ISBN 978-4-87762-247-3
SFC-RM 2011-002

常微分作用素のFloquet分解

西岡啓二

慶應義塾大学 環境情報学部

常微分作用素のFloquet分解

西岡啓二

環境情報学部

1 Introduction

表題にあるFloquet分解の由来を紹介しよう. $t=0$の近傍で一価有理型関数を係数とする線形斉次微分方程式

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(t)y=0$$

の解はすべて

$$y=t^{\rho}f(t,u)$$

の形を有する. ここで, fはtに関して一価関数を係数とするuに関する多項式である. uは$\log t$を示す. fの係数はLaurent級数で表されるが, 一般に主部は有限ではない. もし, 方程式の基本解が係数の主部が有限なfによって表現されるならば, $t=0$は方程式の確定特異点であるといわれる. Fuchs (Zur Theorie der linearen Differntialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Journal für die reine und angewandte Mathematik, (1826), 121-160) によれば, $t=0$が確定特異点であるための必要十分条件は各$p_i(t)$が$t=0$を高々i位の極とすることである. $D=t\dfrac{d}{dt}$とし, 方程式を

$$D^ny+q_1(t)D^{n-1}y+\cdots+q_n(t)y=0$$

と書き換えれば, この条件は各q_iが$t=0$で正則であることに同値である.

Frobenius [2] はFuchsやThoméの結果を明快に説明した. Frobeniusの方法を用いてFloquet [1] は詳細な局所的理論を展開した. つぎのFloquetの定理 [1, p.126] はFuchsの結果の一般化である.

> THÉORÈME II. — *Pour que l'équation différentielle $P=0$ ait s intégrales régulières linéairement indépendantes, il faut il suffit que l'expression P soit susceptible de la forme*
>
> $$P=QD$$

où Q et D sont d'ordres $m-s$ et s, et sont de même nature que P, c'est-à-dire à coéfficients présentant le caractère des fonctions rationnelles, le premier étant l'unité, et où $D=0$ toutes ses intégralles régulières, $Q=0$ n'en ayant aucune.

表題の Floquet 分解は定理が述べる分解のことである. Floquet の証明は解の概念を用いているが, この論説では微分作用素からなる非可換代数の簡単な性質から証明を与える. Floquet の定理にある Q および D を解の概念を用いずに特徴付ける必要がある. 上述の Fuchs の定理がその手助けとなる. Floquet の定理は section 5 で定式化され, section 6 で解との関係を説明する.

2 微分作用素環

R を微分可換環, D をその微分とする. R 上微分作用素環 $R[D]$ はつぎの加法 $+$, 乗法 $\circ$ によって分配, 結合代数になる. $R[D]$ の 2 元を $f=\sum a_iD^i, g=\sum b_iD^i$ とするとき

$$f+g=\sum(a_i+b_i)D^i, \quad f\circ g=\sum c_iD^i.$$

ここで

$$c_i=\sum_{j,k}\binom{j}{j+k-i}a_jb_k^{(j+k-i)}$$

である. とくに $D\circ a=aD+D(a)$ である. $a\in R$ に対して通常のように
$D(a)=a', D^i(a)=a^{(i)}$ と略記する.

$$\deg_D f=\max\{i \mid a_i\neq 0\}, \quad \lambda(f)=a_{\deg_D f}$$

と表す. $\lambda(f)=1$ のとき f は monic といわれる. R が整域であるときつぎが成り立つ.

$$\deg_D f\circ g=\deg_D f+\deg_D g, \quad \lambda(f\circ g)=\lambda(f)\lambda(g).$$

$f\in R[D]$ は, もし $g,h\in R[D]$ で $f=g\circ h$, $0<\deg_D g, \deg_D h$ なるものがあれば, 可約であるといわれ, そうでなければ既約といわれる.

命題 I を R の微分イデアルとする. R/I は微分環になる. 標準的全射 $\pi: R\to R/I$ は微分準同型であり, 係数に作用させることによって準同型 $\pi: R[D]\to(R/I)[D]$ に拡張される.

