F_Y+(6Y^2+\alpha)F_{Y'} \quad (Y'=DY)$$

を F で割れば、ある非負整数 k と $I\in L[Y],\ A,B\in L[Y,Y']$ があり

$$I^kDF=AF+B,\quad \deg_{Y'}B<\deg_{Y'}F$$

となる。ここで I は F における Y' の最高ベキの係数である。y を代入すれば
$B(y,Dy)=0$ であるから、仮定により $B=0$ となる。F は既約でもあるから、それは DF を割り切る。定理 4 より、$F=0$ を得る。これは矛盾。y は L 上代数的であることがわかった。同様にして、y は $E(u_1,\dots,u_i)$ $(0\leq i\leq n)$ 上代数的であることを知る。とくに、それは E 上代数的。ところで、E,R は K 上 free であったから、y が K 上代数的であることを得る。

命題 7　y を K 上 Painlevé I 型方程式の一般解とする。このとき、y の変分は $K\langle y\rangle$ 上一般 Liouville 拡大に属することはない。

証明　y の変分 z は

$$D^2 z = 12yz$$

を満足する。もし、$z \neq 0$ が $R = K\langle y\rangle$ 上一般 Liouville 拡大に属するならば、$Dw = 12yw$ で $t = w^{-1}Dw$ が R 上代数的なるものが存在する ([2])。したがって既約な $F \in K[y, y', u]$, $Du = 12y - u^2$ で $F(y, y', t) = 0$ なるものがある。上と同様の議論によって F が DF を割り切ることを知る。定理 4 によってこれは不可能。

REFERENCES

[1] E.R. Kolchin, *Existence theorem connected with the Picard-Vessiont theory of homogeneous mordinary linear differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948)

[2] 西岡久美子,「微分体の理論」, 共立出版, 2010

[3] F.W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer, 1983

[4] E.T. Whittaker, A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, 1936

[5] H. Yoshida, *Necessary condition for the existence of algebraic first integrals*, Celestial Mechanics 31(1983), 363-379

微分代数における変分方程式

発　行　日	2012年3月30日
著　　　者	西岡啓二
発　行　所	慶應義塾大学 湘南藤沢学会
印　刷　所	株式会社 ワキプリントピア

ISBN 978-4-87762-252-7
SFC-RM2011-005