証明 $f = \sum a_i D^i \in R[D]$ に対して $\pi(f) = \sum \pi(a_i) D^i$ である. $g = \sum b_i D^i \in R[D]$, $f \circ g = \sum c_i D^i$ とする.

$$c_i = \sum_{j,k} \binom{j}{j+k-i} a_j b_k^{(j+k-i)}$$

であるから

$$\pi(f \circ g) = \sum_{i,j,k} \binom{j}{j+k-i} \pi(a_j b_k^{(j+k-i)}) D^i = \sum_{i,j,k} \binom{j}{j+k-i} \pi(a_j) \pi(b_k)^{(j+k-i)} D^i$$
$$= \pi(f) \circ \pi(g)$$

を得る. $\pi(f+g) = \pi(f) + \pi(g)$ は明らかであるから, π は準同型である. $\pi(f)$ は決定多項式の一般化である.

R を微分整域, P を微分素イデアル, $\pi : R[D] \to (R/P)[D]$ を標準的準同型とする. $P[D] = \mathrm{Ker}\,\pi$ は $R[D]$ の素イデアルである. $\delta = \deg_D \circ \pi$ とする.

命題 R を微分整域, P を微分素イデアルとする. $f \in R[D]$ はつぎの形をもつとする.

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i, \quad a_0 \notin P, a_i \in P (1 \leq i \leq n), a_n \notin P^2$$

このとき, f は既約である.

証明 いま $f = g \circ h$ $(0 < \deg_D g, \deg_D h)$ と分解されたとしよう. $0 = \delta(f) = \delta(g) + \delta(h)$ であるから $\delta(g) = \delta(h) = 0$ である. よって $\lambda(g), \lambda(h)$ はともに P に属する. よって $\lambda(f) = \lambda(g \circ h) = \lambda(g)\lambda(h) \in P^2$ が成り立つが, これは f に関する仮定に反する.

3 微分離散付値環

微分環 R は極大イデアル P が微分イデアルであるような付値環であるとき, 微分付値環とよばれる. R の商体を K で示し, 対応する付値を ν と書く. ν は加法付値とし, その値域は有理整数全体とする. このとき, 各 $a \in R$ に対して $\nu(a') \geq \nu(a)$ が成り立つ. 以下で微分付値環はこのような離散付値環であるとする. ν は $K[D]$ に拡張される.

$$\nu(f) = \min\{\nu(a_i) \mid 0 \leq i \leq \deg_D f\}$$

ここで $f = \sum a_i D^i \in K[D]$ とした. つぎが成立する. $f, g \in K[D]$ に対して

$$\nu(f \circ g) = \nu(f) + \nu(g), \quad \nu(f+g) \geq \max\{\nu(f), \nu(g)\}$$

$f = \sum a_i D^i \in K[D], \neq 0$ に対して

$$\rho(f) = \max\{i \mid \nu(a_i) = \nu(f)\}$$

とおけば

$$\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$$

が成立する. 実際

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i D^i,\ g = \sum_{i=0}^{n} b_i D^i\ (a_m b_n \neq 0), \quad f \circ g = \sum c_i D^i$$

とすれば

$$c_i = \sum_{j,k} \binom{j}{j+k-i} a_j b_k^{(j+k-i)}$$

である.

$$\nu(a_j b_k^{(h)}) = \nu(a_j) + \nu(b_k^{(h)}) \geq \nu(a_j) + \nu(b_k) \geq \nu(f) + \nu(g).$$

$r = \rho(f), s = \rho(g)$ とおき, $j + k > r + s$ の場合を考える. このとき $j > r$ または $k > s$ であるから

$$\nu(a_j b_k^{(h)}) \geq \nu(a_j) + \nu(b_k) > \nu(f) + \nu(g)$$

を得る. $j + k = r + s$ の場合, もし $j \neq r$ で $k \neq s$ ならば, $j > r$ または $k > s$ となるから前述と同様の結果となる. これより $\nu(c_{r+s}) = \nu(f) + \nu(g) = \nu(a_r b_s)$ を得る.

ρ は $\nu(f) = 0$ なる $f \in R[D]$ に対して δ と同じ.

命題 R を微分付値環, その極大イデアルを P とする. もし, $f \in R[D]$ が既約ならば, それは $K[D]$ においても既約である.

証明 $f = g \circ h,\ (g, h \in K[D])$ としよう. $a \in K$ で $\nu(a) = \nu(h)$ なるものをとり, $g_1 = g \circ a, h_1 = a^{-1}h$ とおけば, $f = g_1 \circ h_1$ で $g_1, h_1 \in R[D]$ となる. よって f は R 上可約である.

関連してつぎの定理を Nishioka [3] からの引用しよう.

Theorem Let K be a differential field with a derivative operator D and a normalized discrete valuation ν of K satisfy $\nu(D(a)) \geq \nu(a)$ for any element $a \in K$ and $\nu(a) = 0$ for nonzero rational numbers. Suppose

$h=\sum_{i=0}^{n} c_i D^i$ be a reducible element of $K[D]$ and the coefficients satisfy the conditions

$$\nu(c_0)=0, \quad \frac{\nu(c_n)}{n}<\frac{\nu(c_i)}{i}\ (0<i<n), \quad m=\nu(c_n)>0.$$

Then $\deg_D$ of any divisor of h is a multiple of $\dfrac{n}{m}$.

たとえば, $c_0=1, \nu(c_i)=1\ (i=1,\ldots,n)$ とするとき, $h=\sum_{i=0}^{n} c_i D^i$ は既約である. これより, (L,D) を微分体, t を $Dt=0$ をみたす不定元とすれば. 任意の $f\in L[D]$ に対して $f+t\in L(t)[D]$ は既約である (Amitzur: *Commutative differential operators*, Pacific J. Math. 8(1958), 1-10). 付値を $\nu(t)=-1$ にとり, $t^{-1}f+1$ に適用すればよい.

4 Floquet 分解

Floquet の主定理を述べるために, すこし言葉の準備をする.

以下 R は微分付値環, P はその極大イデアル, K を R の商体とする. また, ν で R に付随する付値を表す.

定義 $f\in R[D]$ は $\nu(f)=0$ のとき normal といわれ, $\nu(f)=0, \rho(f)=\deg_D f$ のとき regular といわれる. また normal $f\in R[D]$ は $\rho(f)=0$ をみたすとき, coregular ということにする. $f=\sum a_i D^i \in R[D]$ に対して $f^a=\sum(-D)^i\circ a_i$ を f の adjoint という.

つぎは古典的. 証明はたとえば Floquet[1] を参照. 帰納法でも直接証明できる.

$$(f^a)^a=f, \quad (f+g)^a=f^a+g^a, \quad (f\circ g)^a=g^a\circ f^a.$$

また, f^a の定数項は f のそれに等しい. つぎが得られる.

$$\deg_D f=\deg_D f^a, \quad \nu(f)=\nu(f^a), \quad \rho(f)=\rho(f^a)$$

第 2,3 式は $f=\sum a_i D^i$ とするとき, $i>\rho(f)$ ならば

$$\nu((-D)^i\circ a_i)=\nu(a_i)=\nu(a_iD^i)>\nu(f)$$

であるからである. これらの関係式から, $f\in R[D]$ は (co)regular ならば, f^a も (co)regular である.

命題　2つの regular elements の積は regular である．regular element の右 (l左) 因子 は regular である．coregular についても同様である．regular で coregular な $R[D]$ の元は R に属する．

証明　$f, g \in R[D]$ を regular とする．定義から

$$\nu(f) = \nu(g) = 0, \quad \rho(f) = \deg_D f, \quad \rho(g) = \deg_D g$$

である．よって $\nu(f \circ g) = 0$ そして

$$\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g) = \deg_D f + \deg_D g = \deg_D f \circ g$$

を得る．つぎに $f \in R[D]$ を regular, $f = g \circ h,\ g, h \in R[D]$ とする．すると $0 = \nu(f) = \nu(g) + \nu(h)$ よって $\nu(h) = 0$ となる．また

$$\deg_D f = \rho(f) = \rho(g) + \rho(h) \leq \deg_D g + \deg_D h \leq \deg_D f$$

より, g, h が regular であることを知る．coregular についても同様の議論によって求める結果を得る．最後は明らか．

定義　normal $f \in R[D]$ は coregular g, regular h によって $f = g \circ h$ と表されるとき, この分解を f の Floquet 分解という．

命題　$f, f_1, g, g_1 \in R[D]$ のはじめの2つは coregular, あとの2つは regular とする．もし $f \circ g = f_1 \circ g_1$ ならば, f, g はそれぞれ f_1, g_1 の K スカラー倍である．(co)regular $h \in R[D]$ が $f \circ g$ の K 上 (左) 右因子ならば, それは $(f)g$ の K 上 (左) 右因子である．

証明　あとの主張を示せば, 前の主張が従う．さて h を regular とし,

$$f \circ g = p \circ h, \ p \in K[D]$$

と仮定する．$q, r \in K[D]$ で $g = q \circ h + r$ なるものをとる．ここで $r = 0$ または $\deg_D r < \deg_D h$ である．もし $r \neq 0$ ならば

$$(p - f \circ q) \circ h = f \circ r$$

より

$$\deg_D h \leq \rho(h) \leq \rho(p - f \circ q) + \rho(h) = \rho(r) \leq \deg_D r$$

を得, 矛盾. よって $r=0$ を得る. すなわち h は g の右因子である. つぎに, h を coregular とし, $f \circ g = h \circ p,\ p \in K[D]$ と仮定する. $q, r \in K[D]$ で $f = h \circ q + r$ なるものをとる. ここで $r=0$ または $\deg_D r < \deg_D h$ である. もし $r \neq 0$ ならば

$$h \circ (p - q \circ g) = r \circ g$$

より

$$\rho(h) + \rho(p - q \circ g) = \rho(r) + \rho(g) \geq \deg_D g$$

を得る. よって $\deg_D(p - q \circ g) \geq \deg_D g$ が成り立つ. そして

$$\deg_D h + \deg_D(p - q \circ g) = \deg_D r + \deg_D g$$

であるから $\deg_D h \leq \deg_D r$ となる. これは矛盾. 故に $r=0$ である. すなわち h は f の左因子である.

5 Floquet の定理

R を微分離散付値環とする. 標準的な全射 $\pi : R \to R/P$ は環準同型になる.
$R = \mathbb{C}[[x]],\ D = x\dfrac{d}{dx}$ の場合, $R/P = \mathbb{C}$ で, $\pi(f)$ は f の古典的な決定多項式である.

定理　R はさらに完備とする. $f = \sum a_i D^i \in R[D]$ は normal で, $\rho(f) = m$ とする. $h_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i D^i$ とおけば, つぎの条件をみたす $g, h \in R[D]$ が存在する.

$$f = g \circ h,\ \pi(h) = \pi(h_0),\ \deg_D h = \deg_D h_0,\ \rho(g) = 0,\ \nu(g) = \nu(h) = 0$$

h は K スカラー倍を除いて一意的に決まる.

証明　最後の主張はすでに示してある. $f = \displaystyle\sum_i a_i D^i$ を $g_0 = 1,\ h_0$ によって

$$f = g_0 \circ h_0 + t w_1$$

と表現する. ここで, $\nu(t) = 1,\ w_1 \in R[D]$ である. 簡単のため h_0 の最高次の係数 $a_m = 1$ とする.

$$f - g_i \circ h_i = t^{i+1} w_{i+1}, \quad w_{i+1} \in R[D]$$

をみたす $g_i, h_i, w_{i+1} \in R[D]$ をつぎのように帰納的に定義する. $g_{i-1}, h_{i-1}, w_i\ (i \geq 1)$ がすでに得られたとしよう. そこで w_i を h_{i-1} で割ったときの商を u_i 余りを v_i とする.

$$w_i = u_i \circ h_{i-1} + v_i$$

そして

$$g_i = g_{i-1} + t^i u_i, \quad h_i = h_{i-1} + t^i v_i$$

と置く．これによって w_{i+1} が決まることを示そう．

$$f - g_i \circ h_i = f - g_{i-1} \circ h_{i-1} - (g_{i-1} \circ t^i v_i + t^i u_i \circ h_{i-1}) - t^i u_i \circ t^i v_i$$

となる．$p \in R[D]$ に対して $p^{[i]} = t^{-i} p \circ t^i$ によって $p^{[i]} \in R[D]$ を定義する．すぐにわかるように

$$(p+q)^{[i]} = p^{[i]} + q^{[i]}, \quad (p \circ q)^{[i]} = p^{[i]} \circ q^{[i]}, \quad a^{[i]} = a\ (a \in R)$$

が成立する．この記号を用いれば

$$f - g_i \circ h_i = t^i (w_i - g_{i-1}^{[i]} \circ v_i - u_i \circ h_{i-1}) - t^{2i} u_i^{[i]} \circ v_i$$

を得る．そして

$$g_{i-1}^{[i]} = (g_0 + tu_1 + \cdots + t^{i-1} u_{i-1})^{[i]} = g_0^{[i]} + tu_1^{[i]} + \cdots + t^{i-1} u_{i-1}^{[i]} = 1 + t\phi_i$$

を得る．$\phi_i \in R[D]$ である．すると

$$f - g_i \circ h_i = t^i (w_i - g_{i-1}^{[i]} \circ v_i - u_i \circ h_{i-1}) - t^{2i} u_i^{[i]} \circ v_i = -t^{i+1} (\phi_i \circ v_i + t^{i-1} u_i^{[i]} \circ v_i)$$

であるから

$$w_{i+1} = -(\phi_i \circ v_i + t^{i-1} u_i^{[i]} \circ v_i)$$

とおけばよい．$g = \lim_{i \to \infty} g_i, h = \lim_{i \to \infty} h_i$ とすれば，R は完備であるから $g, h \in R$ であって

$$f = g \circ h$$

となる．定義の仕方から，任意の $i \geq 1$ に対して，$v_i = 0$ または $\deg_D v_i < \deg_D h_{i-1}$ であるから $\deg_D h_i = \deg_D h_{i-1}$ を得，$\deg_D h = \deg_D h_0$ となる．

例　(K, D) を微分体，t を $Dt = 0$ をみたす不定元とし，$K(t)$ 上の微分作用素

$$f = (tD - 1)(D - t) = tD^2 - (1 + t^2)D + t$$

を考える．t に関する位数 ord_t に関して $\rho(f) = 1$，f の regular 因子および coregular 因子はそれぞれ $D - t$ および $tD - 1$ である．

6 応用

R を離散付値環で, 微分 D をもつ微分環であるとする. その極大イデアル P は微分イデアルであるとする. R に付随する付値を ν そして, R の完備化を R_ν で表す. D は R がもたらす位相に関して連続である.

Ore [4] によれば, $f, g \in K[D]$ に対して f, g に共通の右因子で次数最大のもの, greatest common divisor (GCD) が存在する. また, f, g に共通の左 multiple で次数最小のもの, least common multiple (LCM) が存在する. GCD, LCM はともに, Euclid 互除法によって得られ, K スカラー倍の自由度があることに注意しよう.

以下 f, g の normal GCD, normal LCM のひとつをそれぞれ $f \vee g$, $f \wedge g$ と表示する. Floquet の分解定理より, つぎが得られる.

系 1 R が完備であるとき, normal $f \in R[D]$ に対して, regular g および co-regular h が存在し $f = g \circ h$ が成立する. g, h はスカラー倍を除いて一意的に決まる.

実際, regular g^*, co-regular h^* による f^a の Floquet 分解 $f^a = h^* \circ g^*$ の adjoint をとればよい.

さらに adjoint を用いればつぎがわかる. $f \in R[D]$ を regular, $g, h \in R[D]$ を coregular とし, h は $f \circ g$ の右因子とすると, h は g の右因子である.

系 2 $R[D]$ において (co)regular operators の normal GCD, normal LCM はいずれも (co)regular である.

証明 normal GCD については明らか. normal LCM について主張を示す. いま $f, g \in R[D]$ を regular とする. これらを R の完備化 R_ν 上の作用素とみて, normal LCM を $f \wedge g = h \circ k$ のように Floquet 分解する. $h, k \in R_\nu[D]$ はそれぞれ coregular, regular である. f, g はともに $h \circ k$ の右因子であるから, k の右因子, したがって, k は $f \wedge g$ を右因子にもつ. k は regular であるから, $f \wedge g$ も regular である. $f, g \in R[D]$ が coregular の場合も同様に扱える. normal LCM $f \wedge g$ を regular h, coregular $k \in R_\nu[D]$ によって Floquet 分解し, $f \wedge g = h \circ k$ とする. k は f, g を右因子とするから, $f \wedge g$ を右因子とする. よって $f \wedge g$ は coregular である.

系 3 $f \in R[D]$ を normal とする.

$$f = g_1 \circ g = h_1 \circ h$$

を2つの Floquet 分解とする．g, h_1 は regular で g_1, h は coregular である．このとき f は g, h の LCM である．

証明 $\deg_D g \vee h = 0$ であるから $\deg_D g \wedge h = \deg_D g + \deg_D h$ である [5, p.486]．ところで $\rho(f) = \deg_D g = \deg_D h_1$ であるから $\deg_D f = \deg_D h_1 + \deg_D h = \deg_D g \wedge h$ が成り立つ．もちろん f は g, h を右因子にもつから，f は $g \wedge h$ のスカラー倍である．

微分拡大体 L/K の元 y は方程式 $f(y) = 0,\ f \in K[D]$ をみたすとき，$f(y) = 0$ の解とよばれる．$f \in R[D]$ が (co)regular であるとき，$f(y) = 0$ の解 y は (co)regular とよばれる．$f \in R[D]$ を normal とする．f, f^a の Floquet 分解を $f = g \circ h,\ f^a = g_1 \circ h_1$ とする．L は $h(y) = 0$ および $g_1^a(y) = 0$ の基本解を含むものとする．L における $f(y) = 0$ の解全体を $V(f)$ と表す．このとき

$$V(f) = V(h) \oplus V(g_1^a)$$

である．実際，$y \in V(h) \cap V(g_1^a)$ とする．y がみたす方程式 $k(y) = 0, k \in R[D]$ を $\nu(k) = 0$ かつ $\deg_D k$ が最小のものをとる．すると k は h, g_1^a の右因子である．よってそれは regular であり coregular でもある．$k \in R$ となり $y = 0$ を得る．$\deg_D h = \rho(f) = \rho(f^a) = \deg_D h_1$ より $\deg_D f = \deg_D h + \deg_D g_1^a$ であるから

$$\dim V(f) \leq \deg_D f = \deg_D h + \deg_D g_1^a = \dim V(h) + \dim V(g^a)$$

故に $V(f) = V(h) \oplus V(g_1^a)$ を得る．

命題 微分拡大体 L/K の元で regular elements 全体を Reg (L/R) と書く．Reg (L/R) は K 上微分代数である．Reg (L/R) は K を含む．

証明 $K = C_K$ の場合，主張は明らかであるから，$K \neq C_K$ を仮定する．$a \in K$ とする．$a = 0$ は $1(a) = 0$ の解．$a \neq 0$ とし，$f = D - a^{-1}a'$ とおけば，f は regular であり，$f(a) = 0$ をみたす．よって a は regular である．つぎに $0 \neq u \in L$ を regular とする．$f \in R[D]$ を regular で $f(u) = 0$ をみたすものとしよう．

$$f = a + g \circ D,\ g \in R[D]$$

と表す．g は regular とする．$a = 0$ の場合 $h \in R[D]$ を $h = g$ とする．$a \neq 0$ と仮定する．

$$(D - a^{-1}a') \circ f = (D - a^{-1}a') \circ g \circ D$$

であるから $h = (D - a^{-1}a') \circ g$ とおく．すると $h(u') = 0$ で h は regular である．

$u, v \in \mathrm{Reg}\ (L/R)$ で regular $f, g \in R[D]$ は $f(u) = g(v) = 0$ をみたすものとする. このとき $f \wedge g$ は regular で, $(f \wedge g)(u+v) = 0$ より, $u+v$ が regular であることがわかる.

さて, $a \in K$, $u \in \mathrm{Reg}\ (L/R)$ ならば $au \in \mathrm{Reg}\ (L/R)$ である. 実際 regular $f \in R[D]$ を $f(u) = 0$ なるものとすれば, $af \circ a^{-1}$ は regular で $(af \circ a^{-1})(au) = af(u) = 0$ であるから. $u^{(i)}u^{(j)}$ 全体は有限次元 R 加群 M を生成することがわかる. R は単項イデアル環であるから, $v^{(i)}$ $(0 \leq i, v = u^2)$ で生成される部分加群 N は有限次元で, $\dim N \leq \dim M$ である. したがって, ある regular $g \in R[D]$, $\deg_D g \leq \dim M$ で $g(v) = 0$ が成り立つ.

$u, v \in \mathrm{Reg}(L/R)$ に対して $2uv = (u+v)^2 - u^2 - v^2 \in \mathrm{Reg}(L/R)$ に注意して, 以上から $\mathrm{Reg}(L/R)$ が K-微分代数であることがわかった.

References

[1] G. Floquet: *Sur la théorie des équations linéaires*, Ann. l'École Normale 8(1879), 3-132

[2] G. Frobenius: *Ueber die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 80(1875), 317-333

[3] K. Nishioka: *Koenigsberger's irreducibility theorem*, Keio SFC Journal, 10(2010)

[4] O. Ore: *Theory of non-commutative polinomials*, Ann. Math. 34(1933), 480-508

常微分作用素のFloquet分解

発　行　日　　2011年7月20日
著　　　者　　西岡啓二
発　行　所　　慶應義塾大学 湘南藤沢学会
印　刷　所　　株式会社 ワキプリントピア

ISBN 978-4-87762-247-3
SFC-RM2011-